Université de Paris

Préparation à l'agrégation
Année 2022/2023

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercices sur les polynômes d'endomorphismes et la réduction

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Dans chacun des trois cas suivants, déterminer les diagrammes de Young d'un endomorphisme nilpotent vérifiant les conditions indiquées et en déduire qu'ils forment une unique classe de conjugaison. Quel est l'indice de nilpotence ?

1 On a $\dim(\mathrm{E}) = 4$ et $\operatorname{rang}(u^2) = \dim(\mathrm{E}) - 3$.

2 On a $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

3 Si $r = \operatorname{rang}(u)$, on a $u^r \neq 0$.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme nilpotent de E. Extraire d'une base compatible avec le diagramme de Young de u des bases de $\operatorname{Ker}(u^i)$, $\operatorname{Im}(u^j)$ et $\operatorname{Ker}(u^i) \cap \operatorname{Im}(u^j)$

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme nilpotent de E.

1 Décrire le diagramme de Young de u^2 en fonction de celui de u.

2 Pour qu'il existe un endomorphisme v de E vérifiant $u = v^2$, il faut et il suffit que le diagramme de Young de u n'ait pas deux colonnes consécutives de même hauteur impaire.

3 Généraliser les questions précédentes en remplaçant l'entier 2 par un entier $\geqslant 3$.

EXERCICE 4

On suppose que le corps K est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K ; on munit E et $\operatorname{End}(\mathrm{E})$ de sa topologie naturelle.

1 On définit une relation $\preceq$ sur les endomorphismes nilpotents de E en posant $u \preceq v$ si et seulement si $\dim(\operatorname{Ker}(u^n)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(v^n))$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Prouver que c'est une relation réflexive et transitive. Démontrer que $u \preceq v$ et $v \preceq u$ si et seulement si u et v sont conjugués.

Décrire cette condition $u \preceq v$ sur les diagrammes de Young de u et v.

2 Soit (u_k) une suite d'endomorphismes de E qui converge vers un endomorphisme u. Démontrer que $\overline{\lim} \dim(\operatorname{Ker}(u_k)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(u))$.

3 On suppose que les u_k sont nilpotents. Démontrer que $u_k \preceq u$ pour tout k assez grand.

4 Inversement, soit u et v des endomorphismes nilpotents tels que $u \preceq v$. Démontrer qu'il existe une suite (u_k) d'endomorphismes nilpotents de E, tous conjugués à u, qui converge vers v.

EXERCICE 5

Soit E un K-espace vectoriel, soit u un endomorphisme de E, soit λ un élément de K et soit $P \in K[T]$ un polynôme. On suppose que $P(u)$ est un projecteur d'image le sous-espace propre E_λ de u pour la valeur propre λ. Démontrer que le sous-espace caractéristique de u associé au polynôme $T - \lambda$ est égal à E_λ.

EXERCICE 6

Soit A l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et soit E l'espace vectoriel des fonctions de A dans K. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n \colon E \to K$ la projection sur le facteur d'indice n et soit u_n l'endomorphisme de E donné par la multiplication par f_n.

1 Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est un projecteur. En particulier, u_n est diagonalisable à valeurs propres $\{0,1\}$.

2 Soit $f \in E$ un vecteur propre commun à tous les u_n. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \neq a$.

3 Démontrer qu'il n'existe pas de base de E dans laquelle tous les u_n soient simultanément diagonaux.

EXERCICE 7

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1 On suppose que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont simples. Démontrer que le centralisateur de u est égal à $K[u]$.

2 Établir la même conclusion sous l'hypothèse (plus générale) que $M_u = \chi_u$. (*Utiliser que u possède un vecteur cyclique.*)

EXERCICE 8

Soit E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie, soit u un endomorphisme de E, soit v un endomorphisme de F. Soit L l'ensemble des applications linéaires v de E dans F telles que $u \circ v = v \circ u$; c'est un sous-espace vectoriel de $L(E;F)$.

1 On suppose que u possède un vecteur cyclique x. Démontrer que l'application $v \mapsto v(x)$ de L dans F est linéaire, injective, et que son image est le noyau de $M_u(v)$.

2 On suppose que v possède un vecteur cyclique. Démontrer que pour tout polynôme $P \in K[T]$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(P(v))) = \deg(\operatorname{pgcd}(P, M_v))$.

3 On considère une suite $(P_1, \dots, P_r)$ de polynômes et une suite $(x_1, \dots, x_r)$ de vecteurs de E comme dans le théorème de décomposition de Frobenius de u, et de même une suite

$(Q_1, \dots, Q_s)$ de polynômes et une suite $(y_1, \dots, y_s)$ de vecteurs de F comme dans le théorème de décomposition de Frobenius de v. Démontrer que l'on a

$$\dim(L) = \sum_{i,j} \deg(\operatorname{pgcd}(P_i, Q_j)).$$

4 On suppose $E = F$ et $u = v$, de sorte que L est le centralisateur de u dans $\operatorname{End}_K(E)$. Démontrer que l'on a

$$\dim(L) = \sum_{i=1}^{r} (2r - 2i + 1) \deg(P_i).$$

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les classes de conjugaison d'endomorphismes u d'un espace vectoriel de dimension finie n satisfaisant les propriétés indiquées.

1 Le polynôme caractéristique de u est $T^3(T-1)$.

2 Le polynôme minimal de u est $T(T-1)$.

3 On a $(u - \mathrm{id})^2 = 0$.

EXERCICE 10

Soit E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. Soit C_u le centralisateur de u dans $\operatorname{End}(u)$ et soit C'_u le centralisateur de C_u.

1 Démontrer que $K[u] \subseteq C_u \cap C'_u$.

On considère une suite $(P_1, \dots, P_r)$ de polynômes et une suite $(x_1, \dots, x_r)$ de vecteurs de E comme dans le théorème de décomposition de Frobenius de u.

2 Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, démontrer qu'il existe un unique endomorphisme u_i de E tel que $u_i \circ u = u \circ u_i$ et tel que $u_i(x_j) = 0$ pour $1 \leqslant j < r$ et $u_j(x_r) = x_i$.

3 En déduire que $C'_u = K[u]$.

EXERCICE 11

Soit $M \in M_{m,n}(A)$ une matrice à coefficients dans un anneau commutatif A. Pour tout entier r, on note $I_r(M)$ l'idéal de A engendré par les déterminants des sous-matrices de taille r de M.

1 Démontrer que l'on a $I_r(M) = 0$ si $r > \inf(m, n)$ et $I_0(M) = A$.

2 Démontrer que l'on a $I_{r+1}(M) \subseteq I_r(M)$ pour tout $r \in \mathbf{N}$.

3 Soit $P \in M_m(A)$ une matrice carrée ; démontrer que $I_r(PM) \subseteq I_r(M)$, et que l'on a égalité si P est inversible. De même, si $Q \in M_n(A)$ est une matrice carrée, on a $I_r(MQ) \subseteq I_r(M)$, avec égalité si Q est inversible.

4 On suppose que M est une matrice diagonale par blocs (M', M''). Démontrer que l'on a

$$I_r(M) = \sum_{p+q=r} I_p(M') I_q(M'').$$

EXERCICE 12

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E et soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ sa matrice de u dans une base de E.

1 On suppose que u possède un vecteur cyclique. Avec les notations de l'exercice 11, démontrer que $\mathrm{I}_{n-1}(M) = \mathrm{K[T]}$, $\mathrm{I}_n(M - \mathrm{T}I_n) = (\mathrm{M}_u)$ et $\mathrm{I}_{n+1}(M) = 0$.

2 Soit $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_r)$ la suite des facteurs invariants de u, de sorte que $\mathrm{P}_1 | \mathrm{P}_2 | \ldots | \mathrm{P}_r$. Démontrer que $\mathrm{I}_k(M - \mathrm{T}I_n) = (1)$ si $k \leqslant n - r$ et est nul si $k > n$. Si $k = n + 1 - s$, avec $1 \leqslant s \leqslant r$, prouver que $\mathrm{I}_k(M - \mathrm{T}I_n) = (\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_s)$.

3 Déduire de la question précédente un procédé de calcul des facteurs invariants de u.

EXERCICE 13

Déterminer les classes de conjugaison de matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telles que $M^2 = I_n$. (*Le résultat n'est pas le même suivant que la caractéristique de* K *est égale à* 2 *ou non.*)

EXERCICE 14

Soit K un corps.

1 Décrire la décomposition en facteurs irréductibles dans K[T] du polynôme $\mathrm{T}^4 - 1$. (*Il y a trois cas à considérer, suivant que* K *est de caractéristique 2 et, sinon, suivant que* K *contient une racine carrée de* -1 *ou non.*)

2 Déterminer à chaque fois les classes de conjugaison de matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telles que $M^4 = I_n$.

EXERCICE 15

Soit u et v des endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

1 Les endomorphismes u et v sont conjugués.

2 Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{K[T]}$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u))) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u)))$.

3 Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{K[T]}$, on a $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{P}(u))) = \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{P}(v)))$.

4 Pour tout polynôme irréductible $\mathrm{P} \in \mathrm{K[T]}$ et tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dim(\mathrm{I}m(\mathrm{P}(u)^k)) = \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{P}(v)^k))$.

5 Pour tout polynôme irréductible $\mathrm{P} \in \mathrm{K[T]}$ et tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dim(\mathrm{K}er(\mathrm{P}(u)^k)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(v)^k))$.

EXERCICE 16

1 Soit E un K-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

2 On a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$;

3 Il existe $v \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{id}$.

EXERCICE 17

Soit E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$. Soit E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, soit F' un supplémentaire de $\Im(u)$. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F};\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{F}'$, $\Im(v) = \mathrm{E}'$, $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

EXERCICE 18

Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies m et n, soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F};\mathrm{E})$.

1 On suppose que $m = n$ et que v est inversible. Démontrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique. Étendre cette relation lorsqu'on enlève l'hypothèse que v est inversible. (*Si* K *est infini, considérer* $v - \lambda\,\mathrm{id}$*, où* λ *n'est pas une valeur propre de* v*. Dans le cas général,introduire les matrices de* u *et* v *dans des bases de sorte à pouvoir prendre* λ *dans une extension de* K.)

2 Soit $r = \mathrm{rang}(u)$. Démontrer qu'il existe des bases $(e_1, \dots, e_m)$ de E et $(f_1, \dots, f_n)$ de F telles que $u(e_i) = f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $u(e_i) = 0$ si $i > r$.

3 En écrivant la matrice de v dans ces bases, démontrer l'égalité

$$\chi_{v \circ u}(\mathrm{T})\mathrm{T}^q = \chi_{u \circ v}(\mathrm{T})\mathrm{T}^p.$$

EXERCICE 19

Soit K un corps (commutatif) et soit K' une extension de K.

1 Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Démontrer que les facteurs invariants de M coïncident avec ceux de M considérée comme matrice à coefficients dans K'.

2 Soit M et M' deux matrices à coefficients dans K qui sont semblables en tant que matrices à coefficients dans K'. Démontrer qu'elles sont semblables.

3 On reprend la question précédente dans le cas particulier où $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ et $\mathrm{K}' = \mathbf{C}$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice telle que $PMP^{-1} = M'$; notons X et Y ses parties réelles et imaginaires. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X + \lambda Y$ soit inversible. En déduire que M et M' sont conjugués.

EXERCICE 20 (Algorithme de Leverrier et Faddeev)

Soit K un corps de caractéristique nulle et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice carrée à coefficients dans K. On définit des matrices $B_0, \dots, B_{n-1}$ par la formule

$$\mathrm{adj}(\mathrm{T}I_n - A) = B_0\mathrm{T}^{n-1} + \cdots + B_{n-1}.$$

On définit des éléments $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathrm{K}$ par

$$\chi_A(\mathrm{T}) = \det(\mathrm{T}I_n - A) = a_0\mathrm{T}^n + a_1\mathrm{T}^{n-1} + \cdots + a_n.$$

1 Vérifier que $B_0 = I_n$ et $a_0 = 1$.

2 Démontrer l'égalité

$$\chi_A'(\mathrm{T}) = \mathrm{Tr}(B(\mathrm{T})),$$

c'est-à-dire $(n-k)a_k = \mathrm{Tr}(B_k)$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

3 On pose $A_0 = I_n$ et on définit des matrices $A_1, \dots, A_n$ et des éléments $c_1, \dots, c_n$ de K par récurrence en posant

$$c_k = -\frac{1}{k}\operatorname{Tr}(A_k), \qquad A_{k+1} = A\cdot(A_k + a_k I_n).$$

Démontrer que $c_k = a_k$ et $B_k = A_k + a_k I_n$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. (*Algorithme de Leverrier–Faddeev pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice.*)

4 On suppose que $c_n \neq 0$; démontrer que A est inversible et que son inverse est égale à $-B_{n-1}/c_n$.

5 Prouver également que $A_n + a_n I_n = 0$. En déduire une démonstration du théorème de Cayley–Hamilton.