

COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS SUR LES
SCHÉMAS

Antoine Chambert-Loir

Examen final — 23 février 2023 (3 h)

Les exercices sont indépendants. Vous pouvez les résoudre dans un ordre arbitraire.

EXERCICE 1

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, soit $A = (A^p, d_A^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ et $B = (B^p, d_B^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ des complexes dans \mathcal{C} .

- 1 Soit $\varphi = (\varphi^p : A^p \rightarrow B^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une famille de morphismes dans \mathcal{C} . Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose $C^p = C(\varphi)^p = A^p \oplus B^{p-1}$ et on définit $d_C^p : C^p \rightarrow C^{p+1}$ par

$$d_C^p(a, b) = (d_A^p(a), \varphi^p(a) - d_B^{p-1}(b)),$$

pour $a \in A^p$ et $b \in B^{p-1}$.

Démontrer que $(C^p, d_C^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est un complexe si et seulement si φ définit un morphisme de complexes de A dans B .

- 2 On suppose désormais que φ est un morphisme de complexes. Construire une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow B(-1) \rightarrow C \rightarrow A.$$

Démontrer que le complexe C est exact si et seulement si φ est un homomorphisme (c'est-à-dire si, pour tout p , le morphisme φ^p induit un isomorphisme entre objets de cohomologie $H^p(A) \rightarrow H^p(B)$).

EXERCICE 2

Soit X un schéma noethérien séparé. On appelle dimension cohomologique cohérente de X le plus petit entier d tel que $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur X et tout entier $p > d$.

- 1 Justifier l'existence d'un tel entier d . Que signifie pour X l'égalité $d = 0$?
- 2 Pour tout ouvert U de X , on note $\mathcal{N}(U)$ le nilradical de $\mathcal{O}_X(U)$. Démontrer que \mathcal{N} est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux. On note X_{red} le sous-schéma fermé $V(\mathcal{N})$ qu'il définit.
- 3 Démontrer qu'il existe un entier k tel que $\mathcal{N}^k = 0$.
- 4 Démontrer que X et X_{red} ont même dimension cohomologique cohérente.
- 5 Démontrer que X_{red} est affine si et seulement si X est affine.
- 6 Démontrer que la dimension cohomologique cohérente de X est la borne supérieure des dimensions cohomologiques cohérentes de ses composantes irréductibles (considérées comme sous-schémas réduits).

EXERCICE 3

Soit A un anneau noethérien, soit n un entier ≥ 0 , soit S l'anneau gradué $A[T_0, \dots, T_n]$ et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}_A^n = \text{Proj}(S)$.

- 1 Expliquer la structure de S -module gradué sur $\bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} \Gamma(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{F}(d))$.
- 2 Donner un exemple où ce module gradué n'est pas de type fini.
- 3 Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\Gamma_{\geq k}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{d \geq k} \Gamma(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{F}(d)).$$

Expliquer sa structure de S -module gradué.

- 4 On suppose dans cette question que $\mathcal{F} = \mathcal{O}(e)$. Déterminer $\Gamma_{\geq k}(\mathcal{O}(e))$ pour tout entier k . Prouver que c'est un S -module de type fini.
- 5 Expliquer pourquoi il existe une suite finie (d_1, \dots, d_m) d'entiers relatifs et un épimorphisme

$$\varphi: \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^n}(d_i) \rightarrow \mathcal{F}.$$

- 6 Démontrer que pour tout entier k assez grand, le morphisme φ induit un homomorphisme *surjectif* de S -modules, $\bigoplus_{i=1}^m \Gamma_{\geq k}(\mathcal{O}(d_i)) \rightarrow \Gamma_{\geq k}(\mathcal{F})$.
- 7 En déduire que pour tout entier k , $\Gamma_{\geq k}(\mathcal{F})$ est un S -module de type fini.

EXERCICE 4

Soit K un corps, on pose $S = K[T_0, \dots, T_n]$, on note $\mathbf{P}^n = \text{Proj}(S)$, et on considère un faisceau cohérent \mathcal{F} sur \mathbf{P}_K^n . Pour $m \in \mathbf{Z}$, on dit que \mathcal{F} est m -régulier si $H^p(\mathbf{P}_K^n, \mathcal{F}(m-p)) = 0$ pour tout entier $p > 0$. La régularité de \mathcal{F} est la borne inférieure des entiers m tel qu'il soit m -régulier.

- 1 Calculer la régularité de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^n}$.
- 2 Soit X un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_K^n . Relier la régularité du faisceau d'idéaux \mathcal{I}_X et du faisceau \mathcal{O}_X (considéré comme faisceau cohérent sur \mathbf{P}_K^n).
- 3 Dans la suite de cet exercice, on suppose que X est de dimension zéro. Démontrer que X est un schéma affine. Rappeler pourquoi $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est une K -algèbre de dimension finie; on notera d sa dimension.
- 4 On suppose dans cette question que $n = 1$. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^1}(-d) \simeq \mathcal{I}_X$. En déduire la régularité de \mathcal{I}_X .
- 5 On suppose désormais que $n \geq 2$. Démontrer que \mathcal{I}_X est m -régulier si et seulement si l'homomorphisme $\Gamma(\mathbf{P}_K^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^n}(m-1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m-1))$ est surjectif. Si \mathcal{I}_X est m -régulier, en déduire que $d \leq \binom{m-1+n}{n}$.
- 6 On suppose que $n = 2$ et que X est réduit, formé de trois points a, b, c de corps résiduel K . Déterminer la régularité de \mathcal{I}_X suivant que les trois points a, b, c sont alignés ou non.