Master Mathématiques fondamentales, 2e année, 2e semestre
Année 2023/2024

COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX COHÉRENTS

Antoine Chambert-Loir

Examen final — 19 février 2024 (3 h)

Les exercices sont indépendants les uns des autres, vous pouvez les résoudre dans n'importe quel ordre. Vous pouvez répondre en français ou en anglais. Vous pouvez consulter les notes de cours manuscrites.

EXERCICE 1

Si A est un anneau et M un A-module, on dit qu'un élément $a \in \mathrm{A}$ est régulier dans M si l'homothétie $(a)_{\mathrm{M}}$ est injective. Le support de M, son annulateur, l'ensemble de ses idéaux premiers associés sont respectivement notés $\mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, $\mathrm{Ann}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$.

1 Soit A un anneau et soit M un A-module. Soit $a \in \mathrm{A}$ un élément qui n'est pas régulier dans M. Démontrer qu'il existe un idéal premier $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ tel que $a \in \mathrm{P}$.

2 Soit A un anneau, soit $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_m$ des idéaux premiers de A, soit $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{M}$ et soit $\mathrm{N} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. On suppose que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mathrm{N}_{\mathrm{P}_j} \not\subset \mathrm{P}_j \mathrm{M}_{\mathrm{P}_j}$. Démontrer qu'il existe $a_2, \dots, a_n \in \mathrm{A}$ tels que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i \notin \mathrm{P}_j \mathrm{M}_{\mathrm{P}_j}$. (*Raisonner par récurrence sur m.*)

Dans la suite de l'exercice, on considère un anneau noethérien A et des A-modules de type fini M, N.

3 Démontrer que $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \cap \mathrm{Supp}(\mathrm{N}) = \varnothing$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$. (*Soit P un idéal premier de A tel que $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \cap \mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})$; trouver des morphismes non triviaux $\mathrm{N}_{\mathrm{P}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{P}}/\mathrm{PA}_{\mathrm{P}}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{P}}/\mathrm{PA}_{\mathrm{P}} \to \mathrm{M}_{\mathrm{P}}$.*)

4 Soit I un idéal de A tel qu'aucun élément de I ne soit régulier dans M. Démontrer qu'il existe un idéal premier $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ tel que $\mathrm{I} \subset \mathrm{P}$.

5 Démontrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Ann}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})$ contient un élément qui est régulier dans M.

EXERCICE 2

Soit X un schéma affine et soit U un sous-schéma ouvert quasi-compact de X. On pose $\mathrm{A} = \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ et $\mathrm{B} = \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$.
Dans tout l'exercice, on suppose que $\mathrm{H}^p(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = 0$ pour tout $p > 0$.

1 Soit R un anneau, soit $0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}'' \to 0$ une suite exacte de R-modules et soit N un R-module. Si M'' est plat, démontrer que le complexe induit

$$0 \to \mathrm{M}' \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N} \to \mathrm{M}'' \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N} \to 0$$

est exact.

2 Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur U et soit $f \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{D}(f) \subset \mathrm{U}$. Démontrer que le morphisme de restriction induit un isomorphisme $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})_f \simeq \Gamma(\mathrm{D}(f), \mathscr{F})$.

3 Soit $f \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{D}(f) \subset \mathrm{U}$. Démontrer que A_f est un B-module plat.

4 Démontrer que B est un A-module plat.

5 Démontrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ tels que $U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$.

6 En notant $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}(\mathscr{O}_X)$ le complexe de Čech de $\mathscr{O}_X$ associé au recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (D(f_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de U, démontrer que l'on a une suite exacte

$$0 \to B \to \mathscr{C}^0_{\mathscr{U}}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{C}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{O}_X) \to \dots$$

dont tous les termes sont des B-modules plats.

7 Démontrer que cette suite reste exacte après tensorisation par tout B-module M.

8 Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur U. Démontrer que $H^p(U, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $p > 0$.

9 Démontrer que U est affine.

10 Donner un exemple de sous-schéma ouvert quasi-compact U d'un schéma X tel que $H^p(U, \mathscr{O}_X) = 0$ pour tout $p > 0$, mais tel que U ne soit pas affine.

EXERCICE 3

Soit A un anneau. Pour $a \in A$ et un A-module M, on note $M[a]$ le sous-module des éléments $m \in M$ tels que $am = 0$; on dit que a est *régulier* dans M si $M[a] = 0$. On dit que a est régulier si $A[a] = 0$.

1 Soit M un A-module plat et soit $a \in A$ un élément régulier. Démontrer que a est régulier dans M. Donner un exemple de A-module M et d'élément régulier $a \in A$ tel que $M[a] \neq 0$.

2 Soit X un A-schéma et soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X qui est plat sur A. Pour tout élément régulier $a \in A$, construire une suite exacte $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{a} \mathscr{F} \to \mathscr{F}/a\mathscr{F} \to 0$, où la flèche notée a est induite par la multiplication par a sur les sections.

3 Sous les hypothèses précédentes, construire des suites exactes

$$0 \to H^p(X, \mathscr{F})/aH^p(X, \mathscr{F}) \to H^p(X, \mathscr{F}/a\mathscr{F}) \to H^{p+1}(X, \mathscr{F})[a] \to 0,$$

pour tout p.

On suppose maintenant que A est un anneau de valuation discrète (qui n'est pas un corps). Soit s et η les points de Spec(A) qui correspondent respectivement à l'idéal maximal et à l'idéal nul de A; soit a un générateur de l'idéal maximal de A, soit $k = \kappa(s) = A/(a)$ le corps résiduel de A et soit $K = \kappa(\eta) = A_a$ son corps des fractions

4 Soit M un A-module de type fini. Démontrer que

$$\dim_k(M \otimes_A k) - \dim_k(M[a]) = \dim_K(M \otimes_A K).$$

(*Utiliser le fait que* M *est de la forme* L/L′, *où* L *est un* A-*module livre de type fini et* L′ *est un sous-module de* L.)

5 On suppose que X est projectif sur A. Démontrer (sans utiliser les résultats du cours) que

$$\dim_{\kappa(s)} H^p(X_s, \mathscr{F}_s) \geqslant \dim_{\kappa(\eta)} H^p(X_\eta, \mathscr{F}_\eta).$$