Structures supplémentaires que possèdent les tropicalisations (les amibes non archimédiennes)

K corps valué

$I \subset K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ $\qquad X = V(I) \subset \mathbb{G}_m^n$

$\rightsquigarrow \mathcal{T}_X \subset \mathbb{R}^n$

- sous-ensemble polyédral (Γ-strict, $\mathbb{Q}$-rationnel) de dimension $\dim(X)$
- décomposition « de Gröbner » $\mathcal{C}$ fournie par les idéaux initiaux $\mathrm{in}_x(I^h)$ de l'idéal homogène $I^h \subset K[T_0, \dots, T_n]$

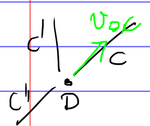
N'importe quel sous ensemble n'apparaît pas ainsi

condition d'équilibre — totale concavité

(X équidimensionnel, $\dim(X) = d$)

1) Pour toute cellule (maximale) C de $\mathcal{T}_X$, on définit une multiplicité $\mathrm{mult}_{\mathcal{T}_X}(C) \in \mathbb{N}^*$ ($\dim C = d$)

2) Pour toute cellule D de dimension $d-1$, on peut écrire la condition d'équilibre en D :



$D \subset C$ $\qquad C$ cellule de dimension d dont D est une facette

$\mathrm{cone}(C - D) = \mathbb{R}_+(y - x) \qquad y \in C,\ x \in D$

$= V_D + \mathbb{R}_+ v_{D,C} \qquad v_{D,C} \in V_C$ bien défini à scalaire et modulo V_D près

V_D dirige $\langle D \rangle$

V_D, V_C

Déterminer un vecteur $v_{D,C}$ privilégié :

C cellule de $\mathcal{C}$, V_C est un sous espace $\mathbb{Q}$-rationnel de $\mathbb{R}^n$

$V_C \supset L_C = \mathbb{Z}^n \cap V_C$ réseau de V_C $\simeq \mathbb{Z}^{\dim(C)}$

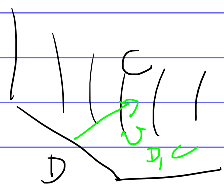
[revient à dire que V_C a une base dans $\mathbb{Q}^n$, ou dans $\mathbb{Z}^n$]

$D \subset C$ $\qquad \mathbb{Z}^{d-1} \simeq L_D \subset L_C \simeq \mathbb{Z}^d$

$d = \dim(C)$ $\qquad L_C / L_D \simeq \mathbb{Z}$ (sans torsion) $\qquad L_D$ est saturé dans L_C

$d-1 = \dim(D)$ $\qquad v \in L_C$, $k v \in L_D \Rightarrow v \in V_D$) $v \in L_D$

$v \in \mathbb{Z}^n$



$v_{D,C}$ modulo V_D est l'unique vecteur de L_C / L_D qui est dirigé vers C et primitif.

Condition d'équilibre en D:

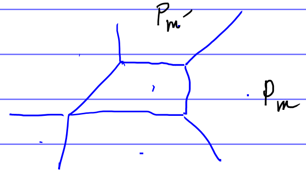
$$\sum_{\substack{C \supset D \\ \dim(C) = d \\ C \in \mathcal{C}}} \mathrm{mult}_{\mathcal{C}_X}(C) \cdot v_{D,C} \in V_D$$

Cas des hyper ces, éventuellement des courbes planes

$f \in \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ $\qquad n = 2$

$I = (f) \qquad X = V(f)$

$f = \sum_{m \in S(f)} c_m T^m \qquad NP_f = \mathrm{conv}(S(f))$ polytope de Newton



$\tau_f(x) = \sup_{m \in S(f)} (\log|c_m| + \langle m, x\rangle)$ polynôme tropical

. affine par morceaux

. convexe (sup. de fonctions convexes)

$P_m = \{x \mid \tau_f(x) = \log|c_m| + \langle m, x\rangle\}$ polyèdre convexe

(défini par $\log|c_m| + \langle m, x\rangle \geq \log|c_{m'}| + \langle m', x\rangle$ pour tout m')

$x \in \mathbb{R}^n \qquad S_x(f) = \{m \in S(f) \mid \tau_f(x) = \log|c_m| + \langle m, x\rangle\}$

$NP_{f,x} = \mathrm{conv}(S_x(f))$ — polytope de Newton de $\mathrm{in}_x(f)$

Prop. Ces $NP_{f,x}$ constituent, quand x varie, une décomposition polyédrale de NP_f.

déc. polyédrale : - ensemble fini de polyèdres,
- stable par l'opération face.
- si deux se rencontrent, leur intersection est une face de chacun d'eux
- réunion : NP_f.

(Ce qu'on est en train de dire pour une amibe non archimédienne vaut pour l'épine d'une amibe archimédienne, en remplaçant $\tau_f(x)$ par la fonction de Passare-Rullgård $S_f(x)$)
($f \rightsquigarrow$ fonction de Ronkin R_f
affine sur chaque composante convexe de $\complement\mathcal{A}_f$
$\rightsquigarrow S_f$)

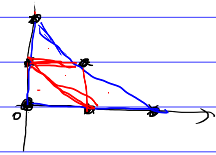
Exemple (Maclagan-Sturmfels, ex. 3.1.8, p. 100)
$K = \mathbb{C}(t)$ (ou $K = \mathbb{C}((t))$ séries formelles ou $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ séries convergentes)

valuation : ordre en 0

$|f| = \exp(-\mathrm{ord}_0(f))$
$= \exp(-m)$

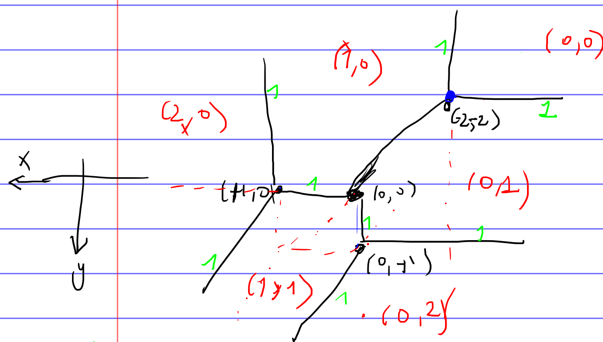
$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \cdots$
$a_m \neq 0$, $a_n = 0$ si $n < m$

$$f = 3t\,X^2 + 5\,XY - 7t\,Y^2 + 8\,X - Y + t^2$$



$$\tau_f(x,y) = \sup\left(-1+2x,\ x+y,\ -1+2y,\ x,\ y,\ -2\right)$$

Cette décomposition est « duale » de celle de l'amibe.



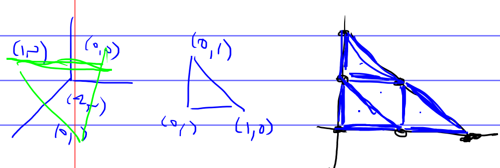
NB. si $\tau_f(x) = \log|c_m| + \langle m, x\rangle > \log|c_{m'}| + \langle m', x\rangle$ pour $m' \neq m$

$$f(T) = c_m T^m \left(1 + \sum_{m'\neq m} \frac{c_{m'}}{c_m} T^{m'-m}\right)$$

si $\lambda(z) = x$ $\quad \left|\frac{c_{m'}}{c_m} z^{m'-m}\right| < 1.$

au voisinage de z

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{c_m T^m}$$ (série de Laurent convergente et de module 1)



$X=(-2,-1)$: -5 -4 -5 $\underline{-2}$ $\underline{-2}$ $\underline{-2}$

Passare - Rullgård Définition d'une dualité entre deux déc. polyédrales

$\mathcal{P}$ polyèdres $\mathcal{P}'$ (de $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{C}$ décompositions $\mathcal{C}'$

$C \xleftrightarrow{\text{bijection}} C^*$

$D \subset C \Longleftrightarrow D^* \supset C^*$

$\mathbb{R}_+(C-D) = \text{cone}(D, C)$ $\qquad$ $\text{cone}(C^*, D^*) = \mathbb{R}_+(D^* - C^*)$

$\{t(x'-x),$
$x' \in D,$
$x \in C,$
$t \geq 0\}$

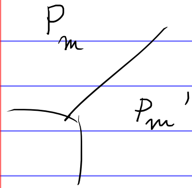
$\text{cone}(C^*, D^*) = \text{cone}(D, C)^\circ$
$= \{y \mid \langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \text{cone}(D,C)\}$

cone convexe polyédral

$\text{cone}(D, C) = \text{cone}(C^*, D^*)^\vee$
$= \{x \mid \langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in \text{cone}(C^*, D^*)\}$

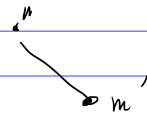
Par cette dualité, • les cellules de dim n de $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ sommets $m \in \mathcal{S}(f)$



• les cellules de dim $n-1$

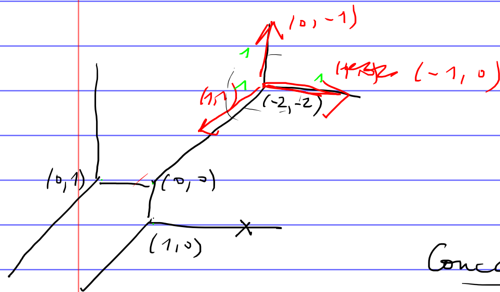
$\Leftrightarrow$ arêtes $[m, m']$



• les cellules de dim $n-2$

$\Leftrightarrow$ cellules $\mathrm{conv}(m_1, \dots, m_r)$ de dim 2.

Si $C \subset \mathcal{C}_f$ est une cellule de dim $n-1$, correspondant à une arête $[m, m']$ (deux cellules P_m et $P_{m'}$ bordent C) la multiplicité de C est la longueur entière de cette arête, le pgcd des coordonnés de $m'-m$.



$0 = 1\,(0,-1) + 1\,(-1,0) + 1\,(1,1)$

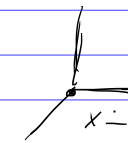
Concavité totale :

$x \in \mathcal{C}_f$

$\mathrm{Star}_x(\mathcal{C}_f)$

= cone engendré par $(\mathcal{C}_f - x) \cap W$

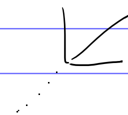
W vois. de 0 dans $\mathbb{R}^n$.



$\mathrm{conv}\ \mathrm{Star}_x(\mathcal{C}_f) = \mathbb{R}^2$

plus généralement un sous espace vectoriel

localement, une amibe non archimédienne ne peut pas ressembler à



(trace tropicale du principe du maximum en analyse complexe / géométrie non archimédienne) cette dualité est donnée par :

$C \subset \mathbb{R}^n$
cellule

$$C = C_x \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad \longleftrightarrow \quad S_x = \{ m \in S(f) \,,\ \tau_f(x) = \log|c_m| + \langle m, x \rangle \}$$

$$C \longrightarrow \mathrm{conv}(S_x) = NP_{f,x} = Q$$

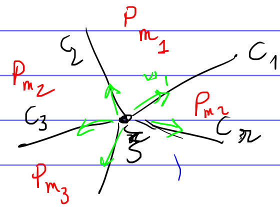
$$\{ x \,/\, \mathrm{conv}(S_x) = Q \} \longleftarrow Q$$

$$(S_x(f) = S_{x'}(f))$$

Démonstration de la condition d'équilibre (hypersurfaces)

courbes planes.

$D = \{\xi\}$ $\qquad L_\xi = \{0\}$.



$$P_m = \{x \mid \tau_f(x) = \log|c_m| + \langle m, x\rangle\}$$

Comme on est en (co)dimension 2, on peut ordonner $m_1, \dots, m_r = m_0$ cycliquement de sorte que $C_i = P_{m_i} \cap P_{m_{i-1}}$

$v_i \in L_{C_i} / L_\xi \ (\simeq \mathbb{Z})$ qui « rentre » dans C_i primitif (modulo L_ξ)

équation de la droite $\langle C_i \rangle$: $\log|c_{m_i}| + \langle m_i, x\rangle = \log|c_{m_{i-1}}| + \langle m_{i-1}, x\rangle$

$$\langle m_i - m_{i-1}, x\rangle + \log(|c_{m_i}| / |c_{m_{i-1}}|) = 0$$

$rot_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad rot_{\pi/2}(v_i) = \lambda\,(m_i - m_{i-1})$ $\qquad \lambda$ scalaire > 0

$d_i = \operatorname{pgcd}(m_i - m_{i-1})$ $\geqslant 1$ $\qquad \lambda = \dfrac{1}{d_i}$

$$\mathrm{rot}(v_i) = \frac{1}{d_i}(m_i - m_{i-1})$$

$$\mathrm{mult}(C_i) = d_i$$

condition d'équilibre

$$\sum d_i v_i = 0 \pmod{L_\xi}$$

$$\mathrm{rot}(\quad) : \quad \sum d_i \,\mathrm{rot}(v_i) = \sum \cancel{d_i} \frac{1}{\cancel{d_i}}(m_i - m_{i-1}) = 0$$

Une application des méthodes tropicales à la géométrie énumérative (Mikhalkin, ≃ 2000)

Par deux points (généraux) passe une droite (cà $g=0$, $d=1$, $m=2$)

cinq points (généraux) — conique $g=0$ $d=2$ $m=5$

g (genre) $m \geq 1$, d (degré).

Si $m = g + 3d - 1$,
il passe un certain nombre de courbes (irréductibles, nodales) de genre g et de degré d par m points généraux arbitraires

$N(g,d)$ (invariant de Gromov-Witten)

Kontsevich
$$N(0,d) = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1,d_2>0}} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) \cdot N(0,d_1)\, N(0,d_2)$$

(Caporaso-Harris pour $N(g,d)$)

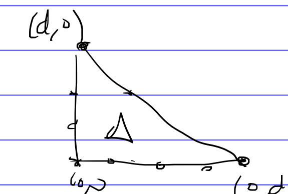
Mikhalkin (→ Gathmann, Markwig)
approche tropicale.

au lieu de compter les courbes ....
il compte les courbes tropicales (courbes non archimédiennes)
qui ont la bonne combinatoire
et passant par m points généraux.

principe de correspondance.

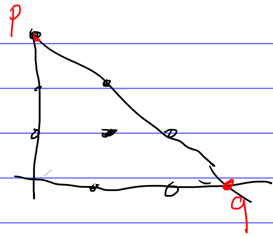
$$N(g,d) = N_{trop}(g,d)$$

($\tilde{\mathbb{C}}$ non archimédien) $C \longrightarrow C_{trop} = \mathcal{A}_C$



Autre formule combinatoire pour $N(g,d)$
plus généralement pour $N(g,\Delta)$ Δ polytope de $\mathbb{R}$ à sommets entiers de $\mathbb{R}^n$ de dim n

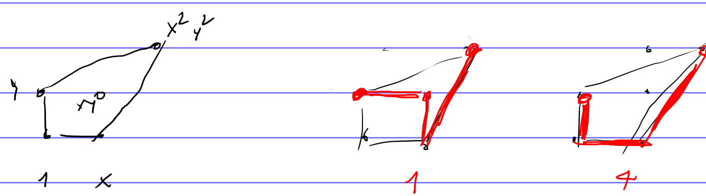
en termes de chemins joignant
deux sommets fixés.

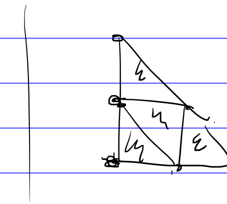


$N(0, \Delta_3) = 12$

$N(0, 3)$

$d = 2$ coniques





- Variétés toriques (un peu)
- Principe de correspondance (patchwork de Viro)

(• combinatoire des chemins ?)

Le cours géométropicale I s'arrête là

- il y aura (dans 10 min) une 3e feuille d'exercices sur la page web du cours.

(ex. 4 est facultatif)
on peut remplacer l'exercice 1 sur la méthode de Newton)
(si vous deviez ne faire qu'un exercice → exercice 3.)

à rendre pour le 8 mars. (tout ou partie)

Merci à vous.