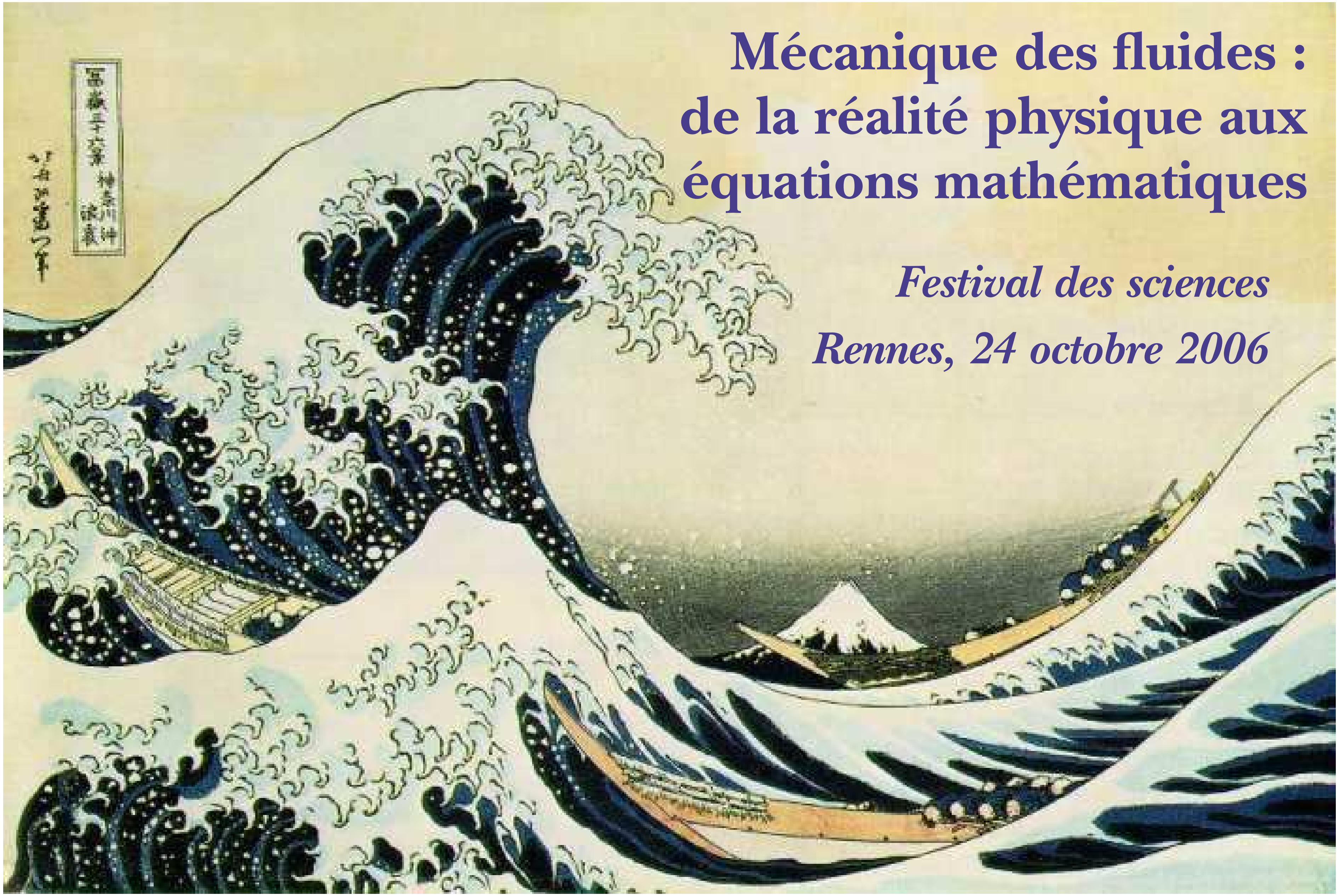
Mécanique des fluides : de la réalité physique aux équations mathématiques

Festival des sciences

Rennes, 24 octobre 2006



Antoine Chambert-Loir (*antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr*)

Institut de recherche mathématique de Rennes, Université de Rennes 1

La *mécanique des fluides* est la science qui étudie le mouvement des fluides : liquides, gaz, etc. qui perdent leur forme au cours du temps, par opposition aux solides qui la gardent.

Je veux vous présenter les *équations* qui régissent le mouvement des fluides :

1. comment elles ont été découvertes ;
2. leur nature : « équations aux dérivées partielles » ;
3. dans quel but, dans quelle mesure on peut les *résoudre*.

Archimède (287–212 av. J. C.)

- *Géomètre*, il s'est intéressé aux volume des cylindres, des boules ;
- *ingénieur*, on lui doit la vis sans fin, des fortifications, l'utilisation de la parabole pour défendre Syracuse contre la flotte romaine ;
- *physicien*, c'est le père de la *mécanique statique*, c'est-à-dire la science de l'*équilibre* des corps. Il découvre que des corps d'un même volume n'ont pas le même poids et flottent différemment.

Poussée d'Archimède : Tout corps plongé dans un liquide subit une force verticale, dirigée de bas en haut, et égale au poids du volume du liquide déplacé.

Archimède (287–212 av. J. C.)

La masse volumique de l'eau d'autant plus grande qu'elle est salée ; expérience dans la Mer Morte (densité $\approx 1{,}3$) :

Archimède (287–212 av. J. C.)

Héron d'Alexandrie (10–70)

Auteur du Πνευματικα (*Pneumatica*) dans lequel il étudie la *pression* des gaz.

Descriptions de machines à vapeur et d'automates de théâtre.

Inventeur d'une « fontaine perpétuelle »

« L'abbé de Gouvon m'avoit fait présent, il y avoit quelques semaines, d'une petite fontaine de héron, fort jolie, et dont j'étois transporté. (...) Ce principe fut le fondement sur lequel nous bâtimes l'édifice de notre fortune. »

J.-J. Rousseau, *Les Confessions*, Livre III.

Galilée (1564–1642)

À cette époque, le développement de l'algèbre rend possible une plus grande mathématisation de la physique.

Galilée était intéressé par la mécanique céleste : observations de la Lune, mouvement des planètes, etc.

Il écrit en 1616 :
« La philosophie est écrite dans ce grand livre — je veux dire l'univers — qui est en permanence sous notre regard, mais il ne peut être compris que si l'on apprend d'abord le langage et interprète les symboles avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans le langage des mathématiques, et ses symboles sont triangles, cercles et autres figures géométriques sans lesquels il est humainement impossible d'y comprendre un seul mot ; sans eux, on erre dans un labyrinthe obscur. »

Galilée, *L'Essayeur* (Il saggiatore), 1616

Newton, 1687 : *Principia mathematica*

Dans cet ouvrage *révolutionnaire*, Newton pose les fondements de la mécanique classique — valable jusque 1905, avec Einstein et la relativité restreinte :

- loi du mouvement : $\vec{F} = m\vec{a}$;
- loi de la gravitation universelle.

Les équations générales qu'il écrit relie l'*accélération* d'un corps (multipliée par sa masse) aux *forces* qu'il subit.

Ce sont des *équations différentielles* : elle lient une fonction du temps (la position du corps), sa dérivée première (la vitesse) et seconde (l'accélération).

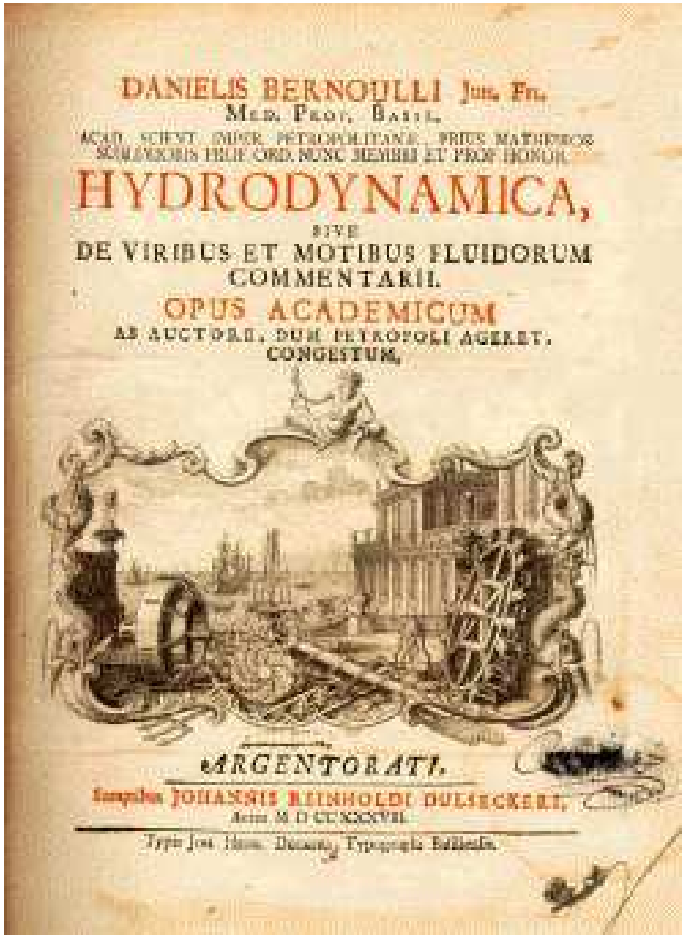
Grâce à elles, Newton *démontre* les lois empiriques qui avaient été découvertes auparavant pour le mouvement des planètes, telles les lois de Kepler.

D. Bernoulli (1738) ; L. Euler (1752–55)

Dans son *Hydrodynamique*, Bernoulli étudie les fluides *non visqueux* fondant son analyse sur la *conservation de l'énergie*.

Il découvre le *principe de Bernoulli :*

- dans un tube de Venturi, quand la vitesse du gaz augmente, sa pression diminue, phénomène à la base des *carburateurs* ;
- mesure de la pression du sang (1844, loi de Poiseuille ; 1896, invention du tensiomètre par Riva-Rocci) ;
- coups francs fameux de Platini, Zidane (effet Magnus).



Navier, Saint-Venant, Stokes : 1820–1845

Dans la première moitié du XIX^{e} siècle, plusieurs savants découvrent les équations qui régissent les *fluides visqueux*. On les appelle aujourd'hui les *équations de Navier-Stokes*.

Notations :

- $\vec{u}(x, y, z, t)$ la vitesse à l'instant t d'une « particule de fluide » placée au point de l'espace de coordonnées (x, y, z). C'est un *vecteur* : trois coordonnées u_x, u_y, u_z ;
- $p(x, y, z, t)$ la pression du fluide au point de coordonnées (x, y, z) ;
- ν sa viscosité ;
- ρ sa masse volumique (supposées constantes).

roulement de tambour...

Navier, Saint-Venant, Stokes : 1820–1845

En l'absence de forces extérieures, lorsque le fluide est incompressible :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - \dfrac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 4 équations aux *dérivées partielles* : elles relient des fonctions (trois coordonnées (u_x, u_y, u_z) du vecteur $\vec{u}$, p) de plusieurs variables (position, temps) à leurs dérivées par rapport aux différentes variables.

Résoudre ces équations aux dérivées partielles ?

Le but des savants du XIX^e siècle était de *calculer* les événements physiques intéressants : mouvement des planètes, écoulement des fluides, diffusion de la chaleur, vibration des cordes, etc.

Ils ont commencé par obtenir des solutions analytiques : des *formules explicites* donnant une fonction satisfaisant les équations considérées.

Malheureusement…

Résoudre ces équations aux dérivées partielles ?

Ce ne fut rapidement plus possible ;

palliatifs :

- développements en séries de puissances (Cauchy) ou trigonométriques (Fourier) ;
- méthodes de perturbation : recherche d'une solution « proche » d'une solution explicitement connue ;
- d'autre part, Liouville, Lie, etc., inspirés par la théorie de Galois des équations polynomiales montrèrent que l'on ne peut pas toujours donner des formules.

Résoudre ces équations aux dérivées partielles ?

Pour les *équations différentielles* avec condition initiale, Cauchy a prouvé qu'il existe *une solution et une seule*.

Mais ce théorème ne donne *pas de formule explicite*.

On peut le comparer avec le théorème de Gauss qui affirme qu'une équation polynomiale possède autant de solutions (en nombres complexes) que son degré, sans pour autant les calculer.

Résoudre ces équations aux dérivées partielles ?

Signification pour la physique mathématique :

- *existence* : si fait une expérience, on peut l'observer aussi longtemps que l'on veut ;
- *unicité* : si on la fait deux fois on doit observer la même chose (déterminisme)

Ce n'est pas « physiquement évident » : les équations sont un *modèle* de la réalité physique. Elles pourraient manifester des propriétés que l'on n'observe pas et seraient alors inappropriées à l'étude du phénomène physique.

Jean Leray, 1934

Dans *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant tout l'espace*, Leray démontre qu'il existe des « solutions turbulentes » : pour lesquelles $\vec{u}$, p n'ont pas de dérivée au sens usuel du terme, mais ont une dérivée dans un sens plus faible.

Les solutions dont il prouve l'existence pourraient faire apparaître des discontinuités de vitesse, correspondant à des phénomènes turbulents, du chaos, des ondes de chocs, etc. que les équations de Navier-Stokes modélisent mal.

On sait aussi que le « lieu » de l'espace-temps où ces solutions sont peut-être turbulentes est très petit : de volume zéro (Leray ; 1934), et même de « dimension fractale ≤ 1 » (Caffarelli, Kohn, Nirenberg ; 1982).

Jean Leray, 1934

L'article de Leray reste un sommet, *indépassé*, de l'analyse mathématique des équations de Navier-Stokes.

Il contient un grand nombre d'idées qui sont toujours utilisées par les spécialistes d'équations aux dérivées partielles :

- fonctions généralisées, distributions, etc. ;
- contrôle de quantités globales, ici l'énergie totale décroît. Cela ne suffit cependant pas à interdire a priori l'apparition de singularités.

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, il y a des conservations supplémentaires, et des résultats définitifs.

2000, et après ?

Existence : Elle est connue quand la donnée initiale est petite par rapport à la viscosité.
Des simulations numériques suggèrent qu'il puisse y avoir *apparition de singularités* ; toutefois, ces équations sont très « instables » et il est difficile de s'y fier pour prédire un résultat théorique.

Le calcul numérique de ces équations est un problème difficile.

2000, et après ?

Existence : Elle est connue quand la donnée initiale est petite par rapport à la viscosité.
Des simulations numériques suggèrent qu'il puisse y avoir *apparition de singularités* ; toutefois, ces équations sont très « instables » et il est difficile de s'y fier pour prédire un résultat théorique.

Le calcul numérique de ces équations est un problème difficile.

Unicité : toujours inconnue !
D'ailleurs, elle est mise en défaut par certaines solutions (faibles) de l'équation d'Euler ($\nu = 0$) exhibées par Schnirelman (1997) : imaginez un fluide non visqueux, seul dans l'espace, au repos, qui se met à bouger spontanément, puis revient dans son état initial...

2000, et après ?

L'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est l'un des *7 problèmes du millénaire* mis à prix $ 1 000 000 par l'institut Clay !

You Do the Math, and Earn $7M in the Process

THE ASSOCIATED PRESS

NEWSDAY, THURSDAY, MAY 25, 2000

THE ASSOCIATED PRESS

Paris — A group of the world's top mathematicians is offering $7 million for solutions to seven of the world's hardest equations.

After puzzling for years over seven unsolved math problems, a U.S.-based mathematics foundation put the "Millennium Prize Problems" challenge to the world via the Internet yesterday.

Experts say solving the problems could lead to breakthroughs in encryption and aerospace — and open areas of mathematics as yet unimagined.

The Clay Mathematics Institute posted the problems on its Web site, http://www.claymath.org at the same time it unveiled the contest in Paris at its annual meeting. The group has posted a $1-million prize for each of the seven problems.

Few expect a winner anytime soon.

"There's no time limit," said Arthur Jaffe, a Harvard University math professor and president of the Clay institute, a private, nonprofit foundation based in Cambridge, Mass.

According to contest rules, solutions must be published in a renowned math journal and undergo a two-year waiting period to allow time for independent review. If the mathematics community accepts the solution, the Clay institute will then open its own review before awarding any money.

Mathematicians are quick to note that a few decades, or even a century, is not a long wait to unravel the world's toughest puzzles.

The list of problems includes the following equations, named for the mathematicians who postulated them: the Riemann Hypothesis, the Poincare Conjecture, the Hodge Conjecture, the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture, Navier-Stokes Equations, the Yang-Mills Theory and the P vs. NP Problem.