Solutions périodiques d'équations différentielles

Antoine Chambert-Loir
(*Université Pierre-et-Marie Curiechambert@math.jussieu.fr*)

Introduction

Dans leur article [1], Busenberg, Fischer et Martelli démontrent plusieurs généralisations du théorème de Yorke [2] : *si* $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *est lipschitizienne de constante* λ, *toute solution périodique non constante de l'équation différentielle* $x'(t) = F(x(t))$ *a une période* $\geqslant 2\pi/\lambda$. En effet, ils étendent ce résultat à d'autres espaces de Banach que l'espace euclidien ainsi qu'à certains systèmes dynamiques discrets.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, ils traitent d'abord un analogue discret et passent ensuite à la limite pour en déduire le théorème de Yorke. En revanche, dans le case d'un espace de Banach général, ils donnent une preuve directe fondée sur l'inégalité intégrale assez astucieuse que voici : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de période T de $\mathbf{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E,

$$(\star) \qquad \int_0^T \int_0^T \|f(t) - f(s)\| \, dt \, ds \leqslant \frac{T}{6} \int_0^T \int_0^T \left\| f'(t) - f'(s) \right\| dt \, ds.$$

Cette note n'a pour d'autre but que de remarquer que dans le cas d'un espace de Hilbert, à la fois le théorème de Yorke et son analogue discret sont des cas particuliers d'un énoncé très simple : *la variance est positive*, dont le cadre naturel est la transformation de Fourier des groupes abéliens localement compacts.

1. – Transformation de Fourier

Nous commençons par rappeler quelques faits concernant l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens localement compacts, prouvés par exemple dans [3].

Soit G un groupe abélien compact et notons $\widehat{G}$ son groupe des caractères. C'est un groupe abélien discret dont l'élément unité $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1. Si $g \in G$ et $\widehat{g} \in \widehat{G}$, notons $\langle g, \widehat{g} \rangle = \widehat{g}(g) \in \mathbf{C}^*$. Soit d$g$ une mesure de Haar sur G. La transformation de Fourier sur G est définie pour $f \in L^1(G)$ par la formule

$$\mathcal{F}(f)(\widehat{g}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(G)} \int_G f(g) \, \langle g, \widehat{g} \rangle \, \mathrm{d}g.$$

On a la formule de Parseval selon laquelle si $f \in L^1(G) \cap L^1(G)$,

$$\int_G |f(g)|^2 \, \mathrm{d}g = \mathrm{vol}(G) \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} |F(f)(\widehat{g})|^2$$

et qui permet d'étendre la transormation de Fourier par densité en un isomorphisme $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$.

Si f est à valeurs dans un espace de Hilbert complexe (séparable), tout ceci vaut, à condition de remplacer les valeurs absolues par des normes.

Lemme 1. — *Soit $f \in L^2(G;\mathcal{H})$ une fonction de G à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors,*

$$V(f) \overset{def}{=} \int_{G\times G} \| f(g) - f(h)\|^2 \, \mathrm{d}g \, \mathrm{d}h = 2\operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\substack{\widehat{g}\in\widehat{G} \\ \widehat{g}\neq\mathbf{1}}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 . \tag{1}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{G\times G} \| f(g) - f(h)\|^2 \, \mathrm{d}g \, \mathrm{d}h &= \int_{G\times G} \Big(\| f(g)\|^2 + \| f(h)\|^2 - 2\,\langle f(g) \mid f(h)\rangle\Big) \, \mathrm{d}g \, \mathrm{d}h \\
&= 2\operatorname{vol}(G) \int_G \| f(g)\|^2 \, \mathrm{d}g - \left\|\int_G f(g)\,\mathrm{d}g\right\|^2 \\
&= 2\operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 - 2\operatorname{vol}(G)^2 \, \|\mathcal{F}(f)(\mathbf{1})\| \\
&= 2\operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\substack{\widehat{g}\in\widehat{G} \\ \widehat{g}\neq\mathbf{1}}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 .
\end{aligned}$$

Remarquons que $V(f)$ n'est autre que $2\operatorname{vol}(G)^2$ fois la variance de f.

2. — Équations différentielles

Soit maintenant D une application linéaire définie sur un sous-espace $\operatorname{dom}(D) \subset L^2(G;\mathcal{H})$ à valeurs dans $L^2(G;\mathcal{H})$. Par exemple, un opérateur « pseudo-différentiel » donné par une formule du type

$$\mathcal{F}(Df)(\widehat{g}) = \mathcal{D}(\widehat{g})\mathcal{F}(f)(\widehat{g}), \tag{2}$$

où $\mathcal{D}$ est une fonction $\widehat{G} \to \mathbf{C}$. Du lemme précédent, on déduit immédiatement l'inégalité à la Poincaré suivante.

Lemme 2. — *Soit $\kappa \in \mathbf{R}_+$ tel que pour toute $f \in \operatorname{dom}(D)$ et tout $\widehat{g} \in \widehat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$, on ait*

$$\|\mathcal{F}(Df)(\widehat{g})\| \geqslant \kappa \, \|\mathcal{F}(f)\| \, (\widehat{g}). \tag{3}$$

Alors, pour toute fonction $f \in \operatorname{dom}(D)$, on a $V(Df) \geqslant \kappa^2 V(f)$.

En particulier, si D est donné par la formule (2), on peut prendre pour κ la borne inférieure de $|\mathcal{D}(\widehat{g})|$ pour $\widehat{g}$ décrivant l'ensemble des caractères non triviaux de G.

Soit maintenant $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une fonction continue. On suppose qu'elle satisfait la condition de Lipschitz pour la constante λ, c'est-à-dire que pour tous v_1 et $v_2 \in \mathcal{H}$,

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| \leqslant \lambda \, \|v_1 - v_2\| . \tag{4}$$

Le problème est de déterminer les fonctions $f \in \operatorname{dom}(D)$ telles que

$$Df(g) = F(f(g)), \qquad g \in G. \tag{5}$$

Théorème 3. — *Si l'équation* (5) *a une solution non constante (p.p.)* $f \in \mathrm{dom}(G)$, *alors* $\kappa \leqslant \lambda$.

En effet, on déduit du lemme 2 l'inégalité

$$V(Df) \geqslant \kappa^2 V(f). \tag{6}$$

tandis que d'après la définition de $V(f)$, on a

$$\begin{aligned} V(Df) &= \int_{G\times G} \|(Df)(g) - (Df)(h)\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &= \int_{G\times G} \|F(f(g)) - F(f(h))\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &\leqslant \lambda^2 \int_{G\times G} \|f(g) - f(h)\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &\leqslant \lambda^2 V(f). \end{aligned} \tag{7}$$

Si f n'est pas constante, $V(f) \neq 0$, d'où l'inégalité voulue.

3. — Applications

a) ***Le théorème de Yorke***

Appliqué à la situation suivante, le théorème 3 implique le théorème de Yorke rappelé dans l'introduction.

– G est le cercle $\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, si bien qu'une fonction sur G s'identifie à une fonction T-périodiques sur $\mathbf{R}$;
– la mesure de Haar sur G est la mesure induite par la mesure de Lebesgue. En particulier, $\mathrm{vol}(G) = T$;
– le groupe $\widehat{G}$ s'identifie à $\mathbf{Z}$, l'accouplement canonique est donné par $\langle t, n\rangle = \exp(2i\pi nt/T)$;
– l'opérateur D est la dérivation, donnée « en Fourier » par $\mathcal{D}(n) = 2i\pi n/T$. On peut donc choisir $\kappa = 2\pi/T$.

b) ***Systèmes discrets***

L'analogue discret du théorème de Yorke a été démontré par Busenberg, Fischer and Martelli [1] : *Soit* $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *une fonction* λ*-lipschitzienne sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Soit* h *un entier et supposons qu'il existe une suite non constante* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+1} = x_n + F(x_n), \quad x_{n+h} = x_n. \tag{8}$$

Alors, $2\sin(\pi/h) \leqslant \lambda$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème 3 aux données suivantes :

– $G = \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, la mesure de Haar est la mesure de comptage, donc $\mathrm{vol}(G) = h$;
– le groupe des caractères de G est $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, l'accouplement entre G et $\widehat{G}$ est donné par $\langle n, \nu\rangle = \exp(2i\pi n\nu/h)$;
– l'operator D est donné par $D((x_n)) = (x_{n+1} - x_n)$. il est de type « pseudo-differentiel », avec $\mathcal{D}(\nu) = \exp(2i\pi\nu/h) - 1$. On peut donc prendre $\kappa = 2\sin(\pi/h)$.

c) *Autres exemples*

Mais on peut bien sûr déduire du théorème 3 des résultats de *non-existence* d'équations différentielles bien plus généraux. Par exemple, soit $P \in \mathbf{C}[x]$ et supposons que l'équation différentielle $P(d/dt)f = 0$ n'a pas de solution T-périodique non constante (autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, $P(2i\pi n/T) \neq 0$). Posons

$$\varepsilon_0 = \min_{n \in \mathbf{Z}^*} |P(2i\pi n/T)| \, .$$

Soit alors une fonction λ-lipschitzienne $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Il résulte du théorème 3 que si $\lambda|\varepsilon| < \varepsilon_0$, l'équation différentielle

$$P(d/dt)(f) = \varepsilon F(f)$$

n'a pas de solution T-périodique non constante.

d) *Remarque incontrôlable*

On peut aussi interpréter ce résultat comme un énoncé de non-contrôlabilité : Considérons un système physique qui obéit, en l'absence de forces extérieures, à l'équation différentielle $Df = 0$ et qui n'est pas naturellement T-périodique. Pour obtenir une évolution T-périodique du système, on peut imaginer un mécanisme de contrôle que nous interprétons comme un second membre $F(f)$ à l'équation différentielle. Pour que ce soit possible, la fonction de contrôle F doit d'après le théorème 3 avoir une « grande » constante de Lipschitz, autrement dit notre mécanisme de contrôle doit être sensible aux petites perturbations.

Références

[1] S. Busenberg, D. Fischer and M. Martelli, *Minimal periods of discrete and smooth orbits,* Amer. Math. Monthly **96** (1989), p. 5–17

[2] J. Yorke, *Periods of periodic solutions and the Lipschitz constants,* Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), p. 509–512

[3] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications,* Hermann, 1941