



GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

Cohomologie des faisceaux cohérents — schémas affines et exemples

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit A un anneau noethérien et soit M un A -module; on note \tilde{M} le faisceau quasi-cohérent sur $\text{Spec}(A)$ qui est associé à M .

- 1 Soit a un élément de A . Construire un homomorphisme de A -modules

$$\varinjlim_n \text{Hom}_A((a^n), M) \rightarrow M_a$$

qui applique la classe d'un homomorphisme $f: (a^n) \rightarrow M$ sur $f(a^n)/a^n$. Démontrer que c'est un isomorphisme.

- 2 Soit J un idéal de A et soit $U = \text{Spec}(A) \setminus V(J)$ de $\text{Spec}(A)$. généraliser la question précédente en construisant un homomorphisme de A -modules (Deligne) :

$$\varinjlim_n \text{Hom}_A(J^n, M) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{M}).$$

Démontrer que c'est un isomorphisme.

- 3 On suppose que M est un A -module injectif. Prouver que le faisceau quasi-cohérent \tilde{M} sur $\text{Spec}(A)$ est flasque.

EXERCICE 2

Soit K un corps et soit A le quotient de l'anneau $K[X, Y, T_1, T_2, \dots]$ des polynômes par l'idéal engendré par la suite $(X^n T_n)_n$. On note x, y, t_n les images de X, Y, T_n dans A .

- 1 Soit $n \geq 1$. Démontrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme $f: (x^n) \rightarrow A$ tel que $f(x^n) = x^{n-1}y$.
- 2 En déduire que l'homomorphisme de l'exercice 1, question 1, n'est pas surjectif.
- 3 Soit M un A -module injectif contenant A . Démontrer que le faisceau quasi-cohérent \tilde{M} n'est pas flasque.

EXERCICE 3

Soit K un corps. Soit X le schéma réunion de deux droites affines $\mathbf{A}_K^1 = \text{Spec}(K[T])$ le long de l'identité sur l'ouvert $U = D(T)$ complémentaire de l'origine o . (« Droite affine dont l'origine est dédoublée »).

- 1 Construire un morphisme de X vers \mathbf{A}_K^1 qui est un isomorphisme au-dessus de $D(T)$ tel que l'image réciproque de o soit la réunion de deux points de corps résiduels K .
- 2 Démontrer que X n'est pas séparé.
- 3 Calculer les groupes de cohomologie $H^p(X, \mathcal{O}_X)$, pour $p \geq 0$.

EXERCICE 4

- 1 Soit K un corps. Soit X le complémentaire de l'origine dans le plan $\mathbf{A}_K^2 = \text{Spec}(K[T_1, T_2])$. En écrivant X comme la réunion des deux ouverts $D(T_1)$ et $D(T_2)$ de \mathbf{A}_K^2 , calculer les groupes de cohomologie $H^p(X, \mathcal{O}_X)$.
- 2 En déduire que X n'est pas un schéma affine.
- 3 Variante : complémentaire de $V(\langle 2, T \rangle)$ dans $\mathbf{A}_Z^1 = \text{Spec}(Z[T])$.

EXERCICE 5

Soit K un corps. Soit n un entier tel que $n \geq 2$, soit $f \in K[T_0, \dots, T_n]$ un polynôme homogène non nul et soit e son degré; on note X le sous-schéma $V_+(f)$ de \mathbf{P}_K^n et $i: X \rightarrow \mathbf{P}_K^n$ l'immersion canonique.

- 1 Construire une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^n}(-e) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^n} \rightarrow i_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

- 2 Calculer les dimensions des groupes de cohomologie $H^p(X, \mathcal{O}_X(d))$, pour $p \in \mathbf{N}$ et $d \in \mathbf{Z}$. Plus généralement, on considère une intersection complète de codimension c dans \mathbf{P}_K^n , c'est-à-dire un sous-schéma X de dimension $n - c$ défini par l'annulation de polynômes homogènes f_1, \dots, f_c et de degrés e_1, \dots, e_c . On suppose que $c < n$.
- 3 Prouver que pour tout $d \in \mathbf{Z}$, l'application de restriction $H^0(\mathbf{P}_K^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^n}(d)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$ est surjective.
- 4 Démontrer que X est connexe.
- 5 Démontrer que $H^p(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ pour tout entier p tel que $0 < p < n - c$ et tout entier $d \in \mathbf{Z}$.

EXERCICE 6

Soit K un corps et soit $\varphi: \mathbf{P}_K^1 \rightarrow \mathbf{P}_K^3$ le morphisme de K -schémas donné par $\varphi([u : v]) = [u^3 : u^2v : uv^2 : v^3]$. Soit C son image (« cubique gauche »).

- 1 Soit I l'idéal $\langle T_0T_3 - T_1T_2, T_1^2 - T_0T_2, T_2^2 - T_1T_3 \rangle$ de $K[T_0, T_1, T_2, T_3]$. Démontrer que $C = V_+(I)$.
- 2 Construire une résolution de \mathcal{I}_C de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^3}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^3}(-2)^3 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0.$$

- 3 Calculer les polynômes de Hilbert de \mathcal{I}_C et \mathcal{O}_C .
- 4 Plus précisément, calculer les dimensions des groupes de cohomologie $H^p(\mathbf{P}_K^3, \mathcal{I}_C(d))$ et $H^p(C, \mathcal{O}_C(d))$ pour $p \geq 0$ et $d \in \mathbf{Z}$.