Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich

Antoine Chambert-Loir

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
Courriel : `antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr`

Table des matières

1. Introduction

Soit F un corps de nombres et soit X un F-schéma projectif lisse. Soit v une place de F et soit K le complété de F en v, soit $\overline{K}$ le complété d'une clôture algébrique de K. On supposera fixé un plongement d'une clôture algébrique de F dans $\overline{K}$.

Si v est archimédienne, on notera X_v la variété analytique complexe $X(\overline{K})$. Si v est ultramétrique, on notera X_v l'espace de Berkovich de $X \otimes K$, *cf.* [**7**] ; contentons-nous pour l'instant de dire qu'il s'agit d'une notion raisonnable d'espace analytique sur le corps K attachée à $X \otimes K$; en particulier, X_v est un espace compact, métrisable, et est connexe par arcs, si X est géométriquement connexe.

Tout point x de $X(K)$ définit un point de X_v, que l'on notera par la même lettre ; on notera μ_x la mesure (de Dirac) sur X_v de masse 1 supportée en x. Plus généralement, si $\{x_1, \dots, x_d\}$ est l'orbite sous $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ d'un point $x \in X(\overline{K})$, on notera μ_x la mesure de probabilité sur X_v, somme des masses de Dirac en les x_i divisée par d. (*Stricto sensu,* si v est ultramétrique, cette mesure est définie d'abord sur un K'-espace de Berkovich $X_{v'}$, associé à une extension finie K' de K ; on considère son image directe sous le morphisme canonique $X_{v'} \to X_v$.)

La question de l'équidistribution d'une suite de points (x_n) de $X(\overline{F})$ consiste à élucider le comportement des mesures μ_{x_n} lorsque n tend vers l'infini. On supposera toujours que cette suite est *générique,* c'est-à-dire qu'une sous-variété donnée $Z \subsetneq X$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.

Dans le contexte de la théorie d'Arakelov, on s'intéresse notamment aux suites de petits points. Soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X muni d'une métrique adélique intégrable au sens de Zhang [**31**] ; rappelons que cela signifie qu'en dehors d'un nombre fini de places, cette métrique est définie par un modèle, et qu'en les places restantes, elle est quotient de deux limites uniformes de métriques amples (en particulier, lisses aux places archimédiennes). Comme le montre Zhang dans l'article cité, ces métriques donnent lieu à un calcul de nombres d'intersection arithmétique, défini par passage à la limite à partir de la théorie d'Arakelov usuelle (*cf.* par exemple [**15**] ou, en ce qui concerne plus spécifiquement l'application de la théorie d'Arakelov aux hauteurs, [**10**]). En particulier, si $d = \dim X$, la formule

$$h_{\overline{L}}(X) = \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X)}{(1+d)c_1(L)^d},$$

définit ce qu'on appelle la *hauteur de X* relativement au fibré métrisé $\overline{L}$, en tout cas si $c_1(L)^d > 0$.

Les résultats de Szpiro-Ullmo-Zhang dans [**25**] amènent alors la question, dans laquelle il vaut mieux supposer que L est ample. *Si (x_n) est une suite générique de points de $X(\overline{F})$ tels que $h_{\overline{L}}(x_n) \to h_{\overline{L}}(X)$, est-il vrai que pour toute place v, les mesures μ_{x_n} convergent faiblement ?* Le but de cette partie est de donner des exemples significatifs où cette question a une réponse positive, voir les théorèmes 3.1 et 4.2. Plus généralement, notre approche permet d'aborder la question analogue de l'équidistribution de mesures de la forme μ_x dans un produit (fini) d'espaces X_v.

L'approche que nous suivons est héritée de l'article [**25**] de Szpiro, Ullmo et Zhang. Elle fait usage d'une inégalité fondamentale, conséquence du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique : sous certaines conditions sur le fibré en droites métrisé $\overline{L}$, on a

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant h_{\overline{L}}(X)$$

pour toute suite générique (x_n) de points de $X(\overline{F})$. Le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique a d'abord été démontré par Gillet-Soulé [**14, 16**] dans le cadre de la théorie d'Arakelov « classique », généralisé par Zhang dans [**30, 31**] à des situations singulières ; Abbès et Bouche [**1**] en ont aussi donné une autre démonstration. Dans le cas des courbes, Autissier [**2**] a considérablement affaibli les hypothèses d'un tel théorème.

Ainsi, nous allons d'abord traiter le cas d'une métrique ample. En utilisant le théorème d'Autissier, nous allons ensuite étudier le cas des courbes : nous y montrons un théorème d'équidistribution des petits points très général ; il s'applique aussi bien aux hauteurs définies par des systèmes dynamiques sur la droite projective qu'à la hauteur de Néron–Tate sur une courbe elliptique. Toutefois, faute d'une description très explicite des mesures limites, nous donnerons pour finir un résultat d'équidistribution dans le « graphe de réduction » de Chinburg–Rumely. La situation est déjà intéressante dans le cas d'une courbe elliptique à (mauvaise) réduction semi-stable : le graphe de réduction est un cercle et les points de petite hauteur s'y équidistribuent pour la mesure invariante par rotation. Cela signifie que les réductions des points de petite hauteur modulo une place de mauvaise réduction « visitent » régulièrement toutes les composantes irréductibles de la limite inductive des modèles de Néron sur les corps de nombres contenus dans $\overline{\mathbf{Q}}$. Suivant une suggestion d'Autissier, nous démontrerons pour finir un énoncé dans l'autre sens : si la suite μ_{x_n} converge vers une mesure dont le support n'est pas celui attendu, on dispose d'une minoration effective de la lim. inf. des hauteurs $h_{\overline{L}}(x_n)$.

Pour finir cette introduction, citons deux approches parallèles à la distribution des points de petite hauteur pour les systèmes dynamiques sur la droite projective : il s'agit des travaux de M. Baker et R. Rumely [**6**] d'une part, et de C. Favre et J. Rivera-Letelier [**13**] d'autre part. Ces deux groupes d'auteurs utilisent une théorie du potentiel sur la droite projective de Berkovich qu'ils ont définie, ce qui leur permet de généraliser les démonstrations de Bilu et Baker-Hsia ([**8**], [**5**]). Citons enfin la thèse [**27**] d'A. Thuillier dans laquelle est développée une théorie du potentiel sur les courbes analytiques au sens de Berkovich, dans l'esprit du livre [**22**] de Rumely. On y trouvera des compléments importants aux résultats de cet article.

Après une première version, incomplète et partiellement erronée, c'est au cours d'un séjour à Bombay, au sein d'un projet CEFIPRA consacré aux groupes algébriques, que j'ai de nouveau pu réfléchir à ces questions. J'ai aussi eu l'occasion d'exposer les résultats de cet article au cours du premier semestre 2004 dans des conférences à New-York et Münster, puis au printemps 2005 à Bordeaux, Rome et Caen. Merci à ces institutions pour leur accueil chaleureux.

Merci enfin à A. Thuillier pour une remarque décisive qui a permis la démonstration du th. 4.2, ainsi qu'à P. Autissier pour ses commentaires et suggestions.

2. Construction de mesures

Soit K un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est complet. On note K° l'anneau des $a \in K$ tels que $|a| \leqslant 1$, $K^{\circ\circ}$ l'ensemble des $a \in K$ tels que $|a| < 1$. C'est un idéal maximal de K° ; on notera $\tilde{K} = K^\circ/K^{\circ\circ}$ le corps résiduel.

Soit X un K-espace analytique strict, au sens de Berkovich [**7**]. Les espaces que nous aurons à considérer seront toujours supposés correspondre à un espace rigide quasi-compact et quasi-séparé. Puisque le spectre de Berkovich $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ d'une K-algèbre affinoïde $\mathscr{A}$ est compact, de tels espaces sont compacts. On peut de plus les étudier via la géométrie formelle car ils sont la fibre générique d'un schéma formel admissible quasi-compact sur K° (voir [**9**], th. 4.1). Ils seront le plus souvent les analytifiés de variétés projectives. Dans ce cas, tout K°-modèle formel est le but d'un éclatement admissible de source un K°-schéma projectif (*cf.* par exemple [**19**], prop. 10.5).

Nous supposerons toujours que K admet un sous-corps dénombrable et dense. C'est le cas pour nos applications à la théorie d'Arakelov puisque K est alors ou bien une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, ou bien le corps $\mathbf{C}_p$. Dans ces deux cas, la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K est dense.

Cette hypothèse assure que l'espace X est métrisable. Soit en effet Ω un sous-corps dénombrable et dense dans K. Toute K-algèbre strictement affinoïde $\mathscr{A}$ est séparable, c'est-à-dire admet une famille dense et dénombrable. Par suite, une semi-norme bornée multiplicative sur $\mathscr{A}$ est déterminée par ses restrictions à une partie $\{f_n\}$ dense dans la boule unité de $\mathscr{A}$, de sorte que l'application de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ dans $[0,1]^{\mathbf{N}}$, donnée par $x \mapsto |f_n(x)|$ est une injection continue. Comme $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est compact, cette injection induit un homéomorphisme de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ sur son image. Puisque $[0,1]^{\mathbf{N}}$ est métrisable, il s'ensuit que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est un espace compact métrisable. Le cas d'un K-espace strictement analytique compact s'en déduit car un tel espace possède un recouvrement fermé localement fini par des parties strictement affinoïdes. Voir aussi [**21**].

Les premiers paragraphes sont consacrés à des rappels de résultats de Gubler [**18**] et Zhang [**31**].

2.1. Métriques. — Soit L un faisceau inversible sur X. Une métrique continue sur L est la donnée, pour tout ouvert U de X et toute section $s \in \Gamma(U, L)$ d'une fonction continue $\|s\| : U \to \mathbf{R}_+$ telle que $\|fs\| = |f| \, \|s\|$ si $f \in \mathscr{C}^0(U, K)$ et qui ne s'annule pas si s ne s'annule pas. Le produit tensoriel de deux faisceaux inversibles métrisés, le dual d'un faisceau inversible métrisé sont munis d'une métrique continue canonique.

Soit e un entier strictement positif et soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$ un modèle formel de (X, L^e) sur K° : $\mathfrak{X}$ est un schéma formel admissible sur K° de fibre générique X et $\mathfrak{L}$ est un faisceau inversible sur $\mathfrak{X}$ de fibre générique L^e. Cette donnée munit L d'une métrique continue pour laquelle les sections locales de norme $\leqslant 1$ sont celles qui sont « entières » ([**18**], Lemma 7.4) : si $\mathfrak{U}$ est un ouvert formel de $\mathfrak{X}$ de fibre générique U, $\sigma \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathfrak{L})$ une trivialisation de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{U}$, alors $\|\sigma\|(x) = 1$ pour tout $x \in U$. Une telle métrique sera dite *formelle.*

Tout faisceau inversible possède une métrique formelle ([**18**], Lemma 7.6).

Toute fonction continue f sur X définit une métrique continue sur le faisceau inversible trivial $\mathscr{O}_X$, définie par $\|1\|(x) = e^{-f(x)}$, et réciproquement. On notera $a\colon \mathscr{C}^0(X) \to \overline{\operatorname{Pic}}(X)$ l'homomorphisme de groupes ainsi défini. Il résulte du théorème 7.12 de [**18**] que les métriques formelles sont denses dans l'ensemble des métriques continues sur un fibré en droites (c'est une application du théorème de Stone-Weierstrass sur l'espace compact X).

2.2. Métriques algébriques ; métriques intégrables. — Soit X une K-variété projective et notons X^{an} l'espace de Berkovich qui lui est associé. Soit L un fibré en droites sur X.

Parmi les métriques sur L, on appellera *métriques algébriques* celles qui sont définies par un modèle $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$, où $\mathscr{X}$ est (le schéma formel associé à) un schéma projectif et $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L} \simeq L^e$, pour un entier $e \geqslant 1$.

Tout fibré en droite admet une métrique algébrique ; plus précisément, toute métrique formelle est algébrique.

Suivant Zhang ([**31**], (1.3)), nous dirons qu'une métrique algébrique est *semi-positive* si la réduction L de $\mathfrak{L}$ a un degré positif ou nul sur toute courbe de la variété propre X, réduction de $\mathfrak{X}$. (Voir aussi [**18**], Déf. 7.13.) Nous dirons plus généralement qu'une métrique continue est semi-positive si elle est limite uniforme de métriques algébriques semi-positives. Nous dirons enfin qu'une métrique sur L est *intégrable* si L est isométrique au quotient de deux faisceaux inversibles métrisés à métrique semi-positive.

Nous noterons $\overline{\mathrm{Pic}}(X)$ (*resp.* $\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{alg}}(X)$, $\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{for}}(X)$ et $\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X)$) les groupes de classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles métrisés (*resp.* dont la métrique est algébrique, formelle, intégrable). On a ainsi des inclusions

$$\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{for}}(X) = \overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{alg}}(X) \subset \overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \subset \overline{\mathrm{Pic}}(X).$$

L'inclusion $\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{alg}}(X) \subset \overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X)$ résulte de ce que sur un K°-schéma projectif, tout faisceau inversible est le quotient de deux faisceaux inversibles amples.

2.3. Mesures. — Soit encore X une K-variété projective de dimension d. Soit $\overline{L_i}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, des faisceaux inversibles métrisés sur X dont les métriques sont algébriques. Elles sont définies par des fibrés en droites $\mathscr{L}_i$ sur un même K^0-schéma projectif $\mathscr{X}$, où $\mathscr{L}_i$ est un modèle de $L_i^{e_i}$, pour un certain entier $e_i \geqslant 1$. On peut en outre, et nous le ferons systématiquement, supposer que $\mathscr{X}$ est normal ; notons X sa fibre spéciale. L'application de réduction $\pi\colon X^{\mathrm{an}} \to \mathsf{X}$ est surjective (utiliser la prop. 2.4.4 de [**7**]) ; de plus, puisque $\mathscr{X}$ est supposé normal, l'espace X^{an} contient pour chaque composante irréductible X_j (réduite) de X un unique point ξ_j dont la réduction est le point générique de X_j : la semi-norme ξ_j est définie par la valuation discrète le long de X_j sur les algèbres affinoïdes $\Gamma(\pi^{-1}(\mathsf{U}), \mathscr{O}_X)$, pour $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}_j$ affine. Notons enfin L_i la réduction de $\mathscr{L}_i$ sur X.

Dans le cas algébrique, nos mesures sont des combinaisons linéaires de masses de Dirac :

Définition 2.4. — *On définit une mesure sur X^{an} par la formule*

$$c_1(\overline{L_1}) \cdots c_1(\overline{L_d}) = \frac{1}{e_1 \dots e_d} \sum_j \nu_j \big(c_1(\mathsf{L}_1) \cdots c_1(\mathsf{L}_d) | \mathsf{X}_j\big) \delta_{\xi_j},$$

où ν_j est la multiplicité de la composante X_j dans la fibre spéciale et δ_{ξ_j} la mesure de Dirac normalisée supportée en ξ_j.

Cette mesure dépend de manière d-linéaire symétrique des $\overline{L_i}$. Il résulte aussi de la définition que $c_1(\overline{L_1}) \cdots c_1(\overline{L_d})$ est une mesure positive si les $\overline{L_i}$ sont des faisceaux inversibles métrisés dont les métriques sont algébriques semi-positives. Enfin, la masse totale de cette mesure est égale au degré $(c_1(L_1) \dots c_1(L_d)|X)$.

Plus généralement, si Z est une sous-variété irréductible de X, de dimension e, on définit

$$c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z = i_* c_1(\overline{L}_1|_Z) \dots c_1(\overline{L}_e|Z),$$

où $i\colon Z^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est l'immersion canonique et i_* est l'application qu'on en déduit sur les mesures. C'est une mesure de masse totale $(c_1(L_1) \dots c_1(L_e)|Z)$, positive si les métriques sur les $\overline{L}_k$ sont algébriques semi-positives.

2.5. Lien avec la théorie de l'intersection. — Comme précédemment, soit $\mathscr{X}$ un K°-modèle normal de X. Désignons par $Z(\mathscr{X})$ le groupe des cycles sur $\mathscr{X}$, à coefficients entiers pour les cycles horizontaux et à coefficients réels pour les cycles verticaux.

Soit $\overline{L}$ un fibré en droite sur X muni d'une métrique définie par un modèle $\mathscr{L}$ de L^e sur $\mathscr{X}$. Toute section méromorphe s de L sur X a un diviseur $\widehat{\operatorname{div}}(s)$ qui est un diviseur de Cartier sur $\mathscr{X}$. Une composante irréductible X_j (munie de sa structure réduite) de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, apparaît avec multiplicité $-\log\|s\|(\xi_j)$, où ξ_j est l'unique point de X dont la réduction est le point générique de X_j.

Dans le cas où K° est un anneau de valuation discrète d'uniformisante π, la fonction π définit $\nu_j\mathsf{X}_j$ au voisinage du point générique ξ_j de X_j ; si s est une équation locale de X_j au voisinage de ce point générique, on a donc $-\log\|s\|(\xi_j) = -\log|\pi|/\nu_j$. Cela montre que la définition de $\widehat{\operatorname{div}}(s)$ coïncide avec celle définie en théorie de l'intersection arithmétique à un facteur $\log|\pi|^{-1}$ près. (Après traduction dans le langage des espaces de Berkovich, *cf.* aussi les prop. 7.2 et déf. 7.8 de **[19]**.)

Soit $\overline{L_0},\dots,\overline{L_d}$ des fibrés en droites métrisés sur X, dont les métriques sont définies par des modèles sur $\mathscr{X}$. Pour tout i, soit s_i une section méromorphe non nulle de L_i. Soit Z une sous-variété de dimension d de X.

Si les s_i s'intersectent proprement sur Z, la théorie de l'intersection arithmétique permet de définir la hauteur locale de Z relativement à ces sections, par exemple en extirpant de la définition globale (2.3.1) de la hauteur dans **[10]** la composante en la place qui nous intéresse. La prop. 2.3.1, formule (2.3.8), de *loc. cit.* montre que cette hauteur locale est définie par récurrence, par la formule

$$(\widehat{\operatorname{div}}(s_0)\dots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z) \\ = (\widehat{\operatorname{div}}(s_1)\dots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|\operatorname{div}(s_0|_Z)) - \int_X \log\|s_0\|\,c_1(\overline{L_1})\dots c_1(\overline{L_d})\delta_Z.$$

Cette dernière formule de récurrence vaut même si K° n'est pas un anneau de valuation discrète ; sous une forme essentiellement équivalente, elle est à la base de la définition par W. Gubler de hauteurs locales de cycles dans **[18]**.

L'intérêt de l'introduction des mesures $c_1(\overline{L_1})\dots c_1(\overline{L_d})\delta_Z$ vient de ce que la formule précédente vaut aussi dans le cas complexe, réinterprétée de sorte que $\overline{L}$ désigne un faisceau inversible muni d'une métrique $\mathscr{C}^\infty$, $c_1(\overline{L_i})$ est son courant de courbure et δ_Z est le courant d'intégration sur Z.

2.6. Passage à la limite. — Supposons maintenant que les $\overline{L_i}$ soient des faisceaux inversibles métrisés arbitraires sur X. Peut-on étendre la définition des hauteurs locales et des mesures donnée ci-dessus ? En reprenant les arguments de Zhang dans **[31]**, (1.4), nous allons voir que la réponse est essentiellement *oui* si les métriques sont intégrables.

Soit Z une sous-variété irréductible de X de dimension d. Soit $s_0,\dots,s_d$ des sections méromorphes de $L_0,\dots,L_d$ dont les diviseurs s'intersectent proprement sur Z.

Proposition 2.7. — *Supposons que pour tout i, $\overline{L_i}$ est muni d'une métrique semi-positive. Pour toute suite de métriques algébriques semi-positives $\overline{L_{i,n}}$ sur les L_i qui converge vers les métriques données,*

a) *La suite $(\widehat{\operatorname{div}}(s_{0,n})\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s_{d,n})|Z)$ des hauteurs locales de Z converge vers un nombre réel que l'on notera*

$$(\widehat{\operatorname{div}}(s_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z).$$

b) *La suite $c_1(\overline{L_{1,n}})\dots c_1(\overline{L_{d,n}})\delta_Z$ des mesures sur Z converge vers une mesure sur Z que l'on notera $c_1(\overline{L_1})\dots c_1(\overline{L_d})\delta_Z$.*

Démonstration. — *a*) L'espace des métriques continues sur un fibré en droite L est muni de la distance

$$d(\|\cdot\|,\|\cdot\|')=\log\sup\Big(\frac{\|\cdot\|'}{\|\cdot\|},\frac{\|\cdot\|}{\|\cdot\|'}\Big)$$

qui en fait un espace métrique complet. Montrons alors que la hauteur locale est une fonction uniformément continue sur le sous-espace des métriques semi-positives algébriques ; il en résultera que cette hauteur locale s'étend par continuité de manière unique à l'espace des métriques semi-positives.

Notons donc $(\overline{L}_0,\dots,\overline{L}_d)$ et $(\overline{L}'_0,\dots,\overline{L}'_d)$ deux familles de métriques algébriques semi-positives. Notons d_j la distance des métriques $\overline{L_j}$ et $\overline{L'_j}$. On notera $\widehat{\operatorname{div}}(s_j)$ le diviseur de s_j calculé pour la métrique de $\overline{L_j}$, et $\widehat{\operatorname{div}}(s'_j)$ celui calculé pour la métrique de $\overline{L'_j}$. On a alors

$$\begin{aligned}(\widehat{\operatorname{div}}(s'_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s'_d)|Z)&-(\widehat{\operatorname{div}}(s_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z)\\&=\sum_{k=0}^{d}\Big((\widehat{\operatorname{div}}(s'_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s'_k)\,\widehat{\operatorname{div}}(s'_{k+1})\dots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z)\\&\qquad-(\widehat{\operatorname{div}}(s'_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s'_k)\,\widehat{\operatorname{div}}(s_{k+1})\dots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z)\Big).\end{aligned}$$

D'après la proposition 9.5 de **[18]**, le terme d'indice k est majoré par

$$d_j(c_1(L_0)\dots c_1(L_{k-1})c_1(L_{k+1})\dots c_1(L_d)|Z),$$

qui est un multiple constant de la distance d_j. L'uniforme continuité en résulte, d'où l'existence des hauteurs locales pour des métriques semi-positives.

b) Pour montrer qu'une suite de mesure sur X^{an} converge, il suffit de prouver qu'elle n'a qu'une valeur d'adhérence, car X^{an} étant un espace topologique compact et métrisable, l'espace des mesures de probabilité sur X^{an} est compact pour la topologie de la convergence vague. Soit ν une valeur d'adhérence de la suite $c_1(\overline{L_{1,n}})\dots c_1(\overline{L_{d,n}})\delta_Z$.

Soit $\overline{L_0}$ et $\overline{L'_0}$ deux métriques algébriques semi-positives sur un fibré en droites très ample L_0. Soit s_0 une section globale de L_0 telle que $s_0,\dots,s_d$ se coupent proprement sur Z. On peut donc écrire $\widehat{\operatorname{div}}(s_0)' = \widehat{\operatorname{div}}(s_0) + a(f)$, où f est une fonction continue sur X^{an}. Par passage à la limite dans les hauteurs locales, on a donc

$$\begin{aligned}\int_X f\nu &= \lim_n \int a(f) c_1(\overline{L_{1,n}}) \dots c_1(\overline{L_{d,n}}) \delta_Z \\ &= \lim_n (\widehat{\operatorname{div}}(s_0)' \, \widehat{\operatorname{div}}(s_{1,n}) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_{d,n}) | Z) - (\widehat{\operatorname{div}}(s_0) \, \widehat{\operatorname{div}}(s_{1,n}) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_{d,n}) | Z) \\ &= (\widehat{\operatorname{div}}(s_0)' \, \widehat{\operatorname{div}}(s_1) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_d) | Z) - (\widehat{\operatorname{div}}(s_0) \, \widehat{\operatorname{div}}(s_1) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_d) | Z),\end{aligned}$$

ce qui montre que $\int f\nu$ est déterminé par l'accouplement de hauteurs locales. Comme l'espace vectoriel engendré par les fonctions f de cette forme est dense dans l'espace des fonctions continues sur X^{an}, il existe au plus une telle mesure ν, ainsi qu'il fallait démontrer. □

Supposons que pour tout j, $\overline{L_j}$ soit un fibré en droites munis d'une métrique intégrable et s_j est une section méromorphe des L_j. Si $\operatorname{div}(s_0), \dots, \operatorname{div}(s_d)$ s'intersectent proprement sur Z, on en déduit par multilinéarité une hauteur locale $(\widehat{\operatorname{div}}(s_0) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_d) | Z)$, ainsi qu'une mesure $c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_d) \delta_Z$.

Un cas particulier de cette construction justifie une notation supplémentaire : lorsque $Z = X$ et que les fibrés métrisés $\overline{L_i}$ sont tous égaux à un même fibré métrisé $\overline{L}$ dont le fibré en droites sous-jacent est *big*, on posera

$$\mu_{\overline{L}} = \frac{1}{c_1(L)^d} c_1(\overline{L})^d,$$

où d désigne donc la dimension de X. C'est une mesure de masse totale 1 sur X ; si la métrique de $\overline{L}$ est semi-positive, c'est même une mesure de probabilité.

2.8. Propriétés. — Soit $f \colon X \to Y$ un morphisme génériquement fini de K-variétés projectives intègres. Soit $\overline{L_i}$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$ des faisceaux inversibles métrisés sur Y dont les métriques sont intégrables. On a alors l'égalité de mesures sur Y^{an} :

$$f_*\big(c_1(f^*\overline{L_1}) \cdots c_1(f^*\overline{L_d})\big) = \deg(f) c_1(\overline{L_1}) \cdots c_1(\overline{L_d}).$$

Supposons que f soit fini et que X et Y soient normales ; on peut alors définir un homomorphisme trace $\mathscr{C}^0(X^{\mathrm{an}}) \to \mathscr{C}^0(Y^{\mathrm{an}})$. Soit $f' \colon X' \to Y$ la normalisation de Y dans une clôture galoisienne de l'extension finie $K(Y) \subset K(X)$. Le morphisme f' se factorise en $f \circ g$, où $g \colon X' \to X$ est un morphisme fini. En outre, le groupe $\operatorname{Gal}(K(X')/K(Y))$ agit sur X' par Y-morphismes ; il agit donc aussi sur $(X')^{\mathrm{an}}$. Si $\varphi \in \mathscr{C}^0(X^{\mathrm{an}})$, la fonction

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{[K(X') : K(X)]} \sum_{\gamma \in \operatorname{Gal}(K(X')/K(Y))} \varphi \circ \gamma$$

sur $(X')^{\mathrm{an}}$ est continue et descend à Y^{an} ; le morphisme $(X')^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ est fini, donc propre (prop. 3.4.7 et corollaire 3.3.8 de [**7**]) si bien que l'unique fonction $f_*(\varphi)$ sur Y^{an} telle que $\tilde{\varphi} = f_*(\varphi) \circ f'$ est continue. Par dualité, on en déduit un homomorphisme f^* sur les mesures.

On a alors

$$f^*(c_1(\overline{L_1})\cdots c_1(\overline{L_d})) = c_1(f^*\overline{L_1})\cdots c_1(f^*\overline{L_d}).$$

Ces formules sont en effet vérifiées si les métriques sont algébriques, ainsi qu'il résulte de la formule de projection. Le cas général s'en déduit par passage à la limite.

La compatibilité de ces mesures au produit est un peu plus subtile (mais guère plus difficile). Notons $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à un espace de Berkovich X. Si X et Y sont deux espaces de Berkovich, on dispose alors d'une application canonique, surjective et propre, $\alpha\colon |X\times Y| \to |X|\times|Y|$. Supposons que X et Y soient les analytifiés de K-variétés projectives ; notons $d=\dim X$, $e=\dim Y$. Soit $\overline{L}$ et $\overline{M}$ des faisceaux inversibles sur X et Y respectivement, munis de métriques intégrables. Notons $\overline{L}\boxtimes\overline{M}$ le faisceau inversible qui s'en déduit sur $X\times Y$; il est muni d'une métrique intégrable naturelle et l'on a, par passage à la limite du cas algébrique, la formule

$$\alpha_*\big(c_1(\overline{L}\boxtimes\overline{M})^{d+e}\big) = \binom{d+e}{d} c_1(\overline{L})^d\otimes c_1(\overline{M})^e,$$

où le produit tensoriel du membre de droite représente la mesure sur $|X|\times|Y|$, produit tensoriel des mesures $c_1(\overline{L})^d$ sur X et $c_1(\overline{M})^e$ sur Y.

2.9. Comparaison avec l'intersection d'Arakelov. — Il s'agit en fait de la généralisation par Zhang dans **[31]** de l'accouplement d'Arakelov qu'ont défini Gillet et Soulé (**[15, 10]**). Dans ce contexte, F est un corps de nombres, X est une F-variété projective, les $\overline{L_i}$ des faisceaux inversibles munis de métriques adéliques intégrables (*cf.* **[31]**).

Une telle métrique sur un fibré inversible L sur X est la donnée, pour toute place v de F, d'une métrique intégrable sur le fibré en droites sur la variété analytique X_v déduit de L. La condition pour la métrique d'être adélique signifie qu'il existe un modèle de X et L sur un ouvert de $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$ définissant simultanément presque toutes ces métriques. En particulier, la métrique v-adique de L est, pour presque toute place de F, algébrique.

Pour tout i, soit s_i une section méromorphe de L_i, choisies de sorte que les $\operatorname{div}(s_i)$ s'intersectent proprement sur la sous-variété Z de X. Pour toute place v, la théorie des hauteurs locales (*cf.* **[17]**) définit alors le nombre réel $\big(\widehat{\operatorname{div}}(s_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z\big)_v$; ces nombres sont presque tous nuls et l'on a la formule

$$(\widehat{c}_1(\overline{L_0})\cdots\widehat{c}_1(\overline{L_d})|Z) = \sum_v \big(\widehat{\operatorname{div}}(s_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z\big)_v \log N_v, \tag{2.10}$$

où N_v est le cardinal du corps résiduel de F en v.

Dans une suite d'approximations algébriques amples d'une métrique semi-positive donnée, le membre de gauche converge, ainsi que l'a montré Zhang ; la limite est notée naturellement $(\widehat{c}_1(\overline{L_0})\cdots\widehat{c}_1(\overline{L_d})|Z)$. Par ailleurs, les expressions définissant les hauteurs locales convergent place par place vers la quantité $\big(\widehat{\operatorname{div}}(s_0)\cdots\widehat{\operatorname{div}}(s_d)|Z\big)_v$ définie plus haut si v est non archimédienne ; une variante de ce raisonnement établirait le cas où v est archimédienne. La formule (2.10) est donc vérifiée pour des métriques adéliques semi-positives. Sa validité dans le cas de métriques intégrables en résulte par multilinéarité.

3. Équidistribution : le cas d'une métrique ample

Théorème 3.1. — *Soit X une variété projective sur un corps de nombres F. Soit L un fibré en droites ample sur X muni d'une métrique adélique semi-positive.*

Soit (x_n) une suite générique de points de $X(\overline{F})$ telle que $h_{\overline{L}}(x_n) \to h_{\overline{L}}(X)$. Alors, pour toute place v de F en laquelle la métrique de L est ample*, la suite des mesures (μ_{x_n}) sur l'espace X_v converge faiblement vers la mesure de probabilité $\mu_{\overline{L}_v}$.*

Dans le cas d'une place archimédienne, ce théorème est dû à Szpiro, Ullmo et Zhang (*cf.* [**25**]). Nous nous contenterons donc de donner la démonstration dans le cas non archimédien.

Rappelons tout d'abord ce que vaut la mesure limite, en supposant que v est une place ultramétrique. Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ un modèle sur $\mathfrak{o}_{F_v}$ définissant la métrique v-adique de $\overline{L}$. Notons $\mathsf{Y}_1, \dots, \mathsf{Y}_r$ les composantes irréductibles (réduites) de sa fibre spéciale en v et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, le point générique de Y_i est la réduction d'un unique point, η_i, de l'espace de Berkovich X_v. Alors,

$$\mu_{\overline{L}} = \frac{c_1(\overline{L})^{\dim X}}{c_1(L)^{\dim X}} = \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{(c_1(\mathscr{L})^{\dim \mathsf{Y}_i} | \mathsf{Y}_i)}{c_1(L)^{\dim X}} \delta_{\eta_i}.$$

Exemple 3.2. — Supposons que $X = \mathbf{P}^d$ et que $\overline{L} = \mathscr{O}(1)$, muni de sa métrique L^∞ qui donne lieu à la hauteur de Weil usuelle. Cette métrique est semi-positive et ample aux places ultramétriques, car définie par le modèle $(\mathbf{P}^d_{\mathfrak{o}_F}, \mathscr{O}(1))$. Pour toute place finie v, la mesure limite $\mu_{\overline{L}}$ sur l'espace de Berkovich $\mathbf{P}^d_{F_v}$ est la masse de Dirac au point canonique de $\mathbf{P}^d_{F_v}$ dont la réduction en v est le point générique de $\mathbf{P}^d_{k_v}$. Nous noterons ce point G_v car lorsque $d = 1$, il correspond à la norme de Gauss sur l'anneau des séries formelles restreintes $F_v\{T\}$.

On sait que $h_{\overline{L}}(\mathbf{P}^d) = 0$ (*cf.* [**28**] ou [**20**] pour le cas plus général des variétés toriques auquel, du reste, cet argument s'applique aussi). Il découle du théorème que pour toute suite générique (x_n) de points de $\mathbf{P}^d(F_v)$ dont la hauteur tend vers 0 et toute place finie v, la suite de mesure (μ_{x_n}) sur l'espace de Berkovich $\mathbf{P}^d_{F_v}$ converge vers la mesure de Dirac au point G_v. C'est l'analogue ultramétrique d'un théorème de Bilu.

Joint à la solution de la « conjecture de Bogomolov sur les tores » (Zhang [**28**]), notre théorème s'étend aux suites (« strictes ») de points de ${\mathbf{G}_{\mathrm{m}}}^d$ dont la hauteur tend vers 0 dont aucune sous-suite n'est contenue dans un sous-groupe algébrique strict. En effet, cette conjecture affirme que de telles suites sont génériques. Notons enfin que si le théorème d'équidistribution de Bilu ([**8**]) en fournit une démonstration, il ne semble pas que ce soit le cas pour notre théorème.

Exemple 3.3. — On peut aussi appliquer notre théorème au cas d'une variété abélienne, *en toute place finie v où elle a bonne réduction* (quitte à effectuer d'abord une extension des scalaires, bonne réduction potentielle suffit). La mesure limite est alors concentrée au point de l'espace de Berkovich dont la réduction est le point générique du modèle de la fibre spéciale. Les mêmes remarques concernant la conjecture de Bogomolov s'appliquent, ladite conjecture étant dans ce cas un théorème de S. Zhang ([**32**], voir aussi [**11**]).

La démonstration de ce théorème suit l'approche des théorèmes d'équidistribution initiée par Szpiro, Ullmo et Zhang et passe par plusieurs étapes.

Comme l'espace de Berkovich X_{F_v} est un espace topologique compact et métrisable, l'ensemble des mesures de probabilité sur X_{F_v} est compact pour la topologie vague et il suffit de prouver que la mesure $\mu_{\overline{L}}$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite (μ_{x_n}). Pour cela, on peut en outre supposer que la suite (μ_{x_n}) converge vaguement vers une mesure μ, il faut alors démontrer que $\mu = \mu_{\overline{L}}$. Le théorème 3.1 résulte alors des trois lemmes suivants.

Soit V un fermé de la fibre spéciale $\mathsf{X} = \mathscr{X} \otimes k_v$ de $\mathscr{X}$ en v ; nous appellerons tube de V, et noterons $]\mathsf{V}[$, l'image réciproque de V par l'application de réduction $X_{F_v} \to \mathsf{X}$.

Lemme 3.4. — *Si* V *ne contient pas de composante irréductible de* X, $\mu(]\mathsf{V}[) = 0$.

(On dira qu'un tel tube est *petit* ; cette notion dépend du choix de $\mathscr{X}$.)

Démonstration. — Soit $\mathscr{X}'$ l'éclatement de $\mathscr{X}$ le long de V et soit E le diviseur exceptionnel. Le fibré inversible $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}(-\mathsf{E})$ définit une métrique v-adique sur le fibré trivial $\mathscr{O}_X$; nous noterons φ_{V} la norme de la section 1. On a $\varphi_{\mathsf{V}} \geqslant 1$, et l'inégalité stricte vaut précisément aux points dont la réduction est dans V. Pour tout nombre réel a, notons $\overline{L}_a$ le faisceau L muni de la métrique adélique de L, sauf en v où on la multiplie par φ_{V}^a.

La description de $\mathscr{X}'$ comme le spectre projectif d'une algèbre graduée entraîne que $\mathscr{O}_{X'}(-\mathsf{E})$ est relativement ample pour le morphisme d'éclatement $\pi\colon \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$. Par suite, pour n assez grand, $\pi^*\mathscr{L}^{\otimes n}(-\mathsf{E})$ est ample sur $\mathscr{X}'$. En particulier, pour tout nombre rationnel $t > 0$ assez petit, $\overline{L}_t$ est un fibré inversible muni d'une métrique adélique semi-positive.

Le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique, sous la forme qui lui donne Zhang, s'écrit alors

$$\liminf_n \left(h_{\overline{L}}(x_n) - t\mu_{x_n}(\log\varphi_{\mathsf{V}})\right) \geqslant h_{\overline{L}_t}(X).$$

Par définition,

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_1(\overline{L}_t)^{\dim X} &= \big((\pi^*(\widehat{c}_1(\mathscr{L})) - t\widehat{c}_1(\mathscr{O}(\mathsf{E})))^{1+\dim X}\big|\mathscr{X}'\big) \\
&= \sum_{j=0}^{1+\dim X} (-t)^j \binom{1+\dim X}{j} \big(\pi^*\widehat{c}_1(\mathscr{L})^{1+\dim X-k}\widehat{c}_1(\mathscr{O}(\mathsf{E}))^k\big|\mathscr{X}'\big) \\
&= \big(\widehat{c}_1(\mathscr{L})^{1+\dim X}\big|\mathscr{X}\big)
\end{aligned}$$

d'après la formule de projection appliquée à π, car $\pi_* \widehat{c}_1(\mathscr{O}(\mathsf{E})) = 0$. Par suite, $h_{\overline{L}_t}(X) = h_{\overline{L}}(X)$. Par hypothèse, $h_{\overline{L}}(x_n)$ converge vers $h_{\overline{L}}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Faisant tendre $t > 0$ vers 0, on trouve

$$\mu(\log \varphi_{\mathsf{V}}) \leqslant 0.$$

En particulier, l'ensemble des points de X où $\log \varphi_{\mathsf{V}} > 0$ est μ-négligeable. On a donc $\mu(]\mathsf{V}[) = 0$, comme il fallait démontrer. □

Lemme 3.5. — *Pour* $1 \leqslant i \leqslant r$, $\mu(]\mathsf{Y}_i[)$ *est donné par la formule*

$$\mu(]\mathsf{Y}_i[) = m_i (c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i) / (c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | X).$$

Démonstration. — Fixons un entier $i \in \{1, \dots, r\}$; le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(-\mathsf{Y}_i)$ est un modèle du faisceau trivial $\mathscr{O}_X$ et le munit d'une métrique v-adique. Notons φ_i la norme de sa section canonique 1. Comme dans la démonstration du lemme précédent, $\varphi_i \geqslant 1$ et l'on a $\varphi_i(x) > 1$ si et seulement si $x \in]\mathsf{Y}_i[$. Pour $a \in \mathbf{R}$, notons alors $\overline{L}_a$ le fibré en droites L muni de la métrique adélique de $\overline{L}$, sauf en v où elle est multipliée par φ_i^a. La métrique en v de $\overline{L}$ est définie par un faisceau ample $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$; pour $t \in \mathbf{Q}$, $t = p/q$ avec p et $q \in \mathbf{Z}$, la métrique de $\overline{L}_t$ est définie par le faisceau $\mathscr{L}^q(-p\mathsf{Y}_i)$. Par suite, $\overline{L}_t$ est semi-positif pour $|t|$ assez petit.

Si $x \in X(\overline{F})$, on a $h_{\overline{L}_t}(x) = h_{\overline{L}}(x) - t\mu_x(\log \varphi_i)$, tandis que

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_1(\overline{L}_t)^{1+\dim X} &= \big(\widehat{c}_1(\overline{L}) - t\widehat{c}_1(\mathscr{O}(\mathsf{Y}_i))\big)^{1+\dim X} \big| \mathscr{X}\big) \\
&= \big(\widehat{c}_1(\overline{L})^{1+\dim X} \big| \mathscr{X}\big) - t\big(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} c_1(\mathscr{O}(\mathsf{Y}_i)) \big| \mathscr{X}\big) \log N_v + \mathrm{O}(t^2) \\
&= \widehat{c}_1(\overline{L})^{1+\dim X} - t(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i) \log N_v + \mathrm{O}(t^2).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$h_{\overline{L}_t}(X) = h_{\overline{L}}(X) - t\frac{(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i)}{(c_1(L)^{\dim X} | X)} \log N_v + \mathrm{O}(t^2).$$

L'inégalité de Zhang (Hilbert-Samuel arithmétique), appliquée à la suite (x_n) et au fibré $\overline{L}_t$, pour t assez petit, entraîne alors

$$\mu(\log \varphi_i) \leqslant \frac{(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i)}{(c_1(L)^{\dim X} | X)} \log N_v. \tag{3.6}$$

Le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(-\sum_{i=1}^r m_i \mathsf{Y}_i)$ est un modèle du faisceau trivial $\mathscr{O}_X$ et le munit de la métrique v-adique pour laquelle la section 1 a pour norme $\log N_v$. En sommant toutes les inégalités (3.6), on obtient

$$\log N_v \leqslant \sum_{i=1}^r m_i \frac{(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i)}{(c_1(L)^{\dim X} | X)} \log N_v.$$

Comme les deux membres de cette dernière inégalité sont égaux, les inégalités (3.6) sont en fait des égalités et

$$\mu(m_i \log \varphi_i) = m_i \frac{(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i)}{(c_1(L)^{\dim X} | X)}$$

pour tout entier $i \in \{1, \dots, r\}$.

Le fonction $m_i \log \varphi_i$ est nulle hors de $]\mathsf{Y}_i[$ et vaut $\log N_v$ sur le complémentaire de la réunion des petits tubes $]\mathsf{Y}_i \cap \mathsf{Y}_j[$, pour $j \neq i$. D'après le lemme 3.4, ces petits tubes sont μ-négligeables. Par suite,

$$\mu(]\mathsf{Y}_i[) = m_i \frac{(c_1(\mathscr{L})^{\dim X} | \mathsf{Y}_i)}{(c_1(L)^{\dim X} | X)}$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

Lemme 3.7. — *Soit K un corps complet pour une valuation ultramétrique non triviale, soit X un K-espace de Berkovich, fibre générique d'un R-schéma formel, plat et de type fini, $\mathscr{X}$. Notons X_i les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$ et, pour tout i, soit ξ_i le point de X dont X_i est la réduction. Soit ν une mesure sur X telle que tout petit tube est négligeable. Alors*

$$\nu = \sum_i \nu(]\mathsf{X}_i[) \delta_{\xi_i}.$$

Démonstration. — Les tubes sur l'intersection de deux composantes de la fibre spéciale sont petits, donc négligeables. Cela permet de supposer que X est le spectre de Berkovich d'une K-algèbre strictement affinoïde $\mathscr{A}$ et que $\mathscr{X} = \operatorname{Spf} \mathscr{A}^\circ$, la fibre spéciale X de $\mathscr{X}$ étant en outre irréductible. Soit ξ le point de X correspondant et soit U un voisinage de ξ dans X. Par définition de la topologie de X, il existe un ensemble fini de fonctions analytiques $f_j \in \mathscr{A}$, pour $j \in J$, et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que U contienne l'intersection

$$\bigcap_{j \in J} \{x \in X \,;\, |f_j|(\xi) - \varepsilon < |f_j|(x) < |f_j|(\xi) + \varepsilon\}.$$

En fait, $|f_j|(x) \leqslant |f_j|(\xi)$ pour tout $x \in X$ (**[7]**, prop. 2.4.4 ; $\{\xi\}$ est la frontière de Shilov de X). Par suite, le complémentaire de U est contenu dans la réunion finie

$$\bigcup_{j \in J} \{x \in X \,;\, |f_j|(x) < |f_j|(\xi)\}.$$

Quitte à remplacer f_j par $a f_j^{n_j}$ pour un certain $n_j \in \mathbf{N}^*$ et un certain $a \in K^*$, on peut en outre supposer que $|f_j|(\xi) = 1$. Alors, la réduction de f_j est une fonction non nulle sur le schéma irréductible X et la réunion ci-dessus est une réunion finie de petits tubes, donc est négligeable. Ainsi, $\nu(\complement U) = 0$.

Cela montre que le support de ν est réduit au point ξ, donc ν est un multiple de la mesure de Dirac en ξ ; la constante de proportionnalité est égale à $\nu(X)$. □

4. Équidistribution : le cas des courbes

Les résultats de ce paragraphe ont été provoqués par une remarque d'Amaury Thuillier selon laquelle, sur les courbes, le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique vaut sans autre condition de positivité que l'amplitude générique. C'est en effet ce qui est démontré par Faltings dans **[12]** lorsque les métriques archimédiennes sont admissibles au sens d'Arakelov, et généralisé par Autissier dans [**2**] au cas des métriques archimédiennes continues à courbure mesure.

Par un passage à la limite, on déduit du résultat d'Autissier la proposition suivante.

Proposition 4.1 **(Inégalité fondamentale)**. — *Soit X une courbe projective lisse sur un corps de nombres F. Soit L un fibré en droites ample sur X, muni d'une métrique adélique intégrable. Pour toute suite (x_n) de points distincts de $X(\overline{F})$, on a*

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant h_{\overline{L}}(X).$$

Démonstration. — Par définition, on peut écrire $\overline{L} = \overline{M} \otimes \overline{N}^{-1}$, où $\overline{M}$ et $\overline{M}$ sont deux fibrés en droites amples sur X, munis de métriques adéliques semi-positives. Soit $(\overline{M_k})$ et $(\overline{N_k})$ des suites de métriques adéliques algébriques semi-positives sur M et N qui convergent uniformément vers $\overline{M}$ et $\overline{N}$ respectivement. Pour tout k, posons $\overline{L}_k = \overline{M_k} \otimes \overline{N_k}^{-1}$. D'après la prop. 3.3.3 de [**2**], on a, pour tout entier k,

$$\liminf h_{\overline{L_k}}(x_n) \geqslant h_{\overline{L_k}}(X).$$

Lorsque k tend vers l'infini, $h_{\overline{L_k}}(x) = h_{\overline{M_k}}(x) - h_{\overline{N_k}}(x)$ converge vers $h_{\overline{L}}(x)$, uniformément en $x \in X(\overline{F})$, et $h_{\overline{L_k}}(X)$ converge vers $h_{\overline{L}}(X)$, par bilinéarité du produit d'intersection de Zhang et convergence dans le cas semi-positif. Il en résulte que

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant h_{\overline{L}}(X),$$

ce qui est l'inégalité de la proposition. □

Théorème 4.2. — *Soit X une courbe projective lisse sur un corps de nombres F. Soit L un fibré en droites ample sur X, muni d'une métrique adélique intégrable. Pour toute suite (x_n) de points distincts de $X(\overline{F})$ telle que $h_{\overline{L}}(x_n)$ converge vers $h_{\overline{L}}(X)/2\deg L$, et toute place v de F, la suite de mesures (μ_{x_n}) sur l'espace X_v converge vaguement vers la mesure $c_1(\overline{L})/\deg L$.*

Démonstration. — La démonstration reprend la méthode inaugurée par Szpiro, Ullmo et Zhang. Les fonctions continues sur X_v définies par des métriques algébriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues. Il suffit donc de prouver que pour toute telle fonction « algébrique » f, $\mu_{x_n}(f)$ converge vers $\int_{X_v} f c_1(\overline{L})/\deg L$. Appliquons l'inégalité de la proposition précédente au fibré métrisé $\overline{L} \otimes a(tf)$, pour $t \in \mathbf{R}$. On obtient

$$\liminf_n \big(h_{\overline{L}}(x_n) + t\mu_{x_n}(f)\big) \geqslant \frac{1}{2\deg L}\big(h_{\overline{L}}(X) + 2t\int_{X_v} f c_1(\overline{L}) + \text{terme en } t^2.$$

Par suite,

$$\liminf t\mu_{x_n}(f) \geqslant t\int_{X_v} f(c_1(\overline{L})/\deg L) + \mathrm{O}(t^2).$$

Il reste à faire tendre t vers 0 d'abord par valeurs inférieures, puis par valeurs supérieures. □

Remarquons que la même démonstration fournit un résultat adélique, à savoir l'équidistribution d'une suite de petits points dans le produit des espaces X_v en un nombre fini de places distinctes de F.

4.3. Systèmes dynamiques. — Cela s'applique notamment aux hauteurs normalisées par un système dynamique algébrique sur $\mathbf{P}^1$. On obtient ainsi l'équidistribution des points de petite hauteur, aux places ultramétriques, sous des hypothèses moins restrictives que les théorèmes de Baker-Hsia dans [**5**]. Bien sûr, l'équidistribution archimédienne résultait déjà du théorème d'Autissier ([**2**], prop. 4.1.4).

Pour pouvoir appliquer ce théorème sur des courbes plus générales que la droite projective, il importe de disposer de hauteurs normalisées intéressantes. On en construit en considérant des *correspondances*. Soit X un courbe projective lisse et soit $(p_1, p_2)\colon T \to X \times X$ une correspondance de bidegré (a, b). Si L est un fibré inversible sur X, le fibré T^*L est défini comme $N_{p_1}(p_2^*L)$, où N_{p_1} désigne la norme (sur la première classe de Chern, c'est $(p_1)_*$). Si $\overline{L}$ est un fibré muni d'une métrique algébrique (*resp.* continue), T^*L est muni d'une métrique algébrique (*resp.* continue) ; on notera $T^*\overline{L}$ le fibré métrisé correspondant. Si $\overline{L}$ est muni d'une métrique semi-positive, on vérifie aisément que le fibré $T^*\overline{L}$ est encore semi-positif ; par suite, l'opération $\overline{L} \to T^*\overline{L}$ préserve les fibrés en droites munis de métriques adéliques intégrables.

Soit L un fibré inversible sur X tel que T^*L soit isomorphe à L^b. Soit $\alpha\colon L^b \to T^*L$ un tel isomorphisme. *Supposons* $b > a$. il existe alors une unique métrique adélique intégrable (semi-positive si L est ample) sur L telle que l'homomorphisme $\alpha\colon \overline{L}^b \to T^*\overline{L}$ soit une isométrie. Cette métrique se définit de manière analogue à la métrique canonique d'un système dynamique, comme la limite de la suite de métriques $\|\cdot\|_n$, où $\|\cdot\|_{n+1} = (\alpha^*T^* \|\cdot\|_n)^{1/b}$, la métrique $\|\cdot\|_0$ étant une métrique algébrique arbitraire, semi-positive si L est ample (*cf.* [**3**], prop. 3.1 pour le cas d'une place archimédienne). Il en résulte une hauteur canonique $h_{\overline{L}}$ dans ce contexte, telle que $h_{\overline{L}}(T_*x) = bh_{\overline{L}}(x)$ et $h_{\overline{L}}(X) = 0$; le théorème 4.2 entraîne donc un résultat d'équidistribution sur les suites de petits points pour cette hauteur normalisée.

5. Le graphe de réduction

5.1. Soit X une courbe projective lisse sur un corps de nombres F. La mauvaise réduction de X en une place finie v peut être codée de manière commode dans son graphe de réduction, tel que l'ont défini Chinburg et Rumely. Supposons (quitte à étendre les scalaires) que X ait réduction semi-stable en v et notons p la caractéristique du corps résiduel en v. Le graphe de réduction est un graphe métrisé dont les sommets correspondent aux composantes irréductibles de la fibre spéciale du modèle minimal régulier (semi-stable), deux sommets sont reliés par autant d'arêtes de longueur $1/v(p)$ que les composantes correspondantes ont de points d'intersection communs. La résolution explicite des singularités de la forme $xy = a$, $a \in \mathfrak{o}_F$, montre que la construction du graphe de réduction commute aux extensions finies.

(Précisément, après une extension finie d'indice de ramification e, on doit éclater les points d'intersection $\lfloor e/2 \rfloor$ fois, cela remplace un segment de longueur ℓ dans le graphe par e segments de longueur ℓ/e.)

Dans son article **[29]**, S. Zhang incorpore à la géométrie d'Arakelov de l'analyse sur ce graphe, ce qui permet de prendre en compte des métriques adéliques naturelles, telles la hauteur de Néron–Tate d'une courbe elliptique lorsque celle-ci n'a pas bonne réduction partout. Du point de vue des fibrés en droites métrisés, on peut généraliser ce point de vue légèrement, en considérant des modèles réguliers dont la fibre spéciale ait des croisements normaux stricts : un tel modèle permet de définir un graphe de réduction sur lequel la théorie d'Arakelov non archimédienne dans le style de celle Zhang peut s'appliquer : c'est d'ailleurs ce que fait Rumely dans **[23]**.

5.2. Fixons une place ultramétrique v de F et soit R le graphe de réduction de X à la place v.

Soit E une extension finie de F et soit $\mathscr{X}_E$ le modèle semi-stable minimal de X_E sur $\mathfrak{o}_E$. L'application de spécialisation $\mathrm{sp}\colon X(E) \to R$ est définie de la façon suivante : un point $x \in X(E)$ se spécialise sur une composante bien définie de la fibre spéciale de $\mathscr{X}_E$ en v, et $\mathrm{sp}(x)$ est le point correspondant du graphe. Cette définition s'étend par linéarité en un homomorphisme toujours notée sp, du groupe des diviseurs sur $X_{\overline{F}}$ vers le groupe des diviseurs sur le graphe ; cet homomorphisme préserve le degré. Si $D = \sum n_i P_i$ est un diviseur sur $X_{\overline{F}}$, on notera μ_D la somme des mesures de Dirac $\sum n_i \delta_{\mathrm{sp}(P_i)}$ sur R ; c'est une mesure positive. À un point algébrique $x \in X(\overline{F})$, vu comme un diviseur de degré $[F(x) : F]$ sur $X_{\overline{F}}$, nous attachons la mesure de probabilité $([F(x) : F])^{-1}\mu_x$.

Suivant **[29]**, le graphe de réduction permet de décrire certaines classes de métriques adéliques intéressantes. Fixons un fibré en droites L sur X.

Tout fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}_E$ qui étend une puissance $L^{\otimes n_E}$ de L définit une métrique sur L. Pour cette métrique, les sections de norme $\leqslant 1$ en un point $P \in X(E)$, sont les suivantes : étendons d'abord P en un morphisme de $\mathfrak{o}_E$-schémas $\varepsilon_P\colon \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_{E'} \to \mathscr{X}_E$, une section s est de norme $\leqslant 1$ en P si et seulement si $\varepsilon_P^* s^{n_E}$ s'étend en une section de $\varepsilon_P^* \mathscr{L}_E$. Ce sont des métriques algébriques v-adiques ; nous noterons $\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{alg}}(X)$ le groupe des classes d'isométrie de fibrés inversibles sur $X_{\overline{F}}$, munis de telles métriques.

En particulier, tout diviseur effectif D sur X définit une métrique sur le fibré en droite $\mathscr{O}_X(D)$, cette métrique est définie par l'adhérence de D dans un modèle $\mathscr{X}_E$, où E est une extension de F de sorte que D soit somme de points E-rationnels de X. Cette définition s'étend au cas de diviseurs non nécessairement effectifs. Ce sous-groupe, image de $\mathrm{Div}(X)$ dans $\overline{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{alg}}(X)$ a un supplémentaire, fourni par les diviseurs verticaux à coefficients rationnels sur un modèle $\mathscr{X}_E$.

À un $\mathbf{Q}$-diviseur vertical, on attache une fonction continue, linéaire par morceaux sur R, dont la valeur en un point est, à un facteur de normalisation près, le coefficient de la composante verticale correspondante. Inversement, une fonction continue g sur R définit une métrique $\|\cdot\|_g$ sur le fibré en droites trivial, telle que $\|1\|_g(x) = \exp(-g(\mathrm{sp}(x)))$. Ce fibré métrisé est noté $\mathscr{O}(g)$.

Notons $\overline{\mathrm{Pic}}(X;R)$ le groupe des (classes d'isométrie) de fibrés métrisés sur X qui sont isomorphe à un fibré de la forme $\mathscr{O}_X(D)\otimes\mathscr{O}(g)$, où D est un diviseur sur X et g une fonction continue sur R.

Un fibré en droites métrisé $\overline{L}\in\overline{\mathrm{Pic}}(X;R)$ a une courbure $c_1(\overline{L})$, qui est une *distribution* sur R, définie de sorte que pour tout diviseur D sur X, $c_1(\mathscr{O}_X(D))=\mu_D$, et pour toute fonction continue g sur R, $c_1(\mathscr{O}(g))=-\Delta g$, où Δ est le laplacien sur le graphe R (*cf.* [**29**], A.3 pour la définition du laplacien d'une fonction « lisse », c'est-à-dire continue et dont la restriction à chaque arête est $\mathscr{C}^\infty$, on obtient la somme d'une mesure à densité lisse sur chaque arête et de mesures de Dirac aux sommets du graphe). Si la métrique sur $\overline{L}$ est semi-positive, cette distribution est en fait une mesure positive ; si elle est intégrable, c'est une mesure (« signée ») (la réciproque étant d'ailleurs vraie). Si L est ample et que sa métrique est intégrable, on notera $\mu_{\overline{L},R}$ la mesure de masse totale 1 sur R définie par $c_1(\overline{L})/\deg L$.

Théorème 5.3. — *Soit $\overline{L}$ un fibré en droites ample sur X, muni d'une métrique adélique intégrable. Supposons qu'en la place finie v de F, la métrique de $\overline{L}$ appartienne à $\overline{\mathrm{Pic}}(X;R)$. Alors, pour toute suite (x_n) de points distincts de $X(\overline{F})$ telle que $h_{\overline{L}}(x_n)\to h_{\overline{L}}(x)$, on a la convergence*

$$\mu_{x_n}\to\mu_{\overline{L},R}$$

de mesures sur R.

L'existence d'une telle suite entraîne en particulier que la mesure $\mu_{\overline{L},R}$ est positive.

Démonstration. — Soit φ une fonction lisse sur le graphe R. Pour tout ε, le fibré métrisé $\overline{L}(\varepsilon\varphi):=\overline{L}\otimes\mathscr{O}(\varepsilon\varphi)$ est intégrable. Il résulte alors de la proposition 4.1 que

$$\liminf h_{\overline{L}(\varepsilon\varphi)}(x_n)\geqslant h_{\overline{L}(\varepsilon\varphi)}(X). \tag{5.4}$$

Les définitions des hauteurs entraînent que

$$h_{\overline{L}(\varepsilon\varphi)}(x)=h_{\overline{L}}(x)+\int_R\varphi\mu_x\log N_v$$

et

$$\begin{aligned}h_{\overline{L}(\varepsilon\varphi)}(X)&=\frac{1}{2\deg L}\big(\widehat{c}_1(\overline{L}(\varepsilon\varphi))^2|X\big)\\&=h_{\overline{L}}(X)+\varepsilon\log N_v\int_R\varphi\frac{c_1(\overline{L})}{\deg L}+\varepsilon^2\log N_v\frac{1}{2\deg L}\int_R\varphi\Delta\varphi.\end{aligned}$$

Par le même raisonnement que dans les autres théorèmes d'équidistribution de cet article, on a alors

$$\int_R\varphi\mu_{x_n}\to\int_R\varphi\frac{c_1(\overline{L})}{\deg L}.$$

Un argument d'approximation immédiat entraîne le résultat pour toute fonction continue sur R, ce qui clôt la démonstration du théorème. □

L'exemple le plus intéressant est peut-être celui d'une courbe elliptique à mauvaise réduction en v. Son graphe de réduction R est alors (isométrique à) un cercle de longueur $\ell = v(\Delta_X)$. D'un point de vue très explicite, et à la suite de Tate [**26**], une telle courbe admet une uniformisation p-adique comme un quotient rigide analytique de $\mathbf{C}_p^*$ par un sous-groupe de la forme $q^{\mathbf{Z}}$, où $q \in F_v^*$ est de valeur absolue < 1. L'application de spécialisation $X(\overline{F}_v) \to R$ s'identifie alors à l'application

$$\log|\cdot|_v : \mathbf{C}_p^* \to \mathbf{R}, \quad \text{induisant} \quad \mathbf{C}_p^*/q^{\mathbf{Z}} \to \mathbf{R}/(\log|q|_v)\mathbf{Z} = R.$$

La hauteur de Néron-Tate sur X est donnée par le fibré en droites métrisé

$$\overline{L} = \mathscr{O}_X(0) \otimes \mathscr{O}(g_0), \qquad g_0(t) = \frac{1}{2\ell}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{\ell}{12}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ell.$$

Ainsi, $c_1(\overline{L}) = \mathrm{d}t/\ell$ est la mesure de probabilité invariante par translation sur le cercle.

Corollaire 5.5. — *Supposons que X soit une courbe elliptique à mauvaise réduction en v. Si (x_n) est une suite de points distincts de $X(\overline{F})$ dont les hauteurs de Néron-Tate tendent vers 0, les mesures μ_{x_n} sur le cercle de réduction convergent vers la mesure de probabilité invariante.*

En termes imagés, les spécialisations des x_n balayent régulièrement toutes les composantes irréductibles de la fibre spéciale de la limite inductive des modèles de Néron.

5.6. Ces résultats sont reliés à un théorème de Szpiro et Ullmo dans [**24**]. Si E est une extension finie de F et $P \in X(E)$, la condition que $P - 0 + \Phi_P$ ait une intersection nulle avec tout diviseur vertical définit un $\mathbf{Q}$-diviseur vertical Φ_P, unique à l'addition d'un l'image inverse d'un diviseur sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_E$ près. Le nombre d'intersection $-(\Phi_P)^2/[E:\mathbf{Q}]$ est alors positif et ne dépend pas de l'extension E. Szpiro et Ullmo démontrent (*loc. cit.*, Théorème 1.2) que pour un point P d'ordre n,

$$-\frac{1}{[F(P):\mathbf{Q}]}(\Phi_P)^2 = \frac{1}{6}\frac{\log N_{F/\mathbf{Q}}(\Delta_X)}{[F:\mathbf{Q}]} + \mathrm{o}(d(n)/n^2).$$

(Le terme d'erreur est très souvent nul, *cf. loc.cit.*) Du point de vue des graphes métrisés, on peut vérifier que la contribution de la place finie v au membre de gauche est égale à

$$\frac{1}{\ell}\int_R t(\ell - t)\,\mathrm{d}t = \ell\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\big) = \frac{1}{6}\ell = \frac{1}{6}v(\Delta_X).$$

Plus généralement, le théorème d'équidistribution 5.3 entraîne que pour toute suite (P_n) de points distincts de $X(\overline{F})$ dont les hauteurs de Néron-Tate convergent vers 0, $-(\Phi_{P_n})^2/[F(P_n):F]$ converge vers $\frac{1}{6}\frac{\log N_{F/\mathbf{Q}}(\Delta_X)}{[F:\mathbf{Q}]}$. En fait, ce dernier point requiert précisément une extension triviale du théorème 5.3 dans lequel toutes les places de mauvaise réduction seraient prises en compte.

5.7. Minoration de hauteurs. — Comme me l'a suggéré P. Autissier, et ainsi qu'il l'a lui-même montré aux places archimédiennes dans [**4**], on peut utiliser ces techniques de changement de métriques pour démontrer un énoncé « dual », à savoir minorer la limite des hauteurs d'une suite de points distincts dont les mesures ne convergent pas vers la mesure attendue.

Un résultat semblable vaut dans le cadre des espaces de Berkovich, avec la même démonstration que ci-dessous. Les techniques qu'A. Thuillier développe dans sa thèse [**27**] lui permettent d'obtenir un énoncé explicite sur une courbe arbitraire. Je me borne ici à exposer les résultats que l'on peut obtenir dans le contexte des graphes de réduction.

Soit C une partie fermée du graphe de réduction R et soit (x_n) une suite de points distincts de $X(\overline{F})$. Soit $\overline{L}$ un fibré inversible sur C muni d'une métrique adélique intégrable. On suppose que les mesures μ_{x_n} convergent vers une mesure ν dont le support est contenu dans C ; c'est par exemple le cas si les spécialisations des conjugués des x_n appartiennent toutes à C. Soit φ une fonction continue sur R, négative ou nulle sur C, et telle que $\Delta\varphi$ soit une mesure. On a alors

$$\liminf h_{\overline{L}(\varphi)}(x_n) = \liminf h_{\overline{L}}(x_n) + \nu(\varphi)\log N_v \leqslant \liminf h_{\overline{L}}(x_n).$$

Par ailleurs, le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique entraîne (*bis repetita...*) l'inégalité

$$\liminf h_{\overline{L}(\varphi)}(x_n) \geqslant h_{\overline{L}(\varphi)}(X) = h_{\overline{L}}(X) + \left(\int_R \varphi \frac{c_1(\overline{L})}{\deg L} + \frac{1}{2\deg L}\int_R \varphi\Delta\varphi\right)\log N_v.$$

On a donc une minoration

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant h_{\overline{L}}(X) + \left(\int_R \varphi \frac{c_1(\overline{L})}{\deg L} - \frac{1}{2\deg L}\int_R (\varphi')^2\right)\log N_v. \tag{5.8}$$

L'optimisation de cette inégalité conduit, si c'est possible, à prendre pour φ une fonction nulle sur C telle que $\Delta\varphi = -c_1(\overline{L})$ hors de C ; on obtiendrait alors

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant h_{\overline{L}}(x) + \frac{1}{2}\int_R \varphi \frac{c_1(\overline{L})}{\deg L}.$$

Contentons nous d'expliciter ici le cas où X est une courbe elliptique à mauvaise réduction ; le graphe R est donc un cercle de longueur ℓ, et supposons que le complémentaire de C dans R soit une réunion finie d'intervalles disjoints $]a_i, b_i[$, pour $1 \leqslant i \leqslant t$, avec $0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_t < b_t \leqslant \ell$. Sur $]a_i, b_i[$, on pose $\varphi(t) = c_i(t-a_i)(b_i-t)$, où c_i est une constante à déterminer ; sur C, on pose $\varphi(t) = 0$. Sur $]a_i, b_i[$, on a ainsi $\Delta\varphi = -2c_i$, si bien que le membre de droite de l'équation (5.8) vaut

$$\frac{\log N_v}{\ell}\sum_{i=1}^t \int_{a_i}^{b_i} c_i(1-\ell c_i)(t-a_i)(b_i-t) = \frac{\log N_v}{6\ell}\sum_{i=1}^t (b_i-a_i)^3 c_i(1-\ell c_i).$$

On choisit $c_i = 1/2\ell$, d'où la minoration

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant \frac{1}{24\ell^2} \sum_{i=1}^{t} (b_i - a_i)^3 \log N_v.$$

Soyons encore plus explicites en donnant trois exemples.

1) Si l'on demande aux points x_n de passera par la composante neutre du modèle de Néron en v, le support de la mesure ν est le point du graphe R correspondant à cette composante : on a donc $t = 1$, $a_1 = 0$ et $b_1 = \ell$. L'inégalité précédente devient

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant \frac{1}{24} v(\Delta_X) \log N_v.$$

Modulo l'extension de ce théorème à un nombre fini de places, on voit que pour toute suite (x_n) de points distincts de $X(\overline{F})$ qui sont des points entiers de la composante neutre du modèle de Néron de X sur $\mathfrak{o}_F$, la lim. inf. des hauteurs de Néron-Tate des x_n est au moins $\log \Delta_X / 24$.

2) Si l'on demande aux points x_n d'être des points entiers du modèle de Néron (supposé semi-stable) de X sur le corps F, cela revient à prendre $t = \ell$, et $a_i = i-1$, $b_i = i$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$. Alors,

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant \frac{1}{24 v(\Delta_X)} \log N_v.$$

3) On peut aussi exiger seulement que les points x_n évitent un point singulier de la fibre en v du modèle minimal régulier de X sur F. Cela revient à prendre $t = 1$, $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. On obtient alors

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant \frac{1}{24 v(\Delta_X)^2} \log N_v.$$

Références

[1] A. Abbes & T. Bouche – « Théorème de Hilbert–Samuel « arithmétique » », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.

[2] P. Autissier – « Points entiers sur les surfaces arithmétiques », *J. Reine Angew. Math.* **531** (2001), p. 201–235.

[3] ______, « Dynamique des correspondances algébriques et hauteurs », *Internat. Math. Res. Notices* **69** (2004), p. 3723–3739.

[4] ______, « Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur », 2004, arXiv, math.NT/0404355.

[5] M. Baker & L.-C. Hsia – « Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics », 2003, arXiv, math.NT/0305181.

[6] M. Baker & R. Rumely – « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory », 2004, arXiv, math.NT/0407426.

[7] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[8] Yu. Bilu – « Limit distribution of small points on algebraic tori », *Duke Math. J.* **89** (1997), no. 3, p. 465–476.

[9] S. Bosch & W. Lütkebohmert – « Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces », *Math. Ann.* **295** (1993), no. 2, p. 291–317.

[10] J.-B. Bost, H. Gillet & C. Soulé – « Heights of projective varieties and positive Green forms », *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), p. 903–1027.

[11] S. David & P. Philippon – « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes », in *International Conference on Discrete Mathematics and Number Theory* (Tiruchirapelli, 1996), Contemp. Math., 1998, p. 333–364.

[12] G. Faltings – « Calculus on arithmetic surfaces », *Ann. of Math.* **119** (1984), p. 387–424.

[13] C. Favre & J. Rivera-Letelier – « Equidistribution des points de petite hauteur », 2004, arXiv, math.NT/0407471.

[14] H. Gillet & C. Soulé – « Amplitude arithmétique », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), p. 887–890.

[15] ______, « Arithmetic intersection theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **72** (1990), p. 94–174.

[16] ______, « An arithmetic Riemann–Roch theorem », *Invent. Math.* **110** (1992), p. 473–543.

[17] W. Gubler – « Heights of subvarieties over M-fields », in *Arithmetic geometry* (F. Catanese, éd.), Symp. Math., vol. 37, 1997, p. 190–227.

[18] ______, « Local heights of subvarieties over non-archimedean fields », *J. Reine Angew. Math.* **498** (1998), p. 61–113.

[19] ______, « Local and canonical heights of subvarieties », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **2** (2003), no. 4, p. 711–760.

[20] V. Maillot – « Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables », *Mém. Soc. Math. France* (2000), no. 80, p. 129.

[21] N. Maïnetti – « Metrizability of some analytic affine spaces », in *p-adic functional analysis (Ioannina, 2000)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 222, Dekker, New York, 2001, p. 219–225.

[22] R. Rumely – *Capacity theory on algebraic curves*, Lecture Notes in Math., vol. 1378, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[23] ______, « An intersection pairing for curves, with analytic contributions from non-Archimedean places », in *Number theory (Halifax, NS, 1994)*, CMS Conf. Proc., vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 325–357.

[24] L. Szpiro & E. Ullmo – « Variation de la hauteur de Faltings dans une classe de $\overline{\mathbf{Q}}$-isogénie de courbe elliptique », *Duke Math. J.* **97** (1999), no. 1, p. 81–97.

[25] L. Szpiro, E. Ullmo & S.-W. Zhang – « Équidistribution des petits points », *Invent. Math.* **127** (1997), p. 337–348.

[26] J. Tate – « A review of non-archimedean elliptic function », in *Conference on elliptic curves and modular forms* (Hong Kong, 1993), 1995, p. 162–184.

[27] A. Thuillier – « Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov », 2005, Thèse de doctorat, université de Rennes 1, p. 187.

[28] S.-W. Zhang – « Positive line bundles on arithmetic surfaces », *Ann. of Math.* **136** (1992), no. 3, p. 569–587.

[29] ______, « Admissible pairing on a curve », *Invent. Math.* **112** (1993), no. 1, p. 171–193.

[30] ______, « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), p. 187–221.

[31] ______, « Small points and adelic metrics », *J. Algebraic Geometry* **4** (1995), p. 281–300.

[32] ______, « Equidistribution of small points on abelian varieties », *Ann. of Math.* **147** (1998), no. 1, p. 159–165.