12 avril 2021

Y a-t-il une notion de morphisme de matroïdes ?

si oui, ce serait une application $f : M \to M'$ qui préserve la relation de dépendance

(penser en famille

si A est dépendante, demander

- soit $f|_A$ n'est pas injective
- soit $f(A)$ est dépendante)

Notion de matroïde quotient

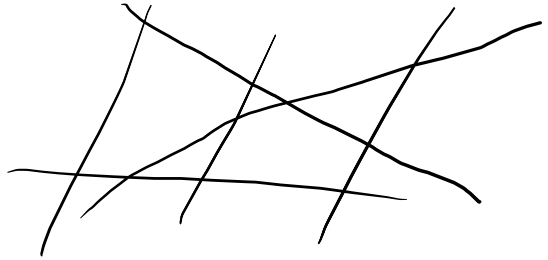
$A \subset M$

M/A a pour ensemble sous jacent les parties de M qui contiennent A (ou celles de $M-A$)

et pour plats = ceux qui contiennent A.

Arrangements d'hyperplans

P espace projectif
suite $(V_0, \dots, V_n)$ d'hyperplans de P.



relations
. combinatoire des intersections des V_i
. géométrie de $P - \bigcup V_i$
↘ en géométrie complexe
— réelle
— corps finis.

Variantes en géométrie affine : ajouter un hyperplan à l'infini
—→ « vectorielle » : sous espaces vectoriels W_j d'un espace vect W
→ projection $P(W_j) \subset P(W)$

Arrangement essentiel $\bigcap_{j=0}^{n} X_j = \emptyset$

sinon $Q = \bigcap X_j$ est un sous espace projectif. $V_j/Q \subset P/Q$

<u>Point de vue</u> « extrinsèque ».

coordonnées projectives $T_0, \ldots, T_m$ sur P
les V_j ont des équations linéaires $f_j = 0$ $f_j = \sum a_{j,i} T_i$

$P = \mathrm{Proj}\,(k[T_0, \ldots, T_m])$ $f_j \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P(1))$.

P $\quad P - Q \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_n$
si $\quad x \longmapsto [f_0(x) : \cdots : f_n(x)]$ $\quad x = (x_0 : \cdots : x_m)$
l'arrangement $\quad f_j(x) = \sum a_{j,i} x_i$
est essentiel

chaque $f_j(x)$ est mal défini
mais collectivement, ils ~~les~~ sont bien définis à un scalaire commun près.

Éviter $f_0(x) = \cdots = f_n(x)$
c'est-à-dire $Q = \bigcap V_j$

On suppose l'arrangement essentiel
L'image de ϕ est un sous espace projectif de $\mathbb{P}_n$
de dimension $\underline{m}$

On obtient $W \subset \mathbb{P}_n$ sous espace projectif de dim m (non contenu dans l'un des H_i)
l'arrangement est donné par les intersections $W \cap H_i$ $\quad H_i : (z_i = 0)$

On fixe un tel arrangement $\mathcal{A}$

$W \subset \mathbb{P}_n$ $\quad \dim(W) = m$

$V_j = W \cap H_j \subset W$. $\qquad f_j$ forme linéaire sur $\underline{P}$ qui définit V_j

$\downarrow$

matroïde associé à $\mathcal{A}$

- points $= j \in \{0, \dots, n\}$
- $J \subset \{0, \dots, n\}$ est dépendante si $(f_j)_{j \in J}$ est liée dans $\underline{T(W, \mathcal{O}(1))}$

$\{0, \dots, n\}$ est indépendant $\Leftrightarrow m = n$

<u>Lemme</u> a) Soit C un circuit de ce matroïde

Il existe (à scalaire près) une unique forme linéaire $f_C \neq 0$ sur $\mathbb{P}_n$ telle que $\left| \begin{array}{l} f_C|_W \equiv 0 \\ \operatorname{supp}(f_C) \subset C \end{array} \right.$ $\qquad f_C = \sum_{j \in C} a_j T_j$

On a $\operatorname{supp}(f_C) = C$

définition d'un circuit :

b) L'idéal $I(W)$ dans $k[T_0, \dots, T_n]$ est engendré par ces formes f_C

Plus précisément : toute forme linéaire sur P qui est nulle sur W est combinaison linéaire des f_C.

f forme linéaire sur P telle que $f|_W = 0$

récurrence sur $\operatorname{supp}(f)$

. $\operatorname{supp}(f) = \emptyset$ $\qquad f = 0$

. $j \in \operatorname{supp}(f) \supset C$ circuit contenant j

$f = \sum a_i T_i \qquad a_j \neq 0$

$f_C = \sum b_i T_i \qquad b_j \neq 0$

$f' = f - \frac{a_j}{b_j} f_C \qquad f'|_W = 0$

$\operatorname{supp}(f') \subset \operatorname{supp}(f)$

$j \notin \operatorname{supp}(f')$

par récurrence,

$f' \in \langle f_C, C \text{ circuit} \rangle$. $\square$

c) La fonction de Hilbert de W

$$d \mapsto \dim_k \left(k[T_0, \dots, T_n] / \mathcal{I}_W \right)_d$$

est celle de $\mathbb{P}^m$ $\quad (m = \dim(W))$

$$d \mapsto \dim k[T_0, \dots, T_m]_d \underset{(!)}{=} \binom{d+m}{m}.$$

$$k[T_0, \dots, T_n]/\mathcal{I}_W \simeq k[T_0, \dots, T_m] \quad \text{comme algèbre graduée.}$$

changer les coordonnées pour que $W = V(T_{m+1}, \dots, T_n)$.

Tropicalisation.

$\mathbb{P}_m \simeq W \subset \mathbb{P}_n \qquad W - \bigcup V_j = W \cap \mathbb{G}_m^n \subset \mathbb{G}_m^n = \mathbb{P}_n - \bigcup_j H_j$

Le complémentaire de l'arrangement d'hyperplans a une tropicalisation naturelle $\mathcal{T}_W$

Théorème $I \subset K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ idéal de $W \cap \mathbb{G}_m^m$ dans $\mathbb{G}_m^n$
I^h idéal homogène associé (celui de W)

a) Les formes affines $f_C(1, T_1, \dots, T_n)$ $(T_0 = 1)$, pour C circuit, constituent une base tropicale de l'idéal I.

b) Un point $x \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\mathcal{T}_W$ si et seulement si $in_x(f_C)$ n'est une indéterminée pour aucun circuit C.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les formes initiales $in_x(f_C)$ engendrent l'idéal initial $in_x(I)$

(les f_C constituent une base de Gröbner universelle pour I).

a) $\Leftrightarrow$ b) par la définition d'une base tropicale

$f_c \in I \leadsto$ si $in_x(f_c)$ est un monôme, $x \notin \mathcal{C}_W$.

<u>réciproque</u> ?

Rappel : on sait que $in_x(I^h)$ a même fonction de Hilbert que I^h

$\leadsto in_x(I^h)$ contient $n-m$ formes linéaires indépendantes

$\to I^h$ contient $n-m$ formes linéaires $f_1, \dots, f_{n-m}$

tq $in_x(f_1), \dots, in_x(f_{n-m})$ sont indépendants.

$$in_x(I^h) \supset \mathcal{I}(W_x) \qquad W_x = V(in_x(f_1), \dots, in_x(f_{n-m})) \simeq \mathbb{P}_m$$

$$\Rightarrow in_x(I^h) = \mathcal{I}(W_x)$$

(comparaison des fonctions de Hilbert)

en particulier, $in_x(I^h)$ est un idéal premier

$x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{C}_W \Rightarrow in_x(I^h)$ contient un monôme

$\Rightarrow in_x(I^h)$ contient une indéterminée, car c'est un idéal premier.

On avait démontré que si un monôme appartient à $in_X(I^h)$ c'est une forme initiale.

$\rightsquigarrow$ il existe une forme linéaire $f \in I^h$ tq $in_X(f)$ est une indéterminée.

($f = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i$ $\quad f|W \equiv 0$, $\quad (x_0 = 0)$

$in_X(f)$ est une indéterminée)

$\tau_f(X) = \sup(\log|a_i| + x_i)$ est atteint en un seul i)

On en choisit une telle que $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(f))$ est minimal.

Changement de coordonnées. $in_X(f) = T_0$.

$\tau_f(X) = 0$

$$f = T_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i T_i \qquad \log|a_i| + x_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Soit C un circuit contenu dans $\mathrm{supp}(f)$

$f_C = \sum_i b_i T_i$ $\quad$ On suppose $\sup_i (\log|b_i| + x_i) = 0$

On choisit i tel que $\log|b_i| + x_i = 0$.

et on pose $f' = f - \frac{a_i}{b_i} f_C \in I^h$

?? $\mathrm{supp}(f') \subset \mathrm{supp}(f) - \{i\}$

$$\tau_{f'}(x) = \sup\Big(\sup_{1\le j\le n}\big(\underbrace{\log\big|a_j - \frac{a_i}{b_i} b_j\big| + \log|x_j|}_{<0\ (?)}\big),\ \underset{0}{\cancel{\log\big|1-\frac{a_i}{b_i}\big|}}\Big)$$

f' vérifie les mêmes hypothèses que f
mais son support a décru

$\Rightarrow f' = 0$

$\therefore$ f est multiple d'une forme f_C. □

Autre description - Éventail de Bergman

On suppose que la valeur absolue de K est triviale.

Plats du matroïde

(M matroïde, $A \subset M$ $\langle A \rangle = \{ i \in M \mid rg(A \cup \{i\}) = rg(A) \}$.

plats, ensembles de la forme $\langle A \rangle$.

F plat $\iff \forall i \in M - F,\ rg(F \cup \{i\}) > rg(F)$)

ici : $i \in \langle A \rangle \iff \exists f = \sum a_j T_j \quad f|_W \equiv 0$

$\{i\} \subset \mathrm{supp}(f) \subset A \cup \{i\}$
$(a_i \neq 0)$

$f_j = T_j|_W$

$f_i \in \mathrm{vect}(f_j, j \in A)$

$W_i \supset \bigcap_{j \in A} W_j$

$Q \subset P$ sous espace projectif (éventuellement vide)
plat $F_Q = \{ i \mid W_i \supset Q \}$.

$Q = \emptyset \qquad F_Q = M$
$Q = P \qquad F_Q = \emptyset$

M matroïde sur $\{0, \dots, n\}$.
plats
drapeaux de plats = suites $F = (F_0, \dots, F_{s+1})$ de plats
tels que : $\emptyset = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_s \subsetneq F_{s+1} = \{0, \dots, n\}$)

drapeau $F \rightsquigarrow$ cône $C_F \subset \mathbb{R}^{n+1}$
$= \text{cone}\,(\underset{\substack{\| \\ e_{F_0}}}{0}, e_{F_1}, \dots, e_{F_s}, \mathbb{1} = e_{F_{s+1}})$

e_I = vecteur $\sum_{i \in I} e_i$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ $(e_0, \dots, e_n)$ base canonique

$x \in C_F \iff x_i$ est constant sur $i \in F_r - F_{r-1}$
et $\geq x_j$ si $j \in F_{r-1}$.

<u>Lemme</u> Si le drapeau F' raffine le drapeau F, on a $C_{F'} \supset C_F$
et C_F est même une <u>face</u> de $C_{F'}$.

Ces cônes $\Sigma(\mathcal{A})$ forment un <u>éventail</u> dans $\mathbb{R}^{n+1}$

Théorème : $\mathcal{T}_W \underset{(?)}{=} |\Sigma(\mathcal{A})|$

(valuation triviale)

Exemple en exercice : droite $(x_0+x_1+x_2=0)$ dans $\mathbb{P}_2$