Math. Ann. 314, 381–401 (1999)

Mathematische Annalen

Géométrie d'Arakelov et hauteurs canoniques sur des variétés semi-abéliennes

Antoine Chambert-Loir

Institut de Mathématiques de Jussieu, Boîte 247, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05
(e-mail address: chambert@math.jussieu.fr)

Received: 24 May 1998 / in final form: 11 December 1998

Mathematics Subject Classification (1991): 14G, 14K, 11G, 14G40, 14K15

1. Introduction

Dans cet article, nous voulons montrer comment la théorie d'Arakelov permet d'interpréter les hauteurs canoniques au sens de Call–Silverman [4] (voir aussi [1]) sur une extension d'une variété abélienne par le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Dans l'esprit de la construction arakelovienne de la hauteur de Néron–Tate (cf. [16, 17, 7]), nous montrons que sur une telle extension, il existe une hauteur canonique et elle est donnée par le degré d'Arakelov d'un fibré inversible sur un modèle convenable muni de métriques hermitiennes aux places archimédiennes. Le cas d'une variété semi-abélienne dont le tore sous-jacent est *déployé* se traite par les mêmes méthodes, voir la remarque 4.7.

Le modèle entier est donné grâce à la formule de Weil–Barsotti dans le cas de bonne réduction et à une extension de cette formule faisant intervenir la composante neutre des modèles de Néron en général (cf. [14, (5.1), p. 53]). Nous rappelons ceci au paragraphe 3.

Sur une variante entière de la compactification de Serre, Faltings-Wüstholz [19, 8] que nous exhibons au paragraphe 4, nous produisons des faisceaux inversibles relativement amples et les munissons de métriques hermitiennes à l'infini. Ceci fait, nous montrons au paragraphe 5 que l'on obtient la hauteur canonique en calculant le degré d'Arakelov d'un des fibrés inversibles métrisés précédemment définis (théorème 5.5 et corollaire 5.6). La preuve est alors analogue à celle de [17, 16]: le manque d'uniformité des modèles entiers est compensé par les propriétés du degré d'Arakelov calculé relativement aux morphismes de multiplication par un entier sur le groupe algébrique.

Nous donnons au paragraphe 6 contient quelques compléments sur les points de hauteur relative nulle et les ≪points de Ribet≫ de [11,1]. Dans le cas de bonne réduction, nous obtenons la caractérisation suivante (Proposition 6.1):

Soient K un corps de nombres et $\mathfrak{o}_K$ l'anneau des entiers de K. Soient $\mathcal{A}$ un $\mathfrak{o}_K$-schéma abélien et $1 \to \mathbf{G}_m \to \mathcal{E} \to \mathcal{A} \to 0$ une extension de $\mathcal{A}$ par $\mathbf{G}_m$ fournie par un faisceau inversible $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}^0(\mathcal{A})$. La section nulle de $\mathcal{E}$ induit une rigidification de $\mathcal{L}$ à l'origine de $\mathcal{A}$, laquelle rigidification détermine un isomorphisme du carré.

Le faisceau inversible $\mathcal{L} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathbf{C}$ sur $\mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathbf{C}$ admet alors une unique métrique hermitienne telle que l'isomorphisme du carré soit une isométrie.

Soit $x \in \mathcal{A}_K(K)$ et $\varepsilon_x : \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K \to \mathcal{A}$ l'unique section qui prolonge x. Il existe alors un point de hauteur relative nulle dans $\mathcal{E}_K(K)$ au-dessus de x si et seulement si l'élément $\varepsilon_x^* \mathcal{L}$ de $\widehat{\operatorname{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K)$ est trivial, c'est-à-dire admet une base de norme 1 en toute place.

Nous terminons cet article en évoquant brièvement comment l'on peut le formuler dans le langage des métriques adéliques de S. Zhang.

Cet article est une version légèrement remaniée du premier chapitre de ma thèse [5], soutenue en décembre 1995…

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Daniel Bertrand, pour son aide et ses encouragements incessants durant la gestation de ce travail. Je remercie enfin Ahmed Abbes et Jean-Benoît Bost pour leurs remarques, ainsi que le rapporteur pour sa lecture attentive.

2. Notations et conventions

Si X est un espace localement annelé et $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X, on utilise les conventions de [EGA II] en notant $\mathbf{V}(\mathcal{F}) = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym}^\bullet \mathcal{F}$ et $\mathbf{P}(\mathcal{F}) = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym}^\bullet \mathcal{F}$ les fibrés ≪vectoriels≫ et ≪projectifs≫ associés à $\mathcal{F}$. En particulier, un morphisme $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ définit des applications dans l'autre sens $\mathbf{V}(\mathcal{F}) \to \mathbf{V}(\mathcal{E})$ et $\mathbf{P}(\mathcal{F}) \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$, cette dernière n'étant définie que sur un ouvert si u n'est pas surjective. Nous commettrons l'abus de langage consistant à appeler fibré en droites un faisceau localement libre de rang 1.

Soit X un schéma plat et quasi-projectif sur $\mathbf{Z}$. Un fibré en droites métrisé sur X est la donnée d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X, ainsi que d'une métrique hermitienne (continue) sur le fibré complexe $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}$ sur $X(\mathbf{C})$. On demandera que la métrique hermitienne soit compatible à la conjugaison complexe. On note alors $\widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ le groupe abélien pour le produit tensoriel des classes d'isomorphisme de fibrés en droites métrisés. Tout morphisme de schémas $f : X \to X'$ induit un morphisme de groupes $f^* : \widehat{\operatorname{Pic}}(X') \to \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$.

Soit K un corps de nombres, $\mathfrak{o}_K$ son anneau d'entiers et notons $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$. Les éléments de $\widehat{\operatorname{Pic}}(S)$ sont alors les (classes d'isomorphisme de) $\mathfrak{o}_K$-modules projectifs $\mathcal{L}$ de rang 1 munis d'une métrique hermitienne sur les droites complexes $\mathcal{L} \otimes_\sigma \mathbf{C}$ (compatibles à la conjugaison complexe). Un élément de $\widehat{\operatorname{Pic}}(S)$ possède un degré d'Arakelov, défini par la formule

$$\widehat{\deg}\,(\mathcal{L}, \|\cdot\|_\sigma) = \log \#(\mathcal{L}/s\mathfrak{o}_K) - \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|s\|_\sigma,$$

où s est un élément non nul quelconque de $\mathcal{L}$; d'après la formule du produit, il est indépendant du choix de s. L'application $\widehat{\deg} : \widehat{\operatorname{Pic}}(S) \to \mathbf{R}$ est un homomorphisme de groupes abéliens.

Soit X un schéma plat et projectif sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K et $(\mathcal{L}, \|\cdot\|) \in \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$. Associons à tout point $P \in X_K(\overline{K})$ le réel $h(P) = [K' : \mathbf{Q}]^{-1} \widehat{\deg}\, \varepsilon_P^*(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ où K' est un corps de définition de P et $\varepsilon_P : \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_{K'} \to X$ est la section canonique. Alors, la fonction $P \mapsto h(P)$ est un représentant de la hauteur de Weil (logarithmique, absolue) de P pour le fibré en droites $\mathcal{L}_K$ sur X_K. (Voir [20], ou [3] pour des généralisations.)

3. Formule de Weil–Barsotti

Dans le cas d'une variété abélienne A sur un corps algébriquement clos k, cette formule identifie l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de A par le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ avec l'ensemble des points de la variété abélienne duale $A^\vee$.

Plus généralement, pour un schéma abélien A/S, notons $A^\vee$ le schéma abélien dual ([18]); on a alors un isomorphisme (Barsotti, Rosenlicht, Weil) canonique de foncteurs en groupes sur la catégorie des S-schémas:

$$\mathbf{Ext}^1_S(A, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} A^\vee\ .$$

Le but de ce paragraphe est de décrire cet isomorphisme et aussi l'extension (Artin, Mazur) de cet isomorphisme aux ≪variétés abéliennes dégénérantes≫: Soient S un schéma de Dedekind, c'est-à-dire un schéma normal noethérien de dimension 1 et $\pi : A \to S$ un ≪modèle de Néron≫. Autrement dit, il existe un ouvert dense U de S tel que A_U est un schéma abélien et A est le modèle de Néron de A_U sur S. On note A^0 la composante neutre de A c'est-à-dire le plus grand sous-schéma en groupes ouvert de A/S à fibres connexes. Soit $A^\vee$ le modèle de Néron dual, c'est-à-dire le modèle de Néron du schéma abélien dual $(A_U)^\vee$ (indépendant de U). On a alors la proposition:

Proposition 3.1 (Artin–Mazur, [14, Lemme (5.1), p. 53]). *Avec ces notations, il existe un unique isomorphisme de foncteurs sur la catégorie des S-schémas lisses*

$$\mathbf{Ext}^1_S(A^0, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} A^\vee$$

qui prolonge la dualité des schémas abéliens A_U et $(A_U)^\vee$.

La démonstration que donnent Mazur et Messing de cette proposition consiste à prouver que $\mathbf{Ext}^1_S(A^0, \mathbf{G}_m)$ vérifie la propriété universelle du modèle de Néron, à savoir que pour tout S-schéma lisse S', une S'-extension de $A_{U \times_S S'}$ par $\mathbf{G}_{mS'}$ se prolonge uniquement en une S'-extension de $A^0_{S'}$ par $\mathbf{G}_{mS'}$. Nous nous contenterons de donner ici une démonstration constructive de la bijectivité de l'application induite au niveau des S-points.

Lemme 3.2. *Soit S un schéma et A un schéma en groupes commutatif sur S tel que $\pi_* \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_S$. Notons m (resp. p_1, p_2) l'addition (resp. les deux projections) $A \times_S A \to A$.*

On a une bijection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de A par le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de couples $(\mathcal{L}, \varphi)$ formés d'un fibré inversible sur A et d'un isomorphisme du carré

$$\varphi : m^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}.$$

Démonstration. (Cf. [15], Appendice.) Décrivons cette application. D'après le théorème 90 de Hilbert, il correspond à une S-extension commutative $1 \to \mathbf{G}_m \to E \to A \to 0$ de A par $\mathbf{G}_m$ un espace principal homogène sous $\mathbf{G}_m$ sur A et donc un faisceau inversible $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(A)$ tel que E s'identifie au fibré en droites $\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)$ privé de sa section nulle.

Si S' est un S-schéma, $x \in A(S')$ et $\xi \in E(S')$ relève x, la translation T_x par x dans $A_{S'}$ (resp. T_ξ par ξ dans $E_{S'}$) nous fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_{S'} \arrow[r, "T_\xi"] \arrow[d] & E_{S'} \arrow[d] \\ A_{S'} \arrow[r, "T_x"] & A_{S'} \end{tikzcd} \quad .$$

Si $q : A_{S'} \to A$ et $\pi' : A_{S'} \to S'$ désignent les projections canoniques, on en déduit un isomorphisme $q^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} T_x^* q^* \mathcal{L}$ de faisceaux inversibles sur $A_{S'}$. Le point ξ correspond d'autre part à un isomorphisme $x^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{S'}$ d'où finalement un isomorphisme

$$\varphi_\xi : T_x^*(q^* \mathcal{L}) \otimes (x \circ \pi')^* \mathcal{L}^{-1} \otimes q^* \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_{A_{S'}}.$$

Or, si l'on tire le faisceau inversible $m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$ sur $A \times_S A$ par le morphisme $(x \times \mathrm{id}_A) : S' \times_S A \to A \times_S A$, on obtient

$$(x \times \mathrm{id}_A)^*(m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) = T_x^* q^*\mathcal{L} \otimes (x \circ \pi')^*\mathcal{L}^{-1} \otimes q^*\mathcal{L}^{-1},$$

d'où, finalement, un isomorphisme canonique

$$\varphi_\xi : (x \times \mathrm{id}_A)^*(m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) \simeq \mathcal{O}_{A_{S'}},$$

dont on vérifie aisément qu'il ne dépend pas du choix de ξ relevant x.

Appliquons cette situation au cas ≪universel≫ où $S' = E$, $x \in \mathrm{Hom}(E, A)$ est la projection et $\xi \in \mathrm{Hom}(E, E)$ est l'identité. Il en résulte une trivialisation de $m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$ sur $E \times_S A$ et, par descente fidèlement plate, une trivialisation de ce fibré sur $A \times_S A$, ce qu'on voulait.

Il est immédiat que cette application est un morphisme de groupes. Montrons qu'elle est injective, autrement dit qu'il existe une unique structure d'extension de A par $\mathbf{G}_m$ sur le schéma $E_0 = \mathbf{G}_m \times_S A$. En effet, la multiplication dans E_0 s'interprète comme une application $A \times_S A \to \mathbf{G}_m$ qui est nécessairement constante (la restreindre au deux facteurs A via ε_A et à la diagonale et utiliser que $\pi_*\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_S$), donc égale à 1, si bien que l'extension considérée est triviale.

Enfin, construisons la réciproque de cette application. Soit ainsi $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A)$ muni d'un isomorphisme $\varphi : m^*\mathcal{L} \simeq p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}$ et posons $E = \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\}$ le fibré en droites associé privé de sa section nulle. Le choix de l'élément neutre dans E revient à se donner un S-point de E au-dessus de ε_A, la section unité de A ; or, en tirant φ par l'homomorphisme $(\varepsilon_A, \mathrm{id}_A)$: $A = S \times_S A \to A \times_S A$, on obtient un isomorphisme $\varepsilon_A^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_S$ qui définit une section $\varepsilon_E : S \to E$ relevant ε_A. L'isomorphisme φ s'interprète alors comme un morphisme

$$m_E : \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \times_S \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \to \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)$$

qui relève la multiplication $m : A \times_S A \to A$ et compatible avec la section unité $\varepsilon_E : S \to E$ de E. C'est la loi de groupe sur E que l'on cherchait. En effet, l'associativité résulte du fait que les deux compositions

$$\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \times_S \big(\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \times_S \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)\big) \to \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)$$

et

$$\big(\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \times_S \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)\big) \times_S \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \to \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)$$

proviennent toutes deux d'un isomorphisme

$$p_{123}^*\mathcal{L} \to p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*\mathcal{L},$$

p_1, p_2, p_3 désignant les projections $A^3 \to A$ et $p_{123} : A^3 \to A$ étant l'addition des trois composantes. Le fait que $\pi_*\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_S$ implique qu'un tel isomorphisme est unique.

De même, la commutativité de la loi de groupe est une conséquence de la symétrie de l'isomorphisme rigidifié $m^*\mathcal{L} \simeq p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}$.

En tirant φ par l'homomorphisme $([1]_A, [-1]_A)$ et en utilisant la rigidification de $\mathcal{L}$ le long de ε_A, on obtient un isomorphisme $[-1]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^\vee$, d'où un morphisme

$$\iota_E : \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\} \to \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\}$$

qui relève l'inversion $[-1]_A$ dans A (il associe à une base de $\mathcal{L}|_x$ la base duale de $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{L}|_{-x}$). La composée $m_E \circ (\mathrm{id}_E, \iota_E)$ est une application $E \to E$ constante sur les fibres de la projection $E \to A$ et à valeurs dans la fibre de E au-dessus de ε_A. Elle est ainsi constante et vaut ε_E, ce qui prouve que ι_E est le morphisme ≪inverse≫.

Nous avons ainsi associé à tout couple $(\mathcal{L}, \varphi)$ une extension de A par $\mathbf{G}_m$ dont l'espace sous-jacent est $\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\}$; cette application est la réciproque voulue. □

Comme le schéma abélien dual $A^\vee = \mathrm{Pic}^0(A/S)$ est donné par de tels couples $(\mathcal{L}, \varphi)$, la formule de Weil–Barsotti est établie dans le cas des schémas abéliens.

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses de la proposition 3.1 et démontrons qu'il existe une bijection $\mathrm{Ext}^1_S(A^0, \mathbf{G}_m) \simeq A^\vee$.

Comme un modèle de Néron vérifie toujours $\pi_*\mathcal{O}_{A^0} = \mathcal{O}_S$, le lemme précédent et la formule de Weil–Barsotti sur A_U nous ramène à montrer le fait suivant : soit $\mathcal{L}_U \in \mathrm{Pic}(A_U)$ muni d'un isomorphisme du carré $m^*_{A_U}\mathcal{L}_U \to p_1^*\mathcal{L}_U \otimes p_2^*\mathcal{L}_U$, alors il existe une unique façon de prolonger ces données en un faisceau inversible $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A^0)$ et un isomorphisme $m^*_{A^0}\mathcal{L} \to p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}$.

Choisissons un diviseur $D_U \in \mathrm{Div}(A_U)$ tel que $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D_U)$. Comme A^0 est régulier, l'adhérence schématique D de D_U dans A^0 est un diviseur de A^0 et définissons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}(D)$. Le faisceau inversible $m^*_{A^0}\mathcal{L}_2 \otimes p_1^*\mathcal{L}_2^\vee \otimes p_2^*\mathcal{L}_2^\vee$ est (sur S) génériquement trivial, puisque trivial une fois restreint à $A_U \times_U A_U \subset A^0 \times_S A^0$. Comme la projection $\pi_2 : A^0 \times_S A^0 \to S$ est à fibres géométriquement irréductibles et comme S est de Dedekind, il provient de la base et est donc de la forme $\pi_2^*\mathcal{M}$, le faisceau inversible $\mathcal{M}_U$ étant canoniquement trivial. Posons finalement $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \otimes \pi^*\mathcal{M}^\vee$. C'est un élément de $\mathrm{Pic}(A^0)$ muni d'un isomorphisme du carré comme on voulait, ce qui prouve l'existence du prolongement.

L'unicité du prolongement se démontre de même, si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux prolongements, le faisceau inversible $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}^\vee$ est génériquement trivial. Il provient ainsi de la base, mais le faisceau inversible sur S dont il provient est nécessairement trivial à cause des isomorphisme du carré. Ainsi, il existe un isomorphisme $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ compatible aux deux isomorphismes du carré.

4. Compactification, métriques

Soit S un schéma de Dedekind connexe, notons η son point générique. Soient A_η une η-variété abélienne, A son modèle de Néron sur S et A^0 la composante neutre de A. Soient E_η une extension de A_η par $\mathbf{G}_m$ et E l'extension de A^0 par $\mathbf{G}_m$ fournie par la proposition 3.1. Notons $\mathcal{L}$ le faisceau inversible sur A^0 associé à E, vue comme $\mathbf{G}_m$-torseur, de sorte que E s'identifie à $\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\}$.

On pose $\mathcal{W} = \mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^\vee$ et on définit $\overline{E}$ comme $\mathbf{P}(\mathcal{W})$. C'est un A^0-fibré projectif dont E est un ouvert. En effet, si $P \in A^0(S)$ et $\varepsilon_P : S \to A^0$ est la section correspondante, un S-point de $\overline{E}$ au-dessus de P correspond à un quotient localement libre de rang 1 : $(\alpha, \beta) : (\mathcal{O}_S \oplus \varepsilon_P^* \mathcal{L}^\vee) \to \mathcal{J}$. Parmi ceux-ci, les points de E correspondent aux couples (α, β) qui sont tous deux des isomorphismes. Le complémentaire de E dans $\overline{E}$ est alors constitué de l'≪infini≫ (donné par $\alpha = 0$) et de ≪zéro≫ (donné par $\beta = 0$).

Ainsi, les projections de $\mathcal{W}$ vers $\mathcal{O}_{A^0}$ (resp. $\mathcal{L}^\vee$) définissent deux sous-schémas de $\overline{E}$, respectivement les sections ≪nulle≫ et ≪infini≫ (la section nulle est effectivement la section nulle de $\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee)$). Ce sont deux diviseurs relatifs de $\overline{E}$ au-dessus de A^0, notons les D_0 (resp. D_∞). Notant π la projection $\mathbf{P}(\mathcal{W}) \to A$, il résulte du lemme suivant que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{W})}(D_0 - D_\infty) = \pi^* \mathcal{L}$.

Lemme 4.1. (cf. [10, Chap. V, Prop. 2.6]) *Soient X un schéma, $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang $n+1$ sur X et $\pi : \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$. Si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}$ sont deux faisceaux localement libres sur X, de rang 1 et n respectivement, avec une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{E} \to \mathcal{V} \to 0$, l'image de $\mathbf{P}(\mathcal{V}) \hookrightarrow \mathbf{P}$ est un diviseur D dans $\mathbf{P}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(D) \otimes \pi^* \mathcal{N}$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee$ et $\mathbf{P}' = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$. Comme $\mathcal{N}$ est inversible, $\mathbf{P}'$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{P}$, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}'}(1)$ s'identifiant d'après [10, Chap. II, Lemma 7.9] à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \mathcal{N}^\vee$. Cela nous ramène à prouver le lemme quand $\mathcal{N}$ est trivial. Dans ce cas, l'injection $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{E}$ s'interprète comme un élément non nul de $\Gamma(X, \mathcal{E})$, puis comme $\pi_* \mathcal{O}(1) = \mathcal{E}$, comme une section s non nulle de $\Gamma(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$ dont le diviseur est égal à D ; ainsi, le lemme est démontré. $\square$

Notons $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_\infty$ les faisceaux inversibles associés aux diviseurs D_0 et D_∞. Ainsi, $\mathcal{M}_\infty \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ et $\mathcal{M}_0 \otimes \mathcal{M}_\infty^\vee \simeq \pi^* \mathcal{L}$. Si $\sigma : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to S$ est un point complexe de S, montrons comment munir les faisceaux inversibles $\sigma^* \mathcal{M}_0$ (resp. $\sigma^* \mathcal{M}_\infty$) de métriques hermitiennes.

Montrons tout d'abord l'existence d'une ≪métrique carrée≫ sur $\mathcal{L}$ (cf. [17, II.2] dans le cas cubiste, cf. aussi [12], ch. 11, thm. 1.1) :

Proposition 4.2. *Soient A une variété abélienne complexe et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A algébriquement équivalent à zéro et rigidifié à l'origine.*

Alors, il existe une unique métrique hermitienne sur $\mathcal{L}$ telle que l'unique ≪isomorphisme carré≫ $m^*\mathcal{L} \simeq p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}$ compatible avec la rigidification à l'origine soit une isométrie. Cette métrique est de plus l'unique métrique hermitienne sur $\mathcal{L}$ compatible à la rigidification et dont la forme de courbure est nulle.

Démonstration. Tout d'abord, $c_1 \in H^2_{dR}(A)$ est la première classe de Chern de $\mathcal{L}$, il existe d'après la théorie de Hodge une unique forme différentielle invariante par translations qui représente c_1. D'autre part, le ≪lemme $\partial\overline{\partial}$≫ (cf. [9, pp. 148–149]) implique l'existence d'une métrique hermitienne sur $\mathcal{L}$ dont la forme de courbure soit cette forme différentielle, et deux telles métriques diffèrent d'une constante strictement positive. Il existe ainsi sur $\mathcal{L}$ une unique métrique qui soit compatible à la trivialisation à l'origine et dont la forme de courbure soit invariante par translations. Enfin, $\mathcal{L}$ appartenant à $\mathrm{Pic}^0(A)$, on a $c_1 = 0$ et la courbure de la métrique est nulle.

Enfin, le fibré $m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^\vee \otimes p_2^*\mathcal{L}^\vee$, trivial, est muni d'une métrique hermitienne dont la forme de courbure est nulle. Par suite, il possède une section globale sans zéros dont la norme est une fonction harmonique et donc constante, A étant compacte. Ainsi, la norme de l'isomorphisme carré est constante ; sa valeur à l'origine est par définition égale à 1, d'où la proposition. □

Corollaire 4.3. *Avec les notations de la proposition précédente, l'unique isomorphisme $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$ compatible aux rigidifications à l'origine est une isométrie.*

Démonstration. La proposition précédente nous fournit sur le faisceau inversible $[n]^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\vee n}$, canoniquement isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_A$, une métrique hermitienne canonique dont il faut vérifier qu'elle est triviale. Or, d'une part cette métrique est constante (sa forme de courbure étant nulle), et d'autre part, la norme de la section 1 vaut 1 à l'origine, ce qui achève la preuve du corollaire. □

La proposition précédente nous fournit une métrique canonique sur $\sigma^*\mathcal{L}$, si bien que $\mathcal{W}$ est muni, pour tout point complexe $\sigma : \mathrm{Spec}\,\mathbf{C} \to S$ de S, d'une métrique continue $\|\cdot\|^\sigma_{\mathcal{W}}$: si $s = (s_1, s_2)$ est une section locale de $\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}^\vee$, on définit

$$\|s\|^\sigma_{\mathcal{W}}(x) = \|s_1\|(x^\sigma) + \|s_2\|(x^\sigma).$$

Comme le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ est un quotient de $\pi^*\mathcal{W}$, il est naturellement muni d'une métrique hermitienne: par définition, la norme d'une section locale s de $\mathcal{O}_P(1)$ en un point x est la borne inférieure des normes en x des sections locale de $\pi^*\mathcal{W}$ dont l'image est s. Nous donnons une formule explicite dans le lemme 4.4 ci-dessous.

D'après le lemme 4.1, $\mathcal{M}_0 = \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ ce qui nous donne une métrique hermitienne canonique ω_0 sur $\mathcal{M}_0$ en prenant le produit tensoriel des deux métriques sur $\pi^*\mathcal{L}$ et sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. De même, $\mathcal{M}_\infty$ est muni d'une métrique hermitienne canonique ω_∞.

Donnons maintenant une formule explicite pour la norme en un point $P \in E(\mathbf{C})$ des sections canoniques s_{D_∞} et s_{D_0} des faisceaux $\mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_0$ dont le diviseur est D_∞ et D_0.

Lemme 4.4. *Fixons une place complexe $\sigma : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to S$. Soit $x \in A(\mathbf{C})$ et e une base normée de $\mathcal{L}_x^\vee$; soit aussi un point $P \in \overline{E}(\mathbf{C})$ relevant x, ainsi qu'une base ε de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)_P$. Le point P correspond alors à deux nombres complexes u_1 et u_2 par le quotient*

$$\mathcal{O}_x \oplus \mathcal{L}_x^\vee \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)_P, \qquad t_1 + t_2 e \mapsto (t_1u_1 + t_2u_2)\varepsilon.$$

Alors,

$$\|s_{D_\infty}\|(P) = \frac{|u_1|}{\max(|u_1|, |u_2|)} \quad \text{et} \quad \|s_{D_0}\|(P) = \frac{|u_2|}{\max(|u_1|, |u_2|)}.$$

Remarque 4.5. Ces métriques sont seulement continues alors que la géométrie d'Arakelov considère usuellement des métriques $\mathcal{C}^\infty$; c'est cependant cette métrique qui reflète précisément l'action du tore sur la compactification, cf. la proposition 4.6, et donnera ainsi lieu aux hauteurs canoniques. D'autre part, lorsqu'on considère la hauteur de points rationnels, il suffit de choisir une métrique continue. Enfin, comme c'est une limite uniforme de métriques lisses, les arguments de [21] montrent que la considération de cette métrique est légitime dans le contexte de la géométrie d'Arakelov en dimension supérieure, par exemple pour étudier la hauteur des cycles.

Preuve du lemme. La section $(1,0) \in \Gamma(\pi^*(\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}^\vee))$ ayant pour image la section s_{D_∞} de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$, on a

$$\begin{aligned}\|s_{D_\infty}\|(P) &= \inf_{(x_1,x_2e)\mapsto s_\infty} \|x_1 + x_2 e\|_{\mathcal{W}} = \inf_{x_1u_1+x_2u_2=u_1} |x_1| + |x_2| \\ &= |u_1| \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbf{C}^2} \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1u_1 + x_2u_2|} = \frac{|u_1|}{\max(|u_1|, |u_2|)}.\end{aligned}$$

La section rationnelle s_{D_0}/s_{D_∞} de $\mathcal{M}_0 \otimes \mathcal{M}_\infty^\vee = \pi^*\mathcal{L}$ associe au point P l'élément $(u_2/u_1)e^\vee$. Sa norme est donc $|u_1/u_2|$ puisque $\|e^\vee\| = \|e\| = 1$. On a donc

$$\|s_{D_0}\|(P) = |u_2/u_1| \, \|s_{D_\infty}\|(P) = \frac{|u_2|}{\max(|u_1|, |u_2|)}. \quad \square$$

Étudions enfin le comportement des objets que nous venons d'introduire par rapport aux morphismes de multiplication par n dans E.

Proposition 4.6. *Le morphisme $[n]_E : E \to E$ s'étend uniquement en un morphisme $\overline{E} \to \overline{E}$, toujours noté $[n]$. De plus, on a des isométries: si $n \geq 0$, $[n]^*\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}_0^n$ et $[n]^*\mathcal{M}_\infty \simeq \mathcal{M}_\infty^n$; si $n \leq 0$, on a en revanche $[n]^*\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}_\infty^{|n|}$ et $[n]^*\mathcal{M}_\infty \simeq \mathcal{M}_0^{|n|}$.*

Démonstration. Si $n \in \mathbf{Z}$, la multiplication par n dans E provient du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbf{V}(\mathcal{L}^{\vee n}) \setminus \{0\} \arrow[r, equal] \arrow[dr] & \mathbf{V}([n]^*\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\} \arrow[d] \\
 & & A^0 \arrow[r] & A^0
\end{tikzcd} ,$$

où, l'application $\mathbf{V}(\mathcal{L}^\vee) \setminus \{0\} \to \mathbf{V}(\mathcal{L}^{\vee n}) \setminus \{0\}$ associe à une section sans zéros de $\mathcal{L}$ la puissance tensorielle n-ème de cette section, et le carré de droite est cartésien. Il en résulte que le morphisme $[n] : E \to E$ s'étend à $\overline{E}$ selon le diagramme, dont le carré de droite est cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(\mathcal{W}) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbf{P}(\mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^{\vee n}) \arrow[r, equal] \arrow[dr] & \mathbf{P}([n]^*\mathcal{W}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbf{P}(\mathcal{W}) \arrow[d] \\
 & & A^0 \arrow[r] & A^0
\end{tikzcd} ,$$

la flèche $\mathbf{P}(\mathcal{W}) \to \mathbf{P}(\mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^{\vee n})$ étant donnée au niveau des S-points par l'application

$$((\alpha, \beta) : \mathcal{O}_S \oplus \varepsilon_P^* \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{J}) \longmapsto ((\alpha^{\otimes n}, \beta^{\otimes n}) : \mathcal{O}_S \oplus \varepsilon_P^* \mathcal{L}^{\vee n} \to \mathcal{J}^{\otimes n})$$

quand $n \geq 0$, et par

$$\begin{aligned}
&((\alpha, \beta) : \mathcal{O}_S \oplus \varepsilon_P^* \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{J}) \longmapsto \\
&\quad ((\beta^{\otimes |n|}, \alpha^{\otimes |n|}) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}^{\otimes |n|}} : \mathcal{O}_S \oplus \varepsilon_P^* \mathcal{L}^{\otimes |n|} \to \mathcal{J}^{\otimes |n|} \otimes \mathcal{L}^{\otimes |n|})
\end{aligned}$$

lorsque $n \leq 0$.

En général, un morphisme $\mathbf{P}(\mathcal{W}) \to \mathbf{P}(\mathcal{W})$ relevant la multiplication par n sur A^0 qui envoie par image réciproque le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ correspond à la donnée d'un morphisme surjectif

$$\pi^*[n]_A^*(\mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^\vee) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n).$$

La multiplication par $n \geq 0$ sur $\overline{E}$ est ainsi donnée par les flèches naturelles

$$\pi^*(\mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^{\vee n}) \to \pi^* \operatorname{Sym}^n(\mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^\vee) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n).$$

Lorsque $n \leq 0$, la multiplication par n correspond à la composition

$$\begin{aligned}
&\pi^*(\mathcal{O}_{A^0} \oplus \mathcal{L}^{\otimes |n|}) \simeq \pi^*(\mathcal{L}^{\vee n} \oplus \mathcal{O}_{A^0}) \otimes \pi^* \mathcal{L}^{\otimes |n|} \to \\
&\quad \to \pi^* \operatorname{Sym}^{|n|}(\mathcal{L}^\vee \oplus \mathcal{O}_{A^0}) \otimes \pi^* \mathcal{L}^{\otimes |n|} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(|n|) \otimes \pi^* \mathcal{L}^{\otimes |n|}.
\end{aligned}$$

Quand $n \geq 0$, on a ainsi $[n]_E^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$, tandis que quand $n \leq 0$, on a $[n]_E^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(|n|) \otimes \pi^* \mathcal{L}^{\otimes |n|}$.

Il reste à montrer que ces isomorphismes respectent les métriques hermitiennes : pour cela, il suffit de montrer que les isomorphismes

$$\begin{aligned} [n]^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \quad (\text{pour } n \geq 0) \\ \text{et } \ [-1]^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \pi^* \mathcal{L} \end{aligned}$$

respectent eux-mêmes les métriques, les formules pour $\mathcal{M}_0$ s'en déduiront puisque $[n]^* \mathcal{L}$ est isométrique à $\mathcal{L}^n$ (corollaire 4.3).

Dans un souci d'allègement, on effectue le changement de base de S à $\mathbf{C}$ sans changer les notations. Soient x un point de $A(\mathbf{C})$ et $P \in \bar{E}(\mathbf{C})$ relevant x, et, comme dans le lemme 4.4, e une base normée de $\mathcal{L}_x^\vee$, ε une base de $\mathcal{O}(1)_P$, et $(u_1, u_2) \in \mathbf{C}^2$ tels que P soit défini par le quotient $\mathcal{O}_x \oplus \mathcal{L}_x^\vee \to \mathcal{O}_P(1)_P$, $x_1 + x_2 e \mapsto (x_1 u_1 + x_2 u_2)\varepsilon$.

Alors, si $n \geq 1$, $f = e^{\otimes n}$ s'identifie à un élément non nul de $\mathcal{L}_{[n]x}^\vee$, dont la norme est $\|f\| = \|e\|^n = 1$. De plus, dans les bases f de $\mathcal{L}_{[n]x}^\vee$ et $\varepsilon^{\otimes n}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)_{[n]P}$, le point $[n]P$ correspond au couple (u_1^n, u_2^n) si bien que $\|s_\infty\|([n]P) = \|s_\infty\|(P)^n$, ainsi qu'il fallait démontrer.

Pour $n = -1$, soit $f = e^\vee$ la base de $\mathcal{L}_{-x}^\vee \simeq \mathcal{L}_x^{\vee\vee}$ duale de e, de sorte que $\|f\| = 1$. Le point $[-1]P$ correspond au quotient $\mathcal{O}_x \oplus \mathcal{L}_{-x}^\vee \to \mathcal{O}_P(1)_P \otimes \mathcal{L}_x$ défini par $(x_1 + x_2 f) \mapsto (x_1 u_2 + x_2 u_1)\varepsilon \otimes f$, de sorte que

$$\|s_{D_\infty}\|([-1]P) = \frac{|u_2|}{\max(|u_1|, |u_2|)} = \|s_{D_0}\|(P)$$

d'où le résultat puisque $[-1]^* D_0 = D_\infty$. □

Remarque 4.7. La même méthode permet de traiter le cas d'une variété semi-abélienne dont le tore sous-jacent est déployé. En effet, cela nous ramène à une extension d'une variété abélienne par une puissance ${\mathbf{G}_m}^t$, d'où t fibrés algébriquement équivalents à 0 : $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t$ que l'on peut métriser comme précédemment. On dispose alors (entre autres) de deux compactifications naturelles, à savoir $\mathbf{P}(\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}_1^\vee) \times_A \cdots \times_A \mathbf{P}(\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}_t^\vee)$ et $\mathbf{P}(\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_t^\vee)$. Dans l'un et l'autre cas, on dispose de faisceaux inversibles métrisés construits à partir des $\mathcal{O}(1)$ et des $\mathcal{L}_i$. Ils donneraient lieu à des hauteurs canoniques, comme au paragraphe suivant.

5. Construction des hauteurs relatives

On reprend les notations du paragraphe précédent, en supposant que S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K Rappelons que le premier groupe de Chow–Arakelov $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$ de S s'identifie au groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur S munis de métriques hermitiennes ≪à l'infini≫ compatibles à la conjugaison complexe.

Fixons tout d'abord un entier $N > 0$ qui annule les groupes des composantes connexes de A_s pour tout point $s \in S$.

Soient $P \in E(\eta)$ et $Q = \pi(P) \in A(\eta)$. Comme A/S est le modèle de Néron de A_η, il existe une section $\varepsilon_Q : S \to A$ qui prolonge Q. D'après le choix de l'entier N, le point $[N]_A Q \in A(\eta)$ se prolonge en une section $\varepsilon_{[N]Q} : S \to A^0$. Par suite, $\overline{E}/A^0$ étant projectif, $[N]P$ se prolonge en une section $\varepsilon_{[N]P} : S \to \overline{E}$ qui relève $\varepsilon_{[N]Q}$.

Proposition 5.1. *Les éléments* $(\varepsilon^*_{[N]P}\mathcal{M}_0) \otimes \frac{1}{N}$ *et* $(\varepsilon^*_{[N]P}\mathcal{M}_\infty) \otimes \frac{1}{N}$ *de* $\widehat{\mathrm{Pic}}(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ *ne dépendent pas du choix de* N. *On les note respectivement* $H_{0,S}(P)$ *et* $H_{\infty,S}(P)$.

Démonstration. Fixons $\bullet$ l'un des symboles $\{0, \infty\}$. Le caractère canonique des métriques hermitiennes $\omega_\bullet$ sur les faisceaux inversibles $\mathcal{M}_\bullet$ implique qu'elles sont invariantes par la conjugaison complexe. Ainsi, nous avons bien par fonctorialité des éléments $\varepsilon^*_{[N]P}\mathcal{M}_\bullet$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$.

Si M est un autre entier qui annule les groupes des composantes connexes de A_s pour tout $s \in S$, montrons que

$$(\varepsilon^*_{[N]P}\mathcal{M}_\bullet) \otimes \frac{1}{N} = (\varepsilon^*_{[M]P}\mathcal{M}_\bullet) \otimes \frac{1}{M}.$$

Pour cela, on peut supposer que M est un multiple de N, soit $M = Nk$ pour un entier $k \geq 1$. Or d'une part, $[k]^*\mathcal{M}_\bullet = \mathcal{M}_\bullet^{\otimes k}$ en tant que faisceau inversible métrisé (proposition 4.6) et d'autre part, $\varepsilon_{[M]P} = [k] \circ \varepsilon_{[N]P}$, si bien que l'on a

$$\varepsilon^*_{[M]P}\mathcal{M}_\bullet = (\varepsilon^*_{[N]P}\mathcal{M}_\bullet)^{\otimes k},$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

D'autre part, la proposition 4.6 (ou la proposition 5.1, comme on veut !) entraîne immédiatement la proposition suivante :

Proposition 5.2. *Soit* $P \in E(\eta)$. *Si* $n \geq 0$, *on a* $H_{0,S}([n]P) = nH_{0,S}(P)$ *et* $H_{\infty,S}([n]P) = nH_{\infty,S}(P)$. *De plus* $H_{0,S}([-1]P) = H_{\infty,S}(P)$.

Proposition 5.3. *Soient* $\eta' \to \eta$ *une extension finie,* $f : S' \to S$ *le normalisé de* S *dans* η', A' *le modèle de Néron de* $A_\eta \times_\eta \eta'$, E' *l'extension de* A'^0 *par* $\mathbf{G}_m$ *qui prolonge* $E_\eta \times \eta'$. *Si* $P \in E_\eta(\eta)$, *on a*

$$H_{\infty,S'}(P \times_S S') = f^* H_{\infty,S}(P) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(S') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \quad ,$$

et de même pour H_0.

Démonstration. Si A/S est semi-stable, c'est clair : la composante neutre de A' est obtenue à partir de celle de A par changement de base, si bien que $E' = E \times_S S'$, etc.

Dans le cas général, soit $\varphi : A \times_S S' \to A'$ le morphisme naturel qui prolonge l'identité $A_\eta \times \eta' = A_{\eta'}$. L'image de $A^0 \times_S S'$ par φ est contenue dans A'^0 et il nous faut comparer $\varphi^*\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L} \times_S S'$. Or, $\varphi^*\mathcal{L}' \otimes f^*\mathcal{L}^\vee$ est un faisceau inversible métrisé sur $A^0 \times_S S'$ qui vérifie le théorème du carré et est génériquement trivial. Comme $S' \to S$ est fidèlement plat, on a $(\pi \times_S S')_*\mathcal{O}_{A^0 \times_S S'} = \mathcal{O}_{S'}$; d'autre part, $A^0 \times_S S' \to S'$ est à fibres connexes, si bien que $\varphi^*\mathcal{L}' \otimes f^*\mathcal{L}^\vee$ provient d'un faisceau inversible sur S', lequel est trivial à cause des rigidifications. Autrement dit, φ^*E', etc. sont obtenues à partir de E par changement de base, d'où la proposition. □

Nous pouvons donc poser :

Définition 5.4. *Soient $\overline{\eta}$ la clôture algébrique de η et $P \in E(\overline{\eta})$. Si η' est une extension finie de η telle que $P \in E(\eta')$ et $f : S' \to S$ est le normalisé de S, on appelle* hauteurs relatives *de P les réels* $\widehat{\deg}\, H_0(P) := \frac{1}{[S':S]}\widehat{\deg}\, H_{0,S'}(P)$ *et* $\widehat{\deg}\, H_\infty(P) := \frac{1}{[S':S]}\widehat{\deg}\, H_{\infty,S'}(P)$.

Théorème 5.5. *Les fonctions $\widehat{\deg}\, H_0$ et $\widehat{\deg}\, H_\infty : E(\overline{\eta}) \to \mathbf{R}$ sont les hauteurs canoniques sur $\overline{E}(\overline{\eta})$ attachées aux faisceaux inversibles $\mathcal{M}_{0,\eta}$ et $\mathcal{M}_{\infty,\eta}$ sur $\overline{E}_\eta$; elles sont positives. De plus (Zarhin–Bloch, Mazur–Tate), $\widehat{\deg}\, H_0(P) - \widehat{\deg}\, H_\infty(P)$ est la hauteur de Néron–Tate de $\pi(P)$ relativement au faisceau algébriquement équivalent à zéro $\mathcal{L}$ sur A.*

Démonstration. Pour $\bullet \in \{0, \infty\}$, soit $h_\bullet$ une hauteur de Weil sur $\overline{E}(\overline{\eta})$ attachée au faisceau inversible $\mathcal{M}_{\bullet,\eta}$ sur $\overline{E}_\eta$. Fixons un entier $n \geq 2$. Les *hauteurs canoniques* relatives au faisceau inversible $\mathcal{M}_{\bullet,\eta}$ de poids n pour le morphisme $[n]_{\overline{E}_\eta}$ (cf. par exemple [4]) sont par définition les fonctions sur $\overline{E}(\overline{\eta})$ définies par

$$\hat{h}_\bullet(P) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n^k} h_\bullet([n^k]P).$$

Rappelons pourquoi cette limite existe : comme $[n]^*\mathcal{M}_{\bullet,\eta} = \mathcal{M}^n_{\bullet,\eta}$, il existe une constante C_n telle que $|h_\bullet([n]P) - nh_\bullet(P)| \leq C_n$ pour tout point P, si bien que

$$\left| \frac{1}{n^k} h_\bullet([n^k]P) - \frac{1}{n^{k-1}} h_\bullet([n^{k-1}]P) \right| \leq \frac{1}{n^k} C_n,$$

et la limite s'écrit comme somme d'une série uniformément convergente. La dénomination hauteur est justifiée par la comparaison $|\hat{h}_\bullet - h_\bullet| \leq C_n/(n-1)$, tandis que le terme canonique vient de ce que $\hat{h}_\bullet([n]P) = n\hat{h}_\bullet(P)$ pour tout P.

Montrons maintenant qu'il existe pour toute extension finie $\eta' \to \eta$ une constante $C_{\eta'}$ telle que l'on ait, pour tout point $P \in \overline{E}(\eta')$, l'inégalité

$$\left| h_\bullet(P) - \widehat{\deg}\, H_\bullet(P) \right| \leq C_{\eta'}.$$

En effet, si S' est le normalisé de S dans η' et si l'entier $N > 0$ annule les groupes des composantes connexes du modèle de Néron de $A_{\eta'}$ sur S', l'expression $h_\bullet([N]P) - Nh_\bullet(P)$ est bornée uniformément en $P \in E(\eta')$. D'après la proposition 5.2, on a l'égalité $\widehat{\deg}\, H_\bullet([N]P) = N\widehat{\deg}\, H_\bullet(P)$. Enfin, en choisissant comme modèle entier de $\overline{E}_{\eta'}$ l'adhérence de E' dans un espace projectif convenable, on constate que la différence $\widehat{\deg}\, H_\bullet([N]P) - h_\bullet([N]P)$ est uniformément bornée lorsque P décrit $\overline{E}(\eta')$. En mettant bout à bout ces majorations, on a bien une inégalité comme annoncée.

La proposition 5.2 et la définition de la hauteur canonique entraînent alors que pour tout $P \in \overline{E}(\eta')$,

$$\hat{h}_\bullet(P) = \widehat{\deg}\, H_\bullet(P).$$

L'extension finie η' étant arbitraire, cela implique bien que $\hat{h}_\bullet = \widehat{\deg}\, H_\bullet$.

Comme $\mathcal{M}_\infty$ est effectif, la hauteur h_∞ est minorée sur le complémentaire de D_∞, ce qui implique que $\hat{h}_\infty = \widehat{\deg}\, H_\infty$ est positive. De même pour $\widehat{\deg}\, H_0$. (Il est aussi possible d'utiliser le fait que les sections s_{D_0} et s_{D_∞} de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_\infty$ ont une norme ≤ 1 en tout point ; voir les formules du §6.)

Enfin, comme $\mathcal{M}_0 \otimes \mathcal{M}_\infty^\vee = \pi^*\mathcal{L}$, on a pour tout $P \in \overline{E}(\eta)$ relevant un point de A^0,

$$\widehat{\deg}\, H_0(P) - \widehat{\deg}\, H_\infty(P) = \widehat{\deg}\, \varepsilon_P^*\pi^*\mathcal{L} = \widehat{\deg}\, (\pi \circ \varepsilon_P)^*\mathcal{L}.$$

Autrement dit, $h_\mathcal{L}$ désignant la hauteur de Néron–Tate sur A_η relative au fibré inversible $\mathcal{L}$, la fonction linéaire

$$\widehat{\deg}\, H_0 - \widehat{\deg}\, H_\infty - h_\mathcal{L} \circ \pi$$

est, pour tout $\eta' \to \eta$, bornée sur un sous-groupe d'indice fini de $A(\eta')$; elle est alors nécessairement nulle, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarquons pour finir que les hauteurs relatives contiennent toute l'information nécessaire pour connaître la hauteur d'un point de l'extension (compactifiée) dans un plongement projectif donné : le groupe de Picard de $\overline{E}_\eta$ est $\mathbf{Z} \oplus \operatorname{Pic}(A_\eta)$, si bien que tout faisceau (très) ample sur $\overline{E}_\eta$ est de la forme $\pi^*\mathcal{N} \otimes \mathcal{O}_\mathbf{P}(n)$ pour un faisceau (très) ample $\mathcal{N}$ sur A_η et un entier $n > 0$. En sus de la hauteur de Néron–Tate sur A_η, la connaissance de H_∞ suffit donc, même si la considération de $H_0 + H_\infty$ est plus symétrique.

Corollaire 5.6 (Waldschmidt, [6, App.], Laurent [13]). *Soit h_{NT} une hauteur de Néron–Tate sur A_η pour un diviseur symétrique ample et h la fonction $E_\eta(\overline{\eta}) \to \mathbf{R}_+$ définie par $h_{NT} \circ \pi + \widehat{\deg}\, H_0 + \widehat{\deg}\, H_\infty$. C'est une hauteur sur E_η ; de plus $h(P) = 0$ si et seulement si P est d'ordre fini.*

Démonstration. Que ce soit une hauteur résulte du théorème 5.5 et des remarques qui précèdent ; elle est positive comme somme de fonctions positives. Enfin, si $h(P) = 0$, il est nécessaire que $h_{NT}(\pi(P)) = 0$, ce qui prouve que $\pi(P)$ est d'ordre fini. Alors, pour tout entier n, $h([n]P) = nh(P) = 0$ et le théorème de Northcott entraîne que l'ensemble $\{P, 2P, 3P, \ldots\}$ est fini, c'est-à-dire que P est d'ordre fini. La réciproque est claire, d'où le corollaire. □

6. Points de hauteur relative nulle

Pour finir, nous voulons donner quelques expressions explicites des hauteurs H_0 et H_∞ et appliquer la théorie précédente à l'étude des points de hauteur relative nulle.

Nous conservons les notations des paragraphes précédents. Rappelons qu'un point P de $\overline{E} = \mathbf{P}(\mathcal{W})$ relevant une section (de la composante neutre) $\varepsilon_Q : S \to A^0$ est la donnée d'un quotient inversible de rang 1 de $\varepsilon_Q^*\mathcal{W}$, soit un faisceau inversible $\mathcal{I}$ sur S et deux sections $x_0 : \mathcal{O}_S \to \mathcal{I}$, $x_1 : \varepsilon_Q^*\mathcal{L}^\vee \to \mathcal{I}$ telles que $(x_0, x_1) : \varepsilon_Q^*\mathcal{W} \to \mathcal{I}$ soit surjectif. Le point P_η appartient à E_η si et seulement si $x_0 \neq 0$ et $x_1 \neq 0$.

De la définition des faisceaux inversibles $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{O}(D_\infty)$ et $\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}(D_0)$ découle que x_0 et x_1 s'interprètent comme $s_{D_\infty}(P)$ et $s_{D_0}(P)$ respectivement, et que leurs diviseurs représentent les intersections (propres, sur le schéma $\overline{E}$ puisqu'on a supposé que P_η était un point de E_η) $D_\infty \cdot \overline{\{P\}}$ et $D_0 \cdot \overline{\{P\}}$.

D'après le lemme 4.4 on a ainsi pour toute place σ,

$$\|s_{D_\infty}(P)\|^\sigma = \frac{\|x_0\|^\sigma}{\max(\|x_0\|^\sigma, \|x_1\|^\sigma)}$$

(à proprement parler, le membre de droite pour être calculé, nécessite le choix d'une métrique sur $\mathcal{I}$ mais n'en dépend pas). Notons $D_\infty \cdot \overline{\{P\}} = \sum_{\mathfrak{p} \in S} n_{\infty,\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}]$, on a alors

$$\widehat{\operatorname{div}}\,(s_{D_\infty}(P)) = \Big(D_\infty \cdot \overline{\{P\}}, -2\log\|s_{D_\infty}(P)\|^\sigma\Big)$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}\, H_\infty(P) &= \widehat{\deg}\ \widehat{\mathrm{div}}\,(s_{D_\infty}) \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} n_{\infty,\mathfrak{p}} \log N(\mathfrak{p}) - \sum_{\sigma\in S(\mathbf{C})} \log \|s_{D_\infty}(P)\|^\sigma .\end{aligned}$$

C'est une somme de termes positifs de sorte que la hauteur relative $\widehat{\deg}\, H_\infty(P)$ est nulle si et seulement si $s_{D_\infty}(P)$ est un isomorphisme dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$: si elle définit une isométrie $\mathcal{O}_S \simeq \varepsilon_P^* \mathcal{M}_\infty$. La condition d'isométrie équivaut à $\|x_0/x_1\|^\sigma \geq 1$.

De même, si $D_0 \cdot \overline{\{P\}} = \sum_{\mathfrak{p}} n_{0,\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}]$, on a

$$\widehat{\deg}\, H_0(P) = \sum_{\mathfrak{p}\in S} n_{0,\mathfrak{p}} \log N(\mathfrak{p}) - \sum_{\sigma\in S(\mathbf{C})} \log \|s_{D_0}(P)\|^\sigma ,$$

où

$$\|s_{D_0}(P)\|^\sigma = \frac{\|x_1\|^\sigma}{\max(\|x_0\|^\sigma, \|x_1\|^\sigma)} .$$

Ainsi, la hauteur relative $\widehat{\deg}\, H_0(P)$ est nulle si et seulement si s_{D_0} définit un isomorphisme $\mathcal{O}_S \simeq \varepsilon_P^* \mathcal{M}_0$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$ ce qui implique que pour toute place archimédienne σ, $\|x_1/x_0\|^\sigma \geq 1$.

Proposition 6.1. *Avec les notations précédentes, si $\varepsilon_Q : S \to A^0$, il existe un point $P \in \overline{E}(S)$ de hauteur relative nulle relevant Q si et seulement si le faisceau inversible métrisé $\varepsilon_Q^* \mathcal{L} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(S)$ est trivial.*

Démonstration. En effet, les considérations qui précèdent montre que si P est un tel point, les deux sections $x_0 : \mathcal{O}_S \to \mathcal{I}$ et $x_1 : \varepsilon_Q^* \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{I}$ sont des isomorphismes de faisceaux inversibles et si $\|x_0/x_1\|^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in S(\mathbf{C})$. Autrement dit, la section rationnelle $x_1 \otimes x_0^{-1}$ de $\varepsilon_Q^* \mathcal{L}$ est sans pôles ni zéros et de norme 1. Cela signifie bien qu'elle réalise un isomorphisme $\mathcal{O}_S \simeq \mathcal{L}$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$.

Plus précisément, on voit que les points de hauteur relative nulle de $\overline{E}(S)$ qui relèvent la section $\varepsilon_Q : S \to A^0$ sont en bijection naturelle avec les trivialisations métriques du fibré inversible métrisé $\varepsilon_Q^* \mathcal{L}$. $\square$

On déduit de la proposition précédente le fait suivant [2, proposition 2] : *si $K = \mathbf{Q}$ ou si K est un corps quadratique imaginaire, la nullité de la hauteur de Néron–Tate de $x \in A(K)$ relativement à $\mathcal{L}$ implique qu'il existe un point de hauteur relative nulle dans l'extension paramétrée par $\mathcal{L}$ relevant un multiple de x.* En effet, comme $\mathcal{L}|_{nx} = (\mathcal{L}|_x)^{\otimes n}$, on peut choisir n de sorte que $\mathcal{L}|_{nx} \simeq \mathcal{O}_S$ dans $\mathrm{Pic}(A)$; il n'y a qu'une place archimédienne et si s est une base de $\mathcal{L}|_{nx}$, la nullité de $\widehat{\deg}\,\mathcal{L}|_{nx}$ implique que $\|s\| = 1$ et $\mathcal{L}|_{nx} = 0$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons alors un point $Q \in A^0(S)$ de la forme $[n]Q_1$, avec $Q_1 \in A^0(S)$ et $P \in E(S)$ un point de hauteur relative nulle qui relève Q, on peut considérer un point P_1 relevant Q_1 tel que $[n]_E P_1 = P$. Or, si le faisceau d'Arakelov $\varepsilon_{Q_1}^*\mathcal{L}$ est de torsion, il n'est pas forcément trivial. Grâce au lemme suivant (dont il peut être intéressant de remarquer que l'analogue géométrique est classique), cela signifie que P_1 n'est pas *a priori* défini sur S:

Lemme 6.2. *Soient S le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres et $(L, \|\cdot\|)$ un élément de $\widehat{\mathrm{Pic}}(S)$, d'ordre fini. Alors il existe une extension finie $f : S' \to S$ telle que $f^*(L, \|\cdot\|)$ est nul dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S')$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $(L^{\otimes n}, \|\cdot\|^n) = 0$ et choisissons une base $t_n \in L^{\otimes n}$ de norme 1 en toute place, soit $\|t_n\|^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in S(\mathbf{C})$. Il existe une extension finie S'/S (par exemple, l'anneau des entiers du corps de classe de Hilbert du corps des fractions de S) telle que $L' = L \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ est un $\mathcal{O}_{S'}$ module libre de rang 1 ; soit donc s' une base de L'. Alors, $s'^{\otimes n}$ est une base de $L^n \otimes \mathcal{O}_{S'}$ et il existe une unité u de $\mathcal{O}_{S'}$ telle que $s'^{\otimes n} = ut_n$. Une extension $S'' \to S'$ telle que $u^{1/n} \in \mathcal{O}_{S''}$ permet de poser $s'' = u^{-1/n}s'$; on constate que s'' est une base de $L'' = L' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S''}$ de norme 1 en toute place, si bien que $L \otimes \mathcal{O}_{S''} = 0$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(S'')$. □

Montrons enfin comment les ≪points de Ribet≫ de [11, 1] s'interprètent dans ce contexte, en supposant pour simplifier que A/S est un schéma abélien.

Proposition 6.3. (voir aussi [1, th. 4]) *Supposons que A est un schéma abélien sur S. Soient $f : A^\vee \to A$ un morphisme de schémas abéliens et g l'endomorphisme antisymétrique donné par $g = f - f^\vee : A^\vee \to A$. Si $\mathcal{L} \in A^\vee(S)$, il existe alors, dans l'extension de A par $\mathbf{G}_m$ définie par $\mathcal{L}$, un S-point canonique de hauteur relative nulle au-dessus du point $g(\mathcal{L}) \in A(S)$.*

(On aurait pu ne considérer f, g et $\mathcal{L}$ que sur la fibre générique de A; le critère valuatif de propreté et le fait qu'un schéma abélien sur un anneau de Dedekind est le modèle de Néron de sa fibre générique nous auraient alors fourni les extensions à S tout entier.)

Démonstration. Sur $X = A \times A^\vee$, considérons la (bi)extension de Poincaré $\mathcal{P}_X$, et de même sur $Y = A^\vee \times A$, métrisés de sorte que le théorème du cube soit une isométrie [17]. Soit s l'isomorphisme $Y \simeq X$ qui échange les facteurs ; par unicité du prolongement métrisé, on a un isomorphisme de faisceaux inversible métrisés $s^*\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Y$ qui prolonge la bidualité sur la fibre générique.

On a les égalités entre faisceaux inversibles métrisés, qui résultent de ce qu'elles sont vraies sur η (bidualité des variétés abéliennes) et de l'unicité du prolongement :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|_{f(\mathcal{L})} &= \mathcal{P}_X|_{f(\mathcal{L}),\mathcal{L}} = \mathcal{P}_Y|_{\mathcal{L},f^\vee(\mathcal{L})} \qquad \text{par dualité}\\ &= (s^*\mathcal{P}_X)|_{\mathcal{L},f^\vee(\mathcal{L})} = \mathcal{P}_X|_{f^\vee(\mathcal{L}),\mathcal{L}} = \mathcal{L}|_{f^\vee(\mathcal{L})},\end{aligned}$$

si bien que $\mathcal{L}|_{g(\mathcal{L})}$ est canoniquement trivial, en tant que faisceau inversible métrisé sur S. D'après la proposition 6.1, cette isométrie définit un point de hauteur relative nulle relevant $g(\mathcal{L})$. □

Remarque 6.4. Prouvons que le ≪point de Ribet≫ défini dans [11] et considéré dans [1] du point de vue des hauteurs est égal au point donné par la proposition précédente. Considérons comme dans [11, (4.1), p. 146] le diagramme

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^*E \arrow[r] \arrow[d] & A^\vee \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\ 1 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Choisissons $y \in f^*E(\eta)$ relevant $\mathcal{L}$, soit $x^1 = f(y) \in E(\eta)$, d'où un 1–motif $M_1 \colon \mathbf{Z} \to f^*E$. Par définition de la dualité de Cartier des 1–motifs, le dual de M_1 est un 1–motif $M_2 : \mathbf{Z} \to E$. Soit $x^2 \in E(\eta)$ l'image de 1. Le point $x_f := x^1 - x^2 \in E(\eta)$ relève $f(\mathcal{L}) - f^\vee(\mathcal{L})$ et Bertrand prouve dans [1] que ce point est de hauteur relative nulle. Quand A/S est un schéma abélien, on peut faire cette construction sur S en choisissant $y \in f^*E(S)$ (si c'est possible) et en raisonnant en termes de S–1–motifs. Pour simplifier, raisonnons ≪localement sur $S \cup \{\infty\}$≫ (S compactifié en rajoutant les places à l'infini) — le résultat à obtenir est de nature locale, en l'espèce une hauteur locale à calculer en un point indépendant de y — et choisissons $y \in f^*E(S)$; il correspond donc à un isomorphisme $f^\vee(\mathcal{L})|_{\mathcal{L}} \to \mathcal{O}_S$ puisque f^*E est paramétrée par $f^\vee$. Alors, la description symétrique du 1–motif M_1 est la trivialisation de $\mathcal{P}_Y|_{\mathcal{L},f^\vee(\mathcal{L})} = f^\vee(\mathcal{L})|_{\mathcal{L}}$ que définit y. Le 1–motif dual est alors donné par la trivialisation canonique de $\mathcal{P}_X|_{f(\mathcal{L}),\mathcal{L}}$ donnée par la trivialisation précédente et la dualité entre les S–schémas abéliens A et $A^\vee$. Autrement dit, x^2 est donné par la trivialisation de $\mathcal{L}|_{f(\mathcal{L})}$ qu'on en déduit comme dans la preuve de la proposition et la différence $x^1 - x^2$ est défini par l'isomorphisme $\mathcal{L}|_{f(\mathcal{L})} \simeq \mathcal{L}|_{f^\vee(\mathcal{L})}$ de la démonstration de la proposition 6.3, isomorphisme qu'on a vu être une isométrie.

Remarque 6.5. On vérifie aisément que les expressions explicites pour $\widehat{\deg}\, H_0$ et $\widehat{\deg}\, H_\infty$ que nous avons écrites plus haut donnent la décomposition de la hauteur relative en une somme de hauteurs locales canoniques comme dans [1, 4].

7. Métriques adéliques vs. modèles entiers

En faisant appel à la théorie des métriques adéliques due à S. Zhang (cf. [22]), on peut éviter les références aux modèles de Néron dans cet article, voire ne pas supposer que A/S est un schéma abélien comme dans la proposition 6.3. Soit A_K une variété abélienne sur un corps de nombres K et E_K une extension de A_K par le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, donnée par un faisceau inversible $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(A_K)$ et un ≪isomorphisme du carré≫

$$C(\mathcal{L}) := p_{12}^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^\vee \otimes p_2^*\mathcal{L}^\vee \simeq \mathcal{O}_{A_K \times A_K},$$

d'où en particulier un isomorphisme canonique pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^n$. Un entier $n \geq 2$ étant fixé, le fibré en droites $\mathcal{L}$ possède pour toute place v de K une unique métrique v-adique telle que cet isomorphisme soit une isométrie (théorème 2.2 de [22] dont la démonstration est une adaptation dans ce contexte du procédé utilisé par Tate pour construire la hauteur normalisée sur une variété abélienne).

De plus, cette métrique v-adique rend le théorème du carré une isométrie. La métrique v-adique sur $\mathcal{L}$ induit en effet une métrique v-adique sur $C(\mathcal{L})$ telle que l'on ait une isométrie $[n]^*C(\mathcal{L}) \simeq C(\mathcal{L}^n) \simeq C(\mathcal{L})^n$; comme $C(\mathcal{L})$ est trivial, cette métrique v-adique est nécessairement la métrique triviale sur $\mathcal{O}_{A_K\times A_K}$ telle que la section 1 a pour norme 1 en tout point, cqfd. En particulier, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, l'isomorphisme $[p]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^p$ est une isométrie.

Si A_K a bonne réduction en v, l'unique modèle entier $(A_v, \mathcal{L}_v)$, A_v étant un $\mathfrak{o}_v$ schéma abélien qui prolonge A_K et $\mathcal{L}_v$ l'unique élément de $\mathrm{Pic}^0(A_v)$ qui prolonge A_K, nous fournit une métrique v-adique canonique donnant en $x \in A_K(\bar{K}_v)$ une norme ≤ 1 si cette section est régulière dans un voisinage de l'adhérence de x dans A_v. Cette métrique coïncide avec celle que nous avions définie auparavant.

La collection de ces métriques v-adiques constitue de plus une métrique adélique au sens de *loc. cit.* Elles permettent par les mêmes formules que celles que nous avons données dans le cas archimédien de construire une métrique adélique canonique sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ de la compactification $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{A_K} \oplus \mathcal{L}^\vee)$, et cette métrique adélique vérifie des propriétés tout à fait analogues à celles que nous avons établies dans cet article.

Explicitons maintenant ce qu'est une métrique adélique pour un fibré en droites sur $\mathrm{Spec}\, K$. Un tel fibré est un K-espace vectoriel L de dimension 1; fixons une base e de L. Une métrique adélique sur L revient alors à une collection $(\|e\|_v) \in \prod_v |K^*|_v$ pour toutes les places v de K, $|K^*|_v$ désignant le groupe des normes v-adiques des éléments non nuls de K, telle que $\|e\|_v = 1$ pour presque tout v. Il possède un degré arithmétique, défini par

$$\widehat{\deg}\,(L, (\|\cdot\|_v)) = -\sum_v \log_v \|e\|_v\,,$$

où $\log_v : |K|_v^* \to \mathbf{Q}$ est la normalisation naturelle du logarithme de sorte que la formule du produit s'écrit $\sum_v \log_v |x|_v = 0$ pour tout $x \in K^*$. Ainsi, le degré arithmétique ne dépend pas du choix de la base. En fait, cette description rend apparent qu'il existe un unique isomorphisme du groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur $\operatorname{Spec} K$ avec métriques adéliques sur le groupe $\widehat{\operatorname{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K)$ compatible aux degrés arithmétiques.

Cette notion de métriques adéliques fournit ainsi une construction alternative des hauteurs canoniques sur l'extension E_K. L'analogue de la proposition 6.1 est que les points de $E_K(K)$ de hauteur relative nulle relevant un point $x \in A_K(K)$ sont en bijection naturelle avec les trivialisations isométriques de $\mathcal{L}_x$. La proposition 6.3 se prouve dans ce cadre en remplaçant les isomorphismes dans les groupes de Picard compactifiés utilisés dans la preuve de cette proposition par des isométries de fibrés en droites munis de métriques adéliques. Ainsi formulée, elle s'étend au cas de mauvaise réduction.

Références

1. D. Bertrand. Minimal heights and polarizations on group varieties, Duke Math. J. **80** (1995), 223–250.
2. D. Bertrand. 1-Motifs et relations d'orthogonalité dans les groupes de Mordell–Weil, Prépublication, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 95.
3. J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.
4. G. Call et J. Silverman. Canonical heights on varieties with morphisms, Compositio Math. **89** (1993), 163–205.
5. A. Chambert-Loir. Extensions vectorielles, périodes et hauteurs, Thèse de doctorat, Univ. P. et M. Curie, Paris, 1995.
6. P. Cohen. Heights of torsion points on commutative group varieties, Proc. London Math. Soc. **52** (1986), 427–444.
7. G. Faltings et G. Wüstholz. Rational points, Vieweg, 1985. Séminaire Bonn 1983/84.
8. G. Faltings et G. Wüstholz. Einbettungen kommutativer algebraischer Gruppen und einige ihrer Eigenschaften, J. Reine Angew. Math., 1986, 175–205.
9. P. Griffiths et J. Harris. Principles of algebraic geometry, Wiley Interscience, 1978.
10. R. Hartshorne. Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. n° 52, Springer Verlag, 1977.
11. O. Jacquinot et K. Ribet. Deficient points on extensions of Abelian varieties by $\mathbf{G}_m$, J. Number Theory **25** (1987), 133–151.
12. S. Lang. Fundamentals of diophantine geometry, Springer Verlag, 1983.

13. M. Laurent. Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques, J. Reine Angew. Math. **316** (1980), 122–139.
14. B. Mazur et W. Messing. Universal Extensions and One Dimensional Crystalline Cohomology, Lect. Notes Math. n° 370, Springer Verlag, 1976.
15. L. Moret-Bailly. Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbf{P}^1$, I. Descente des polarisations, in Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, L. Szpiro (éd.), p. 109–124, Astérisque n° 86, 1981.
16. L. Moret-Bailly. Métriques permises, in Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, L. Szpiro (éd.), p. 29–87, Astérisque n° 127, Soc. Math. France, 1985.
17. L. Moret-Bailly. Pinceaux de variétés abéliennes, Astérisque n° 129, Soc. Math. France, 1985.
18. M. Raynaud. Exposé VII, in Schémas abéliens, Séminaire Orsay, non publié, 1968.
19. J.-P. Serre. Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, in Nombres transcendants et groupes algébriques, p. 191–202, Astérisque n° 69-70, Soc. Math. France, 1979.
20. L. Szpiro. Degrés, intersections, hauteurs, in Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, p. 11–28, Astérisque n° 127, Soc. Math. France, 1985.
21. S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 187–221.
22. S. Zhang. Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geometry **4** (1995), 281–300.