Jeudi ~~13~~ 15 avril.

Fin du chapitre 5 des notes :

tropicalisation des sous espaces projectifs P de $\mathbb{P}_n$

$\Leftrightarrow$ bases de Gröbner $\longleftrightarrow$ circuits du matroïde associé à l'arrangement
—— tropicales d'hyperplans induit sur P
par les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{P}_n$.

$\Leftrightarrow$ éventail de Bergman (cas de valeur absolue triviale)
associé au matroïde via les drapeaux de plats.

Grassmanniennes G_{pn}
variétés algébriques qui paramètrent les sous espaces vectoriels P de dimension p
dans k^n (ou e.v. V de dim n)

cas triviaux : $p=0$ ou $p=n$ $\quad G_{0n} = G_{pn} = \mathrm{Spec}(k)$ (point)
$P = \{0\}$ $\quad P = V$

Cas élémentaires $p=1$

droite de $k^n = V$

$\Leftrightarrow$ vecteur non nul à scalaire près

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(V)$ espace projectif de dimension $n-1$

$p = n-1$

hyperplan de k^n

$\Leftrightarrow$ équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ à scalaire près

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}_{n-1} \ni [a_1 : \cdots : a_n]$

Dualité : $P \subset V \longleftrightarrow P^\perp \subset V^*$

$\dim(P) = p$

$\{ f \in V^* \text{ tq } f|_P = 0 \}$

$\dim(P^\perp) = n-p$

$$G_p(V) = G_{n-p}(V^*)$$

$$G_{p,n} \simeq G_{n-p,n}$$

Construction de cette variété $G_{p,n}$. $V = k^n$

$P \subset V$ $\dim(P) = p$

$\Leftrightarrow$ $P = \text{vect}(v_1, \dots, v_p)$ $(v_1, \dots, v_p)$ base de P

$\Leftrightarrow$ matrice $n \times p$ A_P

$$A_P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \updownarrow n$$

$\xleftrightarrow{}$ p

$rg(A_P) = p$

$I \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal p

tq A_P^I (matrice extraite) est de rang p

$\Leftrightarrow$ inversible.

$A'_P = A_P \cdot (A_P^I)^{-1}$ a même image que A_P

définit le même sous espace vectoriel.

les lignes d'indice $i \in I$ de A'_P sont déterminés $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

les autres lignes sont arbitraire

$\Rightarrow$ espace affine de dim $(n-p)p$

$\mathbb{A}^{(n-p)p} \simeq U_I$ sous espace de G_{pn} qui correspond aux sev P de dim p

qui sont l'image d'une matrice A_P tq $rg(A_P^I) = p$.

$I, J \subset \{1, \dots, n\}$ card (I) = card $(J) = p$

$U_I \cap U_J$ est un ouvert (de Zariski) de U_I et de U_J

$I = \{1 \dots, p\}$ $\left(\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \boxed{\quad * \quad} \end{array} \right) \ni A$ tq $\underbrace{\det(A^J)}$ $\neq 0$

polynôme en les coefficients $(*)$
sur l'espace affine $\mathbb{A}^{(n-p)p}$.

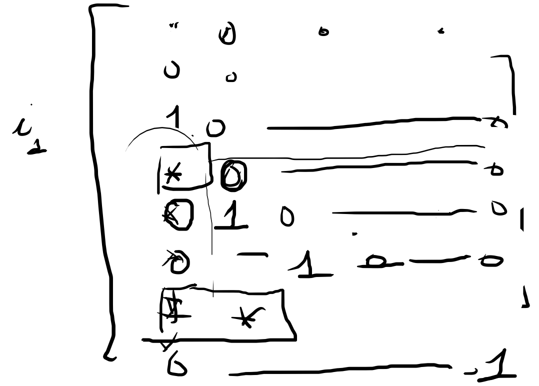
Recollement de ces espaces affines U_I
le long des $U_I \cap U_J$

Fournit $G_{p,n}$.

<u>Théorème</u> : Cette variété $G_{p,n}$ résout le problème de paramétrer les sous espaces de dim p de k^n.

a) Pour tout corps $K \supset k$, on a une bijection
$$G_{pn}(K) \leftrightarrow \{\text{sous espaces de dim } p \text{ de } K^n\}$$
b) Pour tout schéma S et toute famille $\mathcal{P} \subset \mathbb{A}^n_S$
de sous espaces de dim p $\left| \begin{array}{l} \mathcal{P} \to S \text{ morphisme plat} \\ \mathcal{P}_s \subset \mathbb{A}^n_{k(s)} \text{ sev. de dim } p \end{array} \right)$
il existe ! $f : S \to G_{pn}$ tq $\mathcal{P}_s = f(s)$ $\forall s$

<u>Remarque</u> La théorie des formes réduites échelonnées par colonnes entraîne une décomposition de $G_{p,n}$



les lignes de pivots $i_1, \dots, i_p$ sont bien définies et les coeff. restants <u>aussi</u>.

(<u>unicité</u> de la f.r.e.c.

$M_{n,p}(K) \circlearrowleft GL_p(K)$

chaque orbite contient une matrice en f.r.e.c et une seule)

$P \leftrightarrow I = \{i_1 < \dots < i_p\}$

$\leftrightarrow$ a_{ij} connus $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$
nuls si $\begin{pmatrix} i > i_k \\ j \geq k \end{pmatrix}$
reste certains

$$G_{p,n} = \coprod_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \mathrm{card}(I) = p}} \mathbb{A}^{n(I)}$$

$n(I) \leq p(n-p)$
égalité si $I = \{1, \dots, p\}$

(décomposition de Bruhat)

$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \amalg \mathbb{A}^{n-1} \amalg \dots \amalg (pt)$

Théorème | G_{pn} est propre, lisse, connexe de dimension $p(n-p)$.

- lisse $\leftrightarrow$ recollement d'espaces affines de dim $p(n-p)$ de dim $p(n-p)$
- connexe $\leftrightarrow$ ces espaces affines s'intersectent deux à deux.
- propre vérification du critère valuatif de propreté.

K corps des fractions d'un anneau de valuation (discrète) R
$W \subset K^n$ sev de dim p
$\leftrightarrow$ $A \in M_{n,p}(K)$ $\quad W = \mathrm{im}(A)$

$\rightsquigarrow$ remplacer A par $A' = AU$ $\quad U \in GL_p(K)$
de sorte que $A' \in M_{n,p}(R)$
A' mod $\mathfrak{m}$ est de rang p.]

$I \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal p
tq $v(\det(A^I))$ est minimale
$U = (A^I)^{-1}$ $\rightsquigarrow$ $A^I = I_p$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & \boxed{*} & \end{pmatrix}$
échanges de lignes $I = \{1, \dots, p\}$ $\quad v(\det(A^J)) \geq 0$ si $J \subset \{1, \dots, n\}$ $\operatorname{card}(J) = p$.

Cela fournit une variété « abstraite »
Elle est en fait projective — coordonnées de Plücker
— relation de Plücker

$P \subset k^n$
$A \in M_{np}(k)$ $rg(A) = p$
$\rightsquigarrow$ $\det(A^I)$ pour $I \in \mathcal{P}_p(n)$ = parties de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal p.

$A' = AU$ $U \in GL_p(k)$ $A'^I = A^I \cdot U$.
$\det(A'^I) = \det(A^I)\underline{\det(U)}$

$[\det(A^I), I \in \mathcal{P}_p(n)]$ est la famille de coordonnées homogènes d'un point $\pi(P)$ de $\mathbb{P}_{\binom{n}{p}-1}$

$\pi : G_{p,n} \longrightarrow \mathbb{P}_{\binom{n}{p}-1}$

Théorème π est une immersion fermée.

Relations de Grassmann

générateurs de l'idéal de $\pi(G_{pn})$ dans $\mathbb{P}_{\binom{n}{p}-1}$

coordonnées homogènes T_I $\qquad I \in \mathcal{P}_p(n)$

signes

- $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ $\qquad j_1 < \dots < j_q$

  $e_J = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$

  $k \notin J$ $\qquad e_{J \cup \{k\}} = \varepsilon_{J,k}\, e_k \wedge e_J$

- $K = \{j_1, \dots, j_q\}$

  $k \in K$ $\qquad e_K = \varepsilon_K^k\, e_k \wedge e_{K-\{k\}}$

- $k \in K - J$ $\qquad \varepsilon_{KJ}^k = \varepsilon_{J,k}\, \varepsilon_K^k$

$$(R_{K,J}) : \sum_{k \in K-J} \varepsilon_{KJ}^k\, T_{J \cup \{k\}}\, T_{K-\{k\}}$$

$\mathrm{Card}\,(K) = p+1$ $\qquad \mathrm{Card}\,(J) = p-1$.

- $\mathrm{Card}\,(K-J)$ termes
- si $\mathrm{Card}\,(K-J) = 2$

  $K = J \cup \{k_1, k_2\}$

  relation triviale

  $T_{Jk_1} T_{Jk_2} - T_{Jk_2} T_{Jk_1}$

Exemple $G_{2,4}$ premier cas non trivial
une seule relation (due à Plücker)

$\dim(G_{2,4}) = 4$

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_2(4)) = \binom{4}{2} = 6$

$\pi : G_{2,4} \hookrightarrow \mathbb{P}_5$

image : hypersurface

coordonnées T_{12} T_{13} T_{14} T_{23} T_{24} T_{34}

$$\boxed{T_{12} T_{34} - T_{13} T_{24} + T_{14} T_{23}}$$

Pour $G_{p,n}$ $J = S \cup \{a\}$ $\mathrm{Card}(J \Delta K) = 4$

$K = S \cup \{b, c, d\}$

$$T_{abS} T_{cdS} - T_{acS} T_{bdS} + T_{adS} T_{bcS} \pm$$

si $n-2 > p > 2$ les relations à trois termes n'engendrent pas l'idéal de $\pi(G_{pn})$.

Tropicalisation de la grassmannienne $\pi(G_{pn}) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\binom{n}{p}-1}$

(on ne notera plus $\pi(\;\;)$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^{\binom{n}{p}-1} & \subset & \mathbb{P}_{\binom{n}{p}-1} \\ \cup & & \cup \\ G'_{pn} & \subset & G_{pn} \end{array}$$

tore où toutes les coord. homogènes sont $\neq 0$

$G'_{pn} = \{ P \in G_{p,n} \mid \pi_I(P) \neq 0 \}$

$\pi_I(P) = \det(A^I)$

si $P = \operatorname{im}(A)$

Prop. l'idéal de $G'_{pn} \subset k[(T_I^{\pm 1})]$ est engendré par les relations à trois termes.

G_p^n a une action de $\mathbb{G}_m^n \circlearrowright \mathbb{A}^n$ $\quad (t_1,\dots,t_n)\cdot(x_1,\dots,x_n)=(t_1x_1,\dots,t_n x_n)$

$P \subset k^n$

$t\cdot P = \{ t\cdot x, \, x \in P\}$ est un sous espace de dim p

$P = \mathrm{im}(A)$

multiplication à gauche par la matrice diagonale $\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$

$$\pi_I(t\cdot P) = \prod_{i\in I} t_i \quad \pi_I(P)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m^n \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\lambda"'] & \mathbb{G}_m^{\binom{n}{p}} \arrow[d, bend left, "\lambda"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}
\end{tikzcd}$$

$t \longmapsto \left(\prod_{i\in I} t_i\right)_{I \in \mathcal{P}_p(n)}$

tropicalisation

$\log|\cdot|$

$x \longmapsto \left(\sum_{i\in I} x_i\right)_I$

affine.

<u>Prop.</u> $\lambda(G'_{pn})$ est un sous espace polyédral purement de dim $p(n-p)$ de $\mathbb{R}^{\binom{n}{p}}/\mathbb{R}\mathbb{1}$ $\quad \mathbb{1}=(1,\dots,1)$

sous sous espace de linéalité et $\varphi(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\mathbb{1}$, de dim $n-1$.

Exemple $\quad G_{2,4} \quad T_{12}T_{34} - T_{13}T_{24} + T_{14}T_{23} = 0.$

$$(t_1,t_2,t_3,t_4) \cdot [T_{12} : T_{13} : T_{14} : T_{23} : T_{24} : T_{34}]$$

$$= [t_1t_2T_{12} : t_1t_3T_{13} : t_1t_4T_{14} : t_2t_3T_{23} : t_2t_4T_{24} : t_3t_4T_{34}]$$

choix de $t_1 = 1$

$t_2 \to T_{12} = 1$

$t_3 : T_{13} = 1$

$t_4 : T_{14} = 1$

$$[1 : 1 : 1 : T_{23} : T_{24} : T_{34}]$$

polynôme tropical $\quad \sup(x_{34}, x_{24}, x_{23}).$

3 cônes de dim 4.

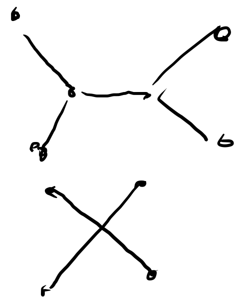
Remarque 1) On ne connaît pas la tropicalisation de toutes les grassmanniennes.

• elle dépend de la caractéristique du corps.

2) Cas connu en détail $G_{2,n}$

$\updownarrow$ classification des arbres phylogénétiques

Ardila - Klivans

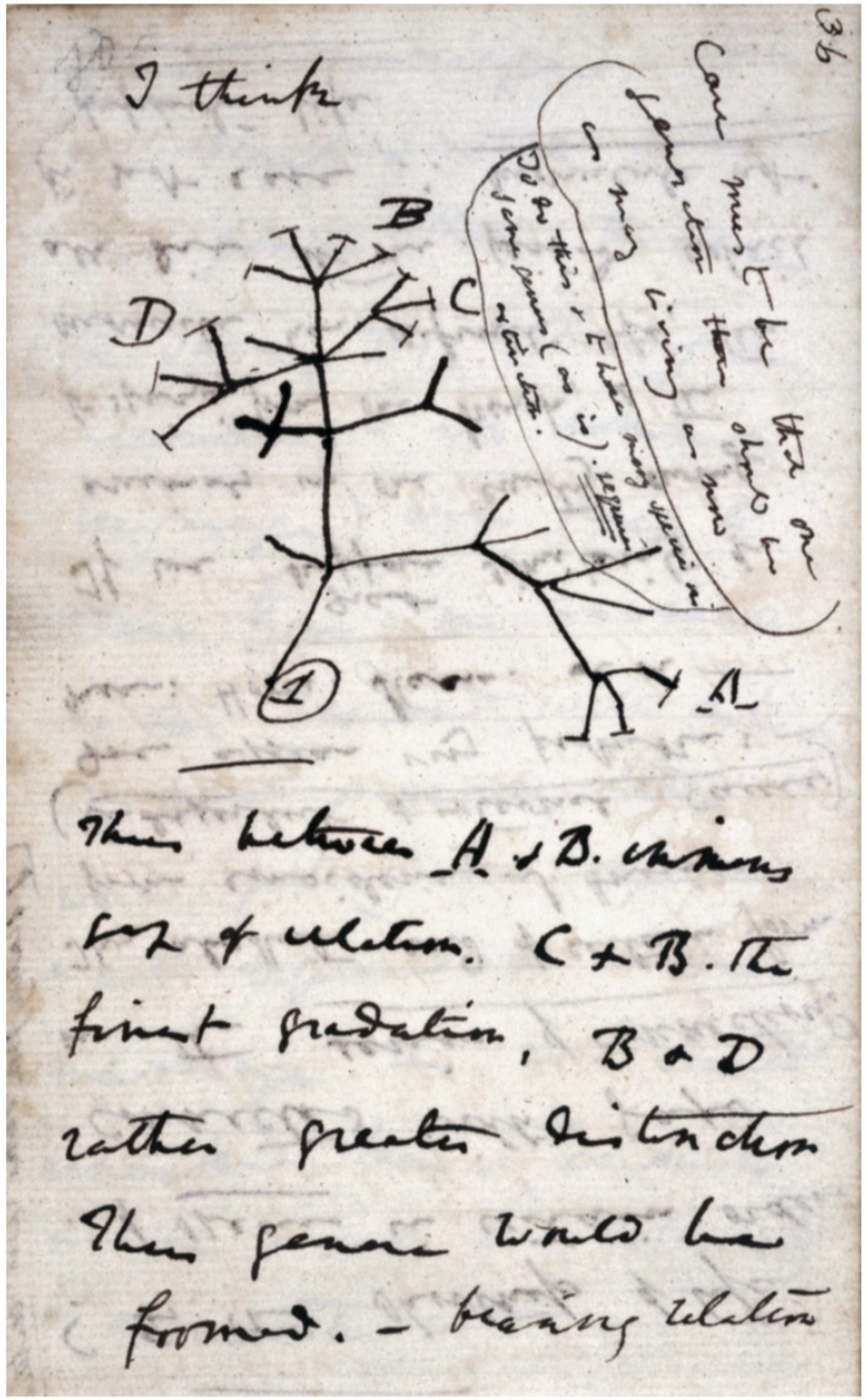


$\lambda(G'_{2n}) \leftrightarrow$ espace des arbres phylogénétiques à n feuilles.

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)$ cônes de dim $2n-3$

même espace de linéarité L de dim n

chacun de ces cônes est engendré par $(n-3)$ vecteurs linéairement indép. mod L.



The handwritten text reads:

"I think case must be that one generation should have as many living as now. To do this and to have as many species in same genus (as is) requires extinction . Thus between A + B the immense gap of relation. C + B the finest gradation. B+D rather greater distinction. Thus genera would be formed. Bearing relation [to ancient types with several extinct forms]"

FIGURE 1. Evolutionary tree, Charles Darwin, 1837. (Picture taken from Wikipedia, *Tree of life*).

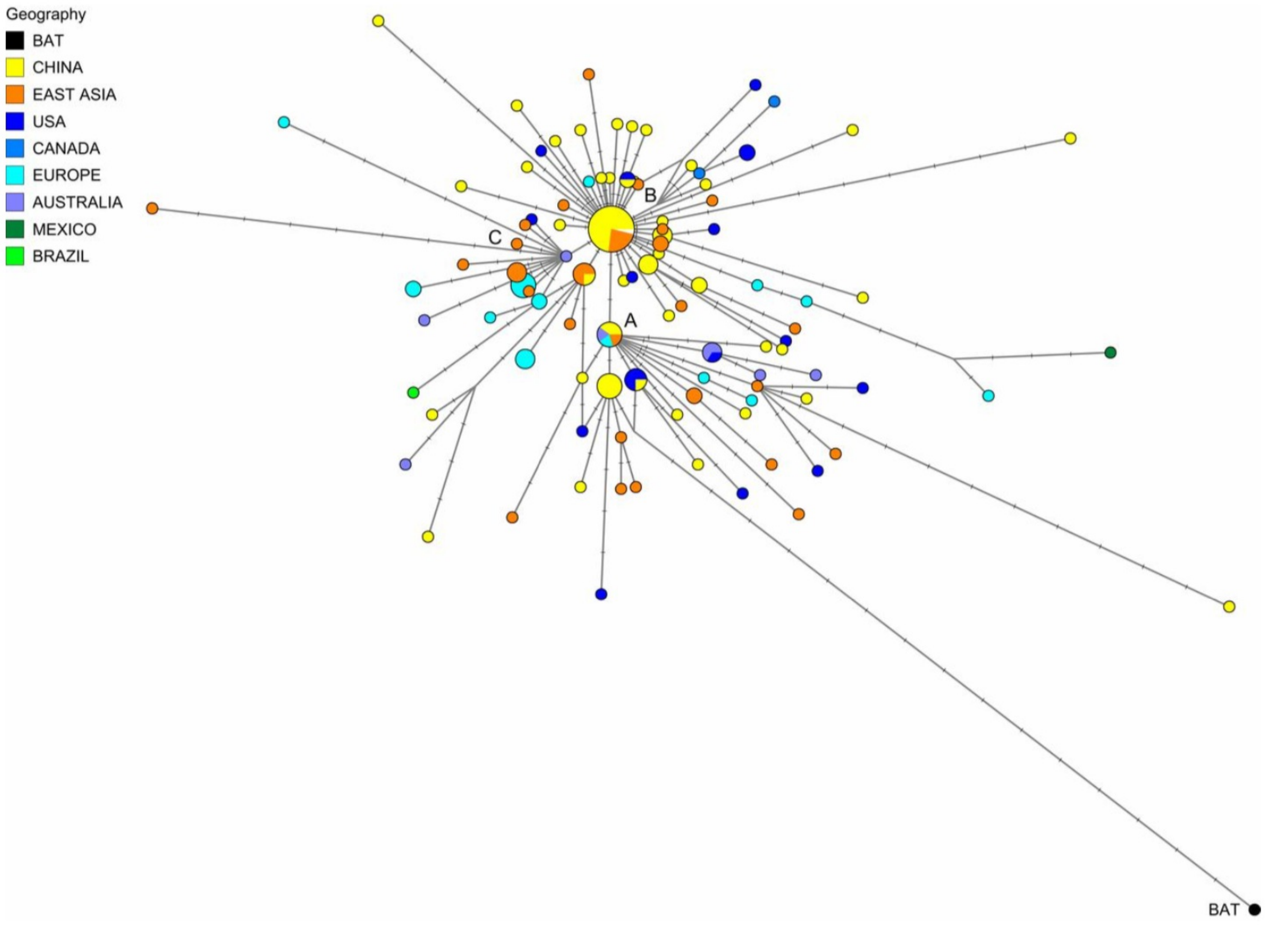


Figure 2. This picture, taken from Forster *et al* (2020), represent the phylogenetic tree of 160 SARS-CoV2 genomes. The initial "bat" virus is on the bottom right.

Généralisation de ces grassmanniennes tropicales

Matroïdes valués

$$\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_p \end{array} \begin{bmatrix} \square \\ A \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$I := (i_1, \dots, i_p)$

$\det(A^I) \neq 0 \iff (f_{i_1}, \dots, f_{i_p})$ est une base de $(k^p)^*$

$\iff v(\cancel{\det(A^I)})$ $|\det(A^I)|$

Déf. Une valeur absolue sur un matroïde M est une application $p : \mathcal{B}_M \to \mathbb{R}_+^*$ $\quad [\mathcal{B}_M$ = bases de $M]$ telle que

pour toutes bases $B, B' \in \mathcal{B}_M$, pour tout $x \in B - B'$,

il existe $y \in B' - B$ tq

(1) $(B - \{x\}) \cup \{y\}$ est une base de M

(2) $(B' - \{y\}) \cup \{x\}$ est une base de M

[renforcement de l'axiome des bases d'un matroïde]

(Brualdi)

(3) $p(B)\, p(B') \leq p((B - \{x\}) \cup \{y\})\; p((B' - \{y\}) \cup \{x\})$

Exemple $\quad P \subset k^n \qquad A \in M_{pn}(k) \qquad P = \operatorname{im}(A)$

$(k^p)^* \ni f_1, \dots, f_n$ lignes de A

$\leftrightarrow$ matroïde M $\qquad \leftrightarrow$ arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}$

$P \cap$ (hyperplans de coordonnées).

bases de M $\leftrightarrow I = (i_1, \dots, i_p)$ tq $(f_{i_1}, \dots, f_{i_p})$ est une base de $(k^p)^*$

$$\rho(B) = \left| \det \left(\begin{bmatrix} f_{i_1} \\ \vdots \\ f_{i_p} \end{bmatrix} \right) \right| = |\det(A^I)| = |\pi_I(A)|$$

On déduit des relations de Grassmann que cela fournit une valeur absolue sur M.

(M, ρ) matroïde valué

$\rightsquigarrow$ point dans $\mathbb{R}^{\mathcal{B}_M}$ $\qquad (\log \rho(B))_{B \in \mathcal{B}_M}$

(A. Dress)

Déf. Le dressien d'un matroïde M $\mathcal{D}r_M$
est l'ensemble des valeurs absolues sur M.

tropicalisation : $p \longmapsto \left(\log |p(B)|\right)_{B \in \mathcal{B}_M}$

$$\mathcal{D}r_M \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{B}_M}$$

Prop : son image est le support d'un éventail de $\mathbb{R}^{\mathcal{B}_M}$

Définition de « sous espace linéaire tropical » $L(M,p) \subset \mathbb{R}^M$
$(M,p) \in \mathcal{D}r_M$

qui généralisent
les tropicalisations d'arrangements d'hyperplans / éventails de Bergman
(y compris quand la valeur absolue est non triviale)