UNIVERSITÉ PARIS VI — P. ET M. CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par : **Antoine Chambert-Loir**

Sujet : EXTENSIONS VECTORIELLES, PÉRIODES
ET HAUTEURS

Soutenue le 20 décembre 1995 devant la commission d'examen :

M. Daniel Bertrand (directeur)
M. Jean-Benoît Bost (rapporteur)
M. Pierre Colmez
M. François Loeser
M. Laurent Moret-Bailly
M. Michel Raynaud (rapporteur)
M. Lucien Szpiro

À Laure...

Résumé

Cette thèse a pour objet l'étude des hauteurs sur certains groupes algébriques commutatifs définis sur des corps de nombres.

Dans un premier chapitre, nous détaillons le cas des extensions de variétés abéliennes par le groupe multiplicatif. Nous construisons, via la théorie d'Arakelov, les hauteurs canoniques attachées à certains diviseurs relativement aux morphismes de multiplication par des entiers. Nous donnons enfin une description des points de hauteur relative nulle.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux extensions vectorielles de variétés abéliennes. Selon la même méthode, nous construisons une hauteur privilégiée sur l'extension. Nous relions enfin les hauteurs des points de torsion au calcul de certaines valuations de périodes p-adiques pour prouver que les points d'ordre premier d'une extension vectorielle non triviale d'une variété abélienne ont des hauteurs non bornées.

Ces valuations sont étudiées au chapitre 4 par deux méthodes différentes : la première utilise la presque-décomposition de Hodge-Tate des schémas en groupes finis et plats établie par Fontaine ; la seconde utilise la théorie des schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ introduite par Raynaud, ainsi que des dévissages.

Abstract

This thesis is concerned by the height functions on certain commutative algebraic groups defined over number fields.

In a first chapter, we detail the case of an extension of an abelian variety by the multiplicative group. We construct, using Arakelov theory, the canonical heights attached to certain line bundles and to the morphisms of multiplication by an integer. We then give a description of the points whose relative height is zero.

The second and third chapters are devoted to the vectorial extensions of abelian varieties. We construct, along the same lines, some privileged height on such an extension. We then link the heights of torsion points to the valuations of certain p-adic periods to prove that the heights of the points of prime order in a non trivial vectorial extension are not bounded.

These valuations are studied in chapter 4 by two different methods : the first one uses the Hodge-Tate decomposition of finite flat group schemes, established by Fontaine : the second approach uses the $(p, \dots, p)$-type group schemes introduced by Raynaud and some « dévissages ».

Mots clefs

théorie d'Arakelov — hauteurs — extension universelle — variété abélienne — points de torsion — groupes p-divisibles — périodes — schémas en groupes finis

Table des matières

Remerciements

Au moment où ces quelques années de thèse trouvent leur accomplissement, je veux évoquer ici toutes les personnes qui m'ont aidé dans ce travail.

Je voudrais remercier tout d'abord Daniel Bertrand pour son aide constante durant ces années. À de nombreuses reprises, il a su me remettre au travail quand tout semblait bloquer, voire quand mon inclination trop naturelle à la paresse prenait le dessus. Les très nombreuses discussions que nous avons eues ont été décisives dans l'avancement de cette thèse.

Je voudrais aussi remercier tous les membres du Jury. Depuis plus d'un an, j'ai la joie de partager le bureau de Pierre Colmez. Ses propres travaux ont joué un grand rôle dans cette thèse et je voudrais profiter de l'occasion pour le remercier d'y avoir manifesté autant d'intérêt, et surtout pour l'amitié qu'il me fait en étant de ce Jury.

Lucien Szpiro, fut mon directeur de DEA et est sans doute de ce fait à l'origine de mon attachement aux variétés abéliennes, je lui dois donc beaucoup.

Mes remerciements s'adressent encore à Laurent Moret-Bailly et à François Loeser qui ont accepté de faire partie du Jury.

Michel Raynaud et Jean-Benoît Bost ont rédigé des rapports sur cette thése et je voudrais les en remercier très sincèrement. Leurs remarques et leurs suggestions m'ont été — et, j'espère, me seront encore — d'un grand profit.

Grâce à Bernard Teissier, aux nombreux conseils qu'il m'a prodigués depuis quelques années, dans son bureau, ou au cours du groupe de travail qu'il avait organisé en 1991-92 avec J-B. Bost, j'ai sans nul doute appris beaucoup de mathématiques.

Je voudrais aussi remercier l'équipe de Rennes, et outre L. Moret-Bailly, tout particulièrement Bas Edixhoven, ainsi que l'équipe de Strasbourg avec J-P. Wintenberger, pour leurs invitations à exposer mes recherches à l'hiver 1994-95 et la chaleur de leur accueil. De même, je voudrais remercier Uwe Jannsen, Norbert Schappacher et le Max-Planck Institut pour leur invitation au semestre de théorie d'Arakelov en avril 1994.

Jacques Tilouine m'avait invité au désormais défunt D.P.P. J'ai eu l'occasion de le connaître mieux lors d'une conférence l'été dernier à Boston. Qu'il me soit tout simplement permis ici de lui dire combien j'avais apprécié son amitié, en espérant que l'avenir nous permettra de visiter tous deux d'autres musées !

Mes premières années de mathématicien se sont effectuées sous l'hospitalité chaleureuse du Département de Mathématiques de l'École Normale Supérieure. Outre des conditions de travail assez exceptionnelles, je ne peux m'empêcher de remercier tous mes « collègues », et en particulier, Martin Andler, Anne-Marie Aubert, Pierre Lochak, Élisabeth Logak, Leila Schneps, Alain et Isabelle Trouvé, pour un nombre incalculable de discussions, mathématiques, administratives, touristiques, cinématographiques…

Il est temps maintenant de remercier tous mes amis, mathématiciens ou non, avec lesquels j'ai eu la joie de ne pas travailler à cette thèse !

Je dois certainement citer Stéfane Fermigier et Christelle Reggiani, Étienne de la Vaissière et Anne-Sophie Ménasseyre dont je partage l'amitié depuis plusieurs année. Je ne voudrais pas non plus oublier François Sauvageot dont j'ai été avec un immense plaisir, un peu plus que « collègue » pendant un an.

Je voudrais remercier aussi mes amis musiciens ; que cette thèse enfin finie leur fasse oublier les rythmes fatigués que je leur ai trop de fois infligés !

J'aimerais rappeler la mémoire de mes grands-parents paternels qui s'en sont allés au moment où cette thèse commençait ; je crois qu'ils auraient aimé la voir achevée.

Je n'oublie bien sûr ni mes parents, ni mes frères et sœurs, ni mes grands parents maternels, ni mes beaux-parents. Leur présence chaleureuse lors de cette cérémonie un peu formelle me touche beaucoup et j'espère que les mauvais souvenirs d'écoliers (assez d'actualité parfois !) que j'aurais pu raviver à cette occasion s'évanouiront au cours du pot.

Enfin, je dois un immense merci à Laure, ma femme, pour la patience et les encouragements qu'elle a manifestés tout au long de ces années. En promettant d'être un peu plus disponible à l'avenir…

Introduction

Cette thèse est centrée autour de l'étude des hauteurs des points de torsion de certains groupes algébriques commutatifs. Commençons par expliquer le résultat principal de ce travail.

Soient K un corps de nombres dont on note $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique, A une variété abélienne sur K et E une extension vectorielle *non triviale* de A définie sur K. C'est un K-groupe algébrique commutatif, quasi-projectif, si bien qu'en plongeant E dans un espace projectif sur lequel existe la hauteur de Weil standard, on obtient des *hauteurs de Weil* sur $E(\overline{\mathbf{Q}})$. En fait, nous considérons une variété projective $\overline{E}$ sur K, contenant E comme ouvert dense et nous étudions la hauteur de Weil sur $\overline{E}(\overline{\mathbf{Q}})$ attachée à un plongement de $\overline{E}$ dans l'espace projectif. La fonction $h_{\mathrm{W}} \colon \overline{E}(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ ainsi obtenue ne dépend qu'à une fonction bornée près de la classe d'équivalence linéaire de la section hyperplane qui définit le plongement.

Si n est un entier non nul et si g est la dimension de A, le groupe $A(\overline{\mathbf{Q}})$ contient n^{2g} points annulés par la multiplication par n. Comme K est de caractéristique 0, un espace vectoriel n'a pas de point non nul annulé par n et la projection $E \to A$ induit un isomorphisme $E(\overline{\mathbf{Q}})_{\mathrm{tors}} \to A(\overline{\mathbf{Q}})_{\mathrm{tors}}$ entre les sous-groupes de torsion de $E(\overline{\mathbf{Q}})$ et $A(\overline{\mathbf{Q}})$ respectivement. En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, $E(\overline{\mathbf{Q}})$ possède n^{2g} points annulés par n.

Nous montrons alors le théorème suivant qui évalue la moyenne des hauteurs des points de $E(\overline{\mathbf{Q}})$ annulés par un nombre premier p (cf. le théorème 3.4.11 pour un énoncé plus précis) :

Théorème 1. — *Il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que l'on ait l'inégalité, valable pour tout nombre premier p :*

$$C_1 \log p - C_2 < \frac{1}{p^{2g}} \sum_{\substack{P \in E(\overline{\mathbf{Q}}) \\ [p]_E P = 0}} h_W(P) < C_1 \log p + C_2 \quad .$$

Les constantes C_1 et C_2 sont presque effectives : nous construisons en fait explicitement une fonction h_{Ar} sur $\overline{E}(\overline{\mathbf{Q}})$ que nous appelons *hauteur relative* et dont nous prouvons qu'évaluée aux points de torsion, elle diffère de la hauteur de Weil standard par une fonction bornée et pour laquelle $C_1 = 1$ et C_2 est essentiellement la somme des logarithmes du conducteur de A et du discriminant de K (cf. la remarque 3.4.12).

Ce théorème généralise des résultats de Paula Cohen [**7, 8**] où était traité le cas d'une extension non triviale d'une courbe elliptique par le groupe additif $\mathbf{G}_a$; il étend ceux de [**5, 6**] où était étudiée *l'extension universelle* d'une variété abélienne (de dimension arbitraire).

Il est en contraste marqué avec les résultats correspondants sur les variétés abéliennes. En effet, l'existence de la hauteur de Néron–Tate sur une variété abélienne montre que les points de torsion d'une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ ont une hauteur uniformément bornée. Plus généralement, dès que l'on dispose d'une variété projective X définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, d'une section hyperplane H et d'un morphisme fini $f : X \to X$ tel que $f^*H \sim dH$ pour un entier $d \geqslant 2$, le procédé de Tate (« Tate's trick ») permet de construire une *hauteur canonique*, c'est-à-dire une fonction $\hat{h} : X(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ telle que $\hat{h} - h_{\mathrm{W}}$ soit borné sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ et $\hat{h}(f(x)) = d\hat{h}(x)$. On montre ainsi que les points de torsion d'une extension d'une variété abélienne par un tore sont encore de hauteur bornée.

En revanche, une extension d'une variété abélienne par un groupe vectoriel ne rentre pas dans ce cadre : si $\overline{E}$ est obtenue en rajoutant à E un « hyperplan » H à l'infini (de la même façon qu'on plonge un K-espace vectoriel V dans l'espace projectif des droites de $V \oplus K$), le diviseur H est relativement ample pour la projection $\pi \colon \overline{E} \to A$ et tout diviseur ample sur $\overline{E}$ est de la forme $nH + \pi^*D$ pour un entier $n \geqslant 1$ et un diviseur D ample sur A. Si l'on choisit D symétrique, le théorème du cube montre que la multiplication par un entier ℓ agit sur D avec la valeur propre ℓ^2 (qui est $\geqslant 2$ si $\ell \neq 1$). Mais si la multiplication par ℓ se prolonge bien en un morphisme $\overline{E} \to \overline{E}$, *c'est avec la valeur propre* 1 *qu'elle agit sur* H. Le procédé de Tate évoqué plus haut ne permet ainsi pas de construire une hauteur canonique sur $\overline{E}(\overline{\mathbf{Q}})$ pour les morphismes de multiplication par des entiers, et on ne peut a priori rien dire des hauteurs de ses points de torsion.

On notera que le théorème correspondant est faux si K est un corps de fonctions : les points d'ordre premier à la caractéristique sont dans ce cas de hauteur bornée (paragraphe 3.6). De même, l'hypothèse que l'extension est non triviale (c'est-à-dire que E n'est pas le produit d'une variété abélienne par un espace vectoriel) est essentielle : si $E = A \times V$, les points d'ordre fini de $E(\overline{\mathbf{Q}})$ sont de la forme $(a, 0)$ où $a \in A(\overline{\mathbf{Q}})_{\mathrm{tors}}$ et on est ramené au cas des variétés abéliennes.

Remarquons que notre théorème nous permet d'étudier le cas, apparemment plus général, d'un groupe algébrique connexe commutatif quelconque. En effet, si G est un tel groupe algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$, il possède d'après Chevalley un plus grand sous-groupe linéaire connexe L et alors $A = G/L$ est une variété abélienne. Le groupe algébrique linéaire commutatif L est lui-même le produit d'un tore T et d'un groupe vectoriel V. Notons G_1 l'extension de A par T obtenue par l'image directe $V \times T \to T$. On voit ainsi G comme une extension de G_1 par V. Comme les tores n'ont pas d'extension vectorielle non triviale, on constate que G est l'image réciproque sur G_1 d'une extension de A par V. Les points d'ordre fini de $G(\overline{\mathbf{Q}})$ sont alors tous de hauteur bornée si et seulement si cette extension est triviale (auquel cas G est le produit de la variété semi-abélienne G_1 par V).

La démonstration du théorème 1 fait l'objet du chapitre 3 que nous décrivons maintenant brièvement. Pour construire (paragraphes 3.2 et 3.3) la fonction h_{Ar} mentionnée plus haut (et notée $\widehat{\deg}\, H$ dans le texte), nous utilisons la *théorie d'Arakelov*, suivant en cela une méthode inaugurée par Faltings et Moret-Bailly pour l'étude de la hauteur de Néron–Tate sur une variété abélienne. Nous construisons :

— un schéma $\overline{\mathscr{E}}$ plat et quasi-projectif sur l'anneau $\mathfrak{O}_K$ des entiers de K tel que tout point rationnel $x \in \overline{E}(K)$ se prolonge en une unique section $\varepsilon_x \colon \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K \to \overline{\mathscr{E}}$;

— un « prolongement » du diviseur $H \subset \overline{E}$ en un faisceau inversible $\mathscr{L} \in \operatorname{Pic}(\overline{\mathscr{E}})$;

— pour tout $\sigma : K \to \mathbf{C}$, des métriques hermitiennes sur le faisceau inversible $\mathscr{L} \otimes_\sigma \mathbf{C} \in \operatorname{Pic}(\overline{E} \otimes_\sigma \mathbf{C})$;

de sorte que $\varepsilon_x^* \mathscr{L}$ est un élément du groupe $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathfrak{O}_K)$ des $\mathfrak{O}_K$-modules projectifs de rang 1 munis de métriques hermitiennes « à l'infini ». On peut en particulier calculer son degré d'Arakelov $\widehat{\deg}\, \varepsilon_x^* \mathscr{L}$ et l'on définit $h_{\mathrm{Ar}}(x)$ comme ce degré divisé par $[K : \mathbf{Q}]$.

Donnons quelques précisions sur ces constructions. Lorsque E est l'extension vectorielle universelle de A, le groupe vectoriel V s'identifie canoniquement au cotangent en l'origine $\omega_{A^\vee}$ de la variété abélienne duale $A^\vee$ de A, et Mazur et Messing ont défini un modèle entier $\mathscr{E}$ de E qui est une extension vectorielle du modèle de Néron $\mathscr{A}$ de A par le cotangent en l'origine $\omega_{\mathscr{A}^\vee}$ du modèle de Néron de $A^\vee$; nous suivrons leur terminologie en appelant $\mathscr{E}$ *l'extension canonique* de $\mathscr{A}$. En général, $\mathscr{E}$ sera le *push-out* de l'extension canonique par un morphisme $\omega_{\mathscr{A}^\vee} \to \mathscr{V}$, dont la restriction à la fibre générique est $\omega_{A^\vee} \to V$. Comme on peut toujours plonger $\mathscr{V}$ dans l'espace projectif des droites de $\mathscr{V} \oplus \mathfrak{O}_K$, on en déduit par image directe un schéma $\overline{\mathscr{E}}$, quasi-projectif et plat sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$, muni d'un morphisme $\overline{\mathscr{E}} \to \mathscr{A}$ qui en fait un $\mathscr{A}$-fibré projectif.

On dispose alors sur $\overline{\mathscr{E}}$ d'un fibré en droites canonique $\mathscr{O}(1)$, ainsi qu'une section $s_D \in \Gamma(\overline{\mathscr{E}}, \mathscr{O}(1))$ dont le diviseur $\operatorname{div}(s_D)$ a pour support $\overline{\mathscr{E}} \setminus \mathscr{E}$. En particulier $\operatorname{div}(s_D) \otimes K$ est l'hyperplan H que nous avions rajouté à E pour obtenir $\overline{E}$.

Pour construire sur $\mathscr{O}(1)$ les métriques hermitiennes dont nous avons besoin, nous regardons $A(\mathbf{C})$ comme quotient d'un espace vectoriel (isomorphe à $\mathbf{C}^g$ puisque $\dim A = g$) par un réseau Λ ce qui nous permet d'écrire les points complexes de E sous la forme $(\mathbf{C}^g \oplus V_{\mathbf{C}})/\Lambda$, où l'action de Λ sur $V_{\mathbf{C}}$ provient de la structure d'extension de A par V et correspond en termes classiques aux pseudo-périodes des formes différentielles de seconde espèce. La compactification

$\overline{E}$ s'exprime très simplement en ces termes, ainsi que $\mathscr{O}(1)$. En définitive, il s'agit de construire un scindage $\mathbf{R}[\Lambda]$-linéaire du produit $\mathbf{C}^g \oplus V_{\mathbf{C}}$, lequel n'est rien d'autre que le prolongement $\mathbf{R}$-linéaire des pseudo-périodes.

Une fois construit cette fonction h_{Ar} sur $E(\overline{K})$, il nous faut montrer que c'est bien une hauteur de Weil, toute la difficulté venant des différents modèles entiers qui entrent en jeu, phénomène à peu près inévitable si A n'a pas bonne réduction potentielle (cf. le paragraphe 3.3.b).

Pour évaluer les contributions de chaque place à la hauteur d'un point d'ordre premier p, on est amené à distinguer trois cas : les places archimédiennes, les places dont la caractéristique résiduelle est différente de p et les places de caractéristique résiduelle p. Un calcul facile montre que les hauteurs locales sont nulles dans les deux premiers cas. Dans le dernier cas, elles sont en général non nulles — d'où le théorème 1 ! — comme on s'en convainc en les reliant (proposition 3.4.7) aux valuations p-adiques de périodes p-adiques des formes différentielles de seconde espèce, telles qu'elles ont été construites par exemple par Coleman.

La théorie de Fontaine de la « presque décomposition de Hodge–Tate » des schémas en groupes finis nous dit alors (proposition 4.3.1) que ces périodes p-adiques sont presque des unités, et cela suffit pour établir le théorème 1, si on n'y cherche pas à calculer C_2 de façon précise.

Toutefois, nous montrons au paragraphe 4.4 comment utiliser la théorie de Raynaud [**31**] des schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ pour raffiner ces estimations, à l'aide d'un dévissage et d'un calcul explicite sur les « schémas en $\mathbf{F}$-vectoriels ». Nous obtenons ainsi le théorème 3.4.11 dont l'énoncé est quelque peu plus précis que le théorème 1 ci-dessus. Cette méthode donne non seulement des résultats un peu meilleurs que ceux que nous avons tirés de la théorie de Fontaine (tout particulièrement dans le cas $p = 2$ du théorème 1), mais encore, dans certains cas, des expressions explicites pour ces valuations, plutôt que de simples majorations (cf. les lemmes 4.4.6 et 4.4.7, ainsi que l'appendice A.1).

Décrivons maintenant les autres parties de ce mémoire. Bien que ce n'ait pas d'influence sérieuse sur le théorème 1, nous avons tâché dans ce texte d'étudier aussi les périodes p-adiques lorsque p divise le conducteur de A. Il était pour cela utile d'avoir des renseignements précis sur l'extension canonique. Nous donnons quelques compléments sur celle-ci au chapitre 2 dont le paragraphe 2.3 est un premier pas vers l'« étude systématique » de l'extension canonique d'un modèle de Néron que Mazur–Messing suggèrent d'entreprendre ([**23**, p. 55]). Nous prouvons en particulier le théorème suivant :

Théorème 2 (Th. 2.3.3). — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $\mathfrak{O}_K$ l'anneau des entiers de K et $\mathfrak{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathfrak{O}_K$ dans $\overline{K}$. Notons $\mathfrak{O}_p$ le complété p-adique de $\mathfrak{O}_{\overline{K}}$.*

Soient A une variété abélienne sur K et $\mathscr{A} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_p$ (resp. $\mathscr{E}'_{can}$) la limite inductive des modèles de Néron de A (de leurs extensions canoniques) sur les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$. Notons $\mathscr{G}$ le $\mathfrak{O}_p$-groupe p-divisible associé à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{E}_{can}$ la restriction de l'extension $\mathscr{E}'_{can}$ à $\mathscr{G}$; soit $\mathscr{E}_{univ}$ l'extension vectorielle universelle de $\mathscr{G}$.

Alors l'application canonique $\mathscr{E}_{univ} \to \mathscr{E}_{can}$ est un isomorphisme.

Outre le calcul des hauteurs locales aux places de mauvaise réduction, une conséquence de ce résultat est une démonstration de la coïncidence, dans le cas de mauvaise réduction, de l'application construite par Coleman avec celle des périodes de Hodge–Tate, cas laissé en suspens dans [**9**, haut de la p. 352] (proposition 2.3.4).

Le chapitre 4 est consacré aux périodes p-adiques. Nous avons déjà dit que la théorie de Raynaud permettait d'étudier leurs valuations dans le cas des formes de seconde espèce. Nous montrons au paragraphe 4.4 qu'elle donne le même genre de renseignements pour les formes de première espèce. (Voir le paragraphe 4.2 pour les définitions précises et les notations.) On aboutit finalement au résultat suivant :

Théorème 3 (Prop. 4.4.2, 4.4.4, 4.4.9 et 4.4.10). — *Soient k un corps parfait de caractéristique p, $W = W(k)$ et K le corps de fractions de W. Notons $\overline{W}$ la clôture intégrale de W dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Soit enfin G un schéma en groupes fini et plat sur W.*

Soit $x \in G(\overline{W})$ non nul. On suppose que G (resp. G^*) est connexe. Il existe une forme de première espèce sur G (resp. de seconde espèce) ω telle que $v(\int_x \omega) \leqslant 1/(p-1)$ (resp. $v(\int_x \omega < 1/(p-1))$.

Soit ω une forme de première espèce non nulle sur G (resp. de seconde espèce). Il existe $x \in G(\overline{W})$ tel que $v(\int_x \omega) \leqslant 1/(p-1)$ (resp. $v(\int_x \omega < 1/(p-1))$.

(Remarquons tout de même, comme on l'a déjà signalé plus haut pour les formes de seconde espèce, que la « presque décomposition de Hodge–Tate » de Fontaine pourrait donner des résultats analogues pour les formes de première espèce.)

L'appendice A.1 du chapitre 4 montre comment utiliser la théorie de Raynaud pour calculer les valuations p-adiques des périodes p-adiques des variétés abéliennes à multiplication complexe quand le corps de multiplication est non ramifié en p. On retrouve ainsi un cas particulier d'un résultat de Pierre Colmez [**11**].

L'appendice A.2 donne un nouveau point de vue sur la constante de Manin d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ « de Weil forte ». L'idée est simplement de remarquer que si p divise la constante de Manin, certaines périodes p-adiques auront des valuations trop grandes. Malheureusement, il ne semble pas que cette approche donne un meilleur résultat que celui de Mazur, *Rational isogenies of prime degree,* Inventiones, 1978.

Enfin, dans un premier chapitre, nous avons exposé la théorie d'Arakelov d'une extension d'une variété abélienne par le groupe multiplicatif et nous y construisons « à la Arakelov » les hauteurs canoniques relatives considérées dans [**1**, §3.1]. Notre construction de la hauteur fournit une nouvelle caractérisation des points de hauteur relative nulle, que, faute d'application nouvelle majeure, nous n'avons explicitée que dans le cas d'un schéma abélien :

Théorème 4 (Prop. 1.5.1). — *Soient K un corps de nombres et $\mathfrak{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soient $\mathscr{A}$ un $\mathfrak{O}_K$-schéma abélien et $1 \to \mathbf{G}_m \to \mathscr{E} \to \mathscr{A} \to 0$ une extension de $\mathscr{A}$ par $\mathbf{G}_m$ donnée par un faisceau inversible $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(\mathscr{A})$. La section nulle de $\mathscr{E}$ induit une rigidification de $\mathscr{L}$ le long de la section nulle de $\mathscr{A}$ et il existe une unique famille de métriques hermitiennes sur $\mathscr{L} \otimes \mathbf{C}$ telles que l'unique isomorphisme compatible à la rigidification que donne le théorème du carré soit de norme 1 pour tout plongement $K \to \mathbf{C}$.*

Soit $\varepsilon_x : \mathrm{Spec}\,\mathfrak{O}_K \to \mathscr{A}$ l'unique section prolongeant le point $x \in \mathscr{A}_K(K)$. Il existe alors un point de hauteur relative nulle dans $\mathscr{E}_K(K)$ relevant x si et seulement si l'élément $\varepsilon_x^*\mathscr{L}$ de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathfrak{O}_K)$ est trivial (c'est-à-dire que le module projectif de rang 1 correspondant admet une base dont la norme est 1 en toute place archimédienne).

Cette caractérisation permet de vérifier que les « points déficients » introduits par Jacquinot–Ribet [**19**] ont une hauteur relative nulle, sans passer par les calculs locaux de [**1**].

Notations et conventions

Si X est un espace localement annelé et $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent, on utilise les conventions de [EGA II] et on note $\mathbf{V}(\mathscr{F}) = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}^\bullet \mathscr{F}$, $\mathbf{P}(\mathscr{F}) = \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}^\bullet \mathscr{F}$ les fibrés « vectoriels » et « projectifs » associés à $\mathscr{F}$. En particulier, $\mathbf{V}(\cdot)$ et $\mathbf{P}(\cdot)$ sont des foncteurs contravariants. Nous commettrons l'abus de langage consistant à appeler fibré en droites un faisceau localement libre de rang 1.

Si S est un schéma et $\mathscr{Q}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent, on verra $\mathscr{Q}$ comme un faisceau en groupes abéliens (pour la topologie fppf) en associant à $f : S' \to S$ les sections globales $\Gamma(S', f^*\mathscr{Q})$. Si $\mathscr{Q}$ est le dual $\mathscr{O}_S$-linéaire d'un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$, alors le faisceau fppf associé à $\mathscr{Q}$ est représenté par $\mathbf{V}(\mathscr{F})$. En particulier si $\mathscr{Q}$ est localement libre de type fini sur $\mathscr{O}_S$, le faisceau associé à $\mathscr{Q}$ est représentable et on appellera S-schéma en groupes vectoriels tout S-schéma en groupes de ce type.

Si $\mathbf{G}_a$ est le groupe additif (dont les S-points sont $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ pour tout schéma S), un schéma en groupes vectoriels est ainsi un schéma en groupes sur S localement isomorphe (sur S) à un produit fini de $\mathbf{G}_a$.

On note $\mathbf{G}_m$ le groupe multiplicatif dont les S-points sont $\Gamma(S, \mathscr{O}_S^\times)$ pour tout schéma S.

Lorsque G/S est un schéma en groupes, on notera $\operatorname{Inf}^1(G)$ le premier voisinage infinitésimal de la section nulle dans G.

Tous les schémas en groupes seront par convention commutatifs.

Si G est un groupe et n un entier, $G[n]$ est le sous-groupe de G des éléments g tels que $ng = 0$. Si G est un schéma en groupes, $G[n]$ désigne le sous-schéma en groupes, noyau de la multiplication par $[n]$.

Si p est un nombre premier et G un groupe, le module de Tate $T_p(G)$ est la limite projective des $G[p^n]$ pour $n \geqslant 1$.

Soit X un schéma plat et quasi-projectif sur $\mathbf{Z}$. Un fibré en droites métrisé sur X est la donnée d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur X, ainsi que d'une métrique hermitienne (continue) sur le fibré complexe $\mathscr{L}_\mathbf{C}$ sur $X(\mathbf{C})$. On demandera que la métrique hermitienne soit compatible à la conjugaison complexe. Le groupe $\widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$ est alors le groupe des fibrés en droites métrisés modulo isomorphisme (respectant les métriques). Tout morphisme de schémas $X \to X'$ induit une application $\widehat{\mathrm{CH}}^1(X') \to \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$.

Soit K un corps de nombres, $\mathfrak{O}_K$ son anneau d'entiers et notons $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$. Les éléments de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$ sont alors les $\mathfrak{O}_K$-modules projectifs $\mathscr{L}$ de rang 1 munis d'une métrique hermitienne sur les droites complexes $\mathscr{L} \otimes_\sigma \mathbf{C}$ (compatibles à la conjugaison complexe). Un élément de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$ possède un degré d'Arakelov, défini par la formule

$$\widehat{\deg}\,(\mathscr{L}, \|\cdot\|_\sigma) = \log \#(\mathscr{L}/s\mathfrak{O}_K) - \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|s\|_\sigma,$$

où s est un élément non nul quelconque de $\mathscr{L}$; d'après la formule du produit, il est indépendant du choix de s.

Soit X un schéma plat et projectif sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K et $(\mathscr{L}, \|\cdot\|) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$. Associons à tout point $P \in X_K(\overline{K})$ le réel $h(P) = [K' : \mathbf{Q}]^{-1} \widehat{\deg}\, \varepsilon_P^*(\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ où K' est un corps de définition de P et $\varepsilon_P : \operatorname{Spec} \mathfrak{O}_{K'} \to X$ est la section canonique. Alors, la fonction $P \mapsto h(P)$ est un représentant de la hauteur de Weil (logarithmique, absolue) de P pour le fibré en droites $\mathscr{L}_K$ sur X_K. (Voir [**36**], ou [**3**] pour des généralisations.)

Certaines notations changent de sens au cours du texte ; en particulier,

— nous notons e un élément d'une extension au chapitre 3 et un indice de ramification au chapitre 4 ;

— la lettre η peut désigner notamment le point générique d'un schéma (chapitres 1 et 3) et une forme différentielle de seconde espèce (paragraphe 4.2).

Chapitre 1.—

Extensions des variétés abéliennes par des tores

1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous voulons montrer comment la théorie d'Arakelov permet d'interpréter les hauteurs canoniques au sens de [**1, 4**] sur des extensions de variétés abéliennes par des tores. Dans l'esprit de la construction arakelovienne de la hauteur de Néron–Tate (cf. [**27, 28, 14**]), nous montrons que sur une telle extension, il existe une hauteur canonique et elle est donnée par une degré d'Arakelov sur un modèle convenable.

Le modèle entier est donné grâce à la formule de Weil–Barsotti dans le cas de bonne réduction et à une extension de cette formule faisant intervenir la composante neutre des modèles de Néron en général (cf. [**23**, (5.1), p. 53]). Sur une variante entière de la compactification de Serre, Faltings–Wüstholz [**34, 13**], nous construisons un faisceau inversible relativement ample et le munissons de métriques hermitiennes à l'infini. Enfin, comme dans [**28, 27**], nous montrons que la hauteur est obtenue par un degré d'Arakelov, le manque d'uniformité des modèles entiers étant compensé par les propriétés du degré d'Arakelov calculé relativement aux morphismes de multiplication par un entier sur le groupe algébrique.

Au paragraphe 1.2, nous explicitons la formule de Weil–Barsotti. Au paragraphe 1.3, nous construisons le modèle entier et les divers faisceaux inversibles métrisés qui interviennent pour définir la hauteur relative. Nous explicitons aussi leur comportement relativement aux morphismes de multiplication.

La méthode est celle utilisée par Moret-Bailly dans l'étude du prolongement métrisé d'un faisceau inversible muni d'une structure cubiste sur une variété abélienne, mais là où Moret-Bailly utilise le théorème du cube, comme nous n'avons à considérer que des fibrés algébriquement équivalents à zéro, nous utilisons le théorème du carré. D'autre part, on pourrait facilement déduire les résultats énoncés de ceux de Moret-Bailly sur le prolongement des biextensions [**27, 28**].

Au paragraphe 1.4, nous construisons la hauteur relative. À l'aide des résultats du paragraphe précédent, nous montrons son caractère linéaire et l'identifions aux hauteurs canoniques mentionnées plus haut. Un des avantages de cette théorie relative est que tout le travail nécessaire pour la hauteur de Néron–Tate ne l'est plus ici : en termes imagés, si la variété abélienne a mauvaise réduction, l'extension, elle, a bonne réduction relativement à la variété abélienne.

Enfin, le paragraphe 1.5 contient quelques compléments sur les points de hauteur relative nulle et les « points de Ribet » de [**19, 1**].

1.2. Formule de Weil–Barsotti

Commençons par rappeler cette formule dans le cas de schémas abéliens. Soient S un schéma noethérien et A un S-schéma abélien. D'après Hilbert 90, il correspond à une S-extension commutative $1 \to \mathbf{G}_m \to E \to A \to 0$ de A par $\mathbf{G}_m$ un espace principal homogène sous $\mathbf{G}_m$ sur A et donc un faisceau inversible $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(A)(S)$ tel que E s'identifie au fibré en droites $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)$ privé de sa section nulle.

Notons m (resp. p_1, p_2) l'addition (resp. les deux projections) $A \times_S A \to A$.

Proposition 1.2.1 (Barsotti–Rosenlicht–Weil, [**30**]). — *Soient S un schéma et A un schéma abélien sur S. On note $A^\vee = \mathrm{Pic}^0(A/S)$ le schéma abélien dual. L'application $E \to \mathscr{L}$ décrite ci-dessus est un isomorphisme de foncteurs en groupes sur la catégorie des S-schémas*

$$\mathbf{Ext}^1_S(A, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} A^\vee .$$

Preuve. (cf. [**26**, Appendice]). Montrons d'abord que cette application est bien à valeurs dans $A^\vee$. En effet, si S' est un S-schéma, $x \in A(S')$ et $\xi \in E(S')$ relève x, la translation T_x par x dans $A_{S'}$ (resp. T_ξ par ξ dans $E_{S'}$) nous fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_{S'} \arrow[r, "T_\xi"] \arrow[d] & E_{S'} \arrow[d] \\ A_{S'} \arrow[r, "T_x"] & A_{S'} \end{tikzcd} ,$$

d'où un isomorphisme $\mathscr{L} \to T_x^* \mathscr{L}$.

Cela implique alors que le fibré inversible $m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}$ sur $A \times_S A$ est trivial et donc que $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)(S) = A^\vee(S)$ (cf. [**30**]).

Il est immédiat que cette application est un morphisme de groupes. Montrons qu'elle est injective, autrement dit qu'il existe une unique structure d'extension de A par $\mathbf{G}_m$ sur le schéma $E_0 = \mathbf{G}_m \times_S A$. En effet, la multiplication dans E_0 s'interprète comme une application $A \times_S A \to \mathbf{G}_m$ qui est nécessairement constante ($A \times_S A$ est propre sur S, tandis que $\mathbf{G}_{mS}$ est affine) donc nulle, si bien que l'extension considérée est triviale.

Enfin, construisons la réciproque de cette application. Soit ainsi $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)$ et posons $E = \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\}$ le fibré en droites associé privé de sa section nulle. Le choix de l'élément neutre dans E revient à se donner un S-point de E au-dessus de ε_A, la section unité de A ; ainsi choisissons une « rigidification » de $\varepsilon_A^*\mathscr{L}$ c'est-à-dire un isomorphisme $\varepsilon_A^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_S$. D'autre part, comme $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)$, il existe un unique isomorphisme $m^*\mathscr{L} \simeq p_1^*\mathscr{L} \otimes p_2^*\mathscr{L}$ qui est compatible avec la rigidification de $\mathscr{L}$, d'où une application

$$m_E : \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \to \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)$$

qui relève la multiplication $m : A \times_S A \to A$ et compatible avec la section unité $\varepsilon_E : S \to E$ de E. C'est la loi de groupe sur E que l'on cherchait. En effet, l'associativité résulte du fait que les deux compositions

$$\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \times_S (\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)) \to \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)$$

et

$$(\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)) \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \to \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)$$

proviennent toutes deux de l'unique isomorphisme rigidifié

$$p_{123}^*\mathscr{L} \to p_1^*\mathscr{L} \otimes p_2^*\mathscr{L} \otimes p_3^*\mathscr{L},$$

p_1, p_2, p_3 désignant les projections $A^3 \to A$ et p_{123} la loi de groupe $A^3 \to A$.

De même, la commutativité de la loi de groupe est une conséquence de la symétrie de l'isomorphisme rigidifié $m^*\mathscr{L} \simeq p_1^*\mathscr{L} \otimes p_2^*\mathscr{L}$.

Enfin, il existe une unique application

$$\iota_E : \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\} \to \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\}$$

au-dessus de la multiplication par -1, compatible avec ε_E et provenant de la composition de l'isomorphisme $[-1]_A^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^\vee$ et de l'application naturelle $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\} \to \mathbf{V}(\mathscr{L}) \setminus \{0\}$ qui associe à une base de $\mathscr{L}$ la base duale de $\mathscr{L}^\vee$. La composée $m_E \circ (\mathrm{id}_E, \iota_E)$ est une application $E \to E$ constante sur les fibres de la projection $E \to A$ et à valeurs dans la fibre de E au-dessus de ε_A. Elle est ainsi constante et vaut ε_E, ce qui prouve que ι_E est le morphisme « inverse ».

Nous avons ainsi associé à tout élément de $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)$ muni d'une rigidification sur la section nulle une extension de A par $\mathbf{G}_m$ dont l'espace sous-jacent est $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\}$; cette application est la réciproque voulue. ■

Soient S un schéma de Dedekind, c'est-à-dire un schéma normal noethérien de dimension 1 et $\pi : A \to S$ un « modèle de Néron ». Autrement dit, il existe un ouvert dense U de S tel que A_U est un schéma abélien et A est le modèle de Néron de A_U sur S. On note A^0 la composante neutre de A c'est-à-dire le plus grand sous-schéma en groupes ouvert de A/S à fibres connexes.

Soit $A^\vee$ le modèle de Néron dual, c'est-à-dire le modèle de Néron du schéma abélien dual $(A_U)^\vee$ (indépendant de U).

On a alors le lemme :

Proposition 1.2.2 (Artin–Mazur, [**23**, Lemme (5.1), p. 53]). — *Avec ces notations, il existe un unique isomorphisme de foncteurs sur la catégorie des S-schémas lisses*

$$\mathbf{Ext}^1_S(A^0, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} A^\vee$$

qui prolonge la dualité des schémas abéliens A_U et $(A_U)^\vee$.

Preuve. Artin–Mazur prouvent ce lemme en montrant que $\mathbf{Ext}^1_S(A^0, \mathbf{G}_m)$ vérifie la propriété universelle du modèle de Néron, à savoir que pour tout S-schéma lisse S', une S'-extension de $A_{U\times_S S'}$ par $\mathbf{G}_{m\,S'}$ se prolonge uniquement en une S'-extension de $A^0_{S'}$ par $\mathbf{G}_{m\,S'}$. Nous donnons ici une démonstration un peu plus constructive que la leur. Comme $S' \to S$ est lisse, la formation du modèle de Néron commute au changement de base $S' \to S$ et nous pouvons supposer que $S' = S$ dans la suite.

La démonstration de la proposition 1.2.1 nous ramène à montrer le fait suivant : soit $\mathscr{L}_U \in \mathrm{Pic}(A_U)$ muni d'une rigidification $\varepsilon^*_{A_U}\mathscr{L}_U \simeq \mathscr{O}_U$ et d'un isomorphisme rigidifié $m^*_{A_U}\mathscr{L}_U \to p_1^*\mathscr{L}_U \otimes p_2^*\mathscr{L}_U$, alors il existe une unique façon de prolonger ces données en un faisceau inversible $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(A^0)$, une rigidification $\varepsilon^*_{A^0}\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_S$ et un isomorphisme rigidifié $m^*_{A^0}\mathscr{L} \to p_1^*\mathscr{L} \otimes p_2^*\mathscr{L}$. (Rappelons qu'un modèle de Néron vérifie toujours $\pi_*\mathscr{O}_{A^0} = \mathscr{O}_S$.)

Choisissons un diviseur $D_U \in \mathrm{Div}(A_U)$ tel que $\mathscr{L} = \mathscr{O}(D_U)$. Comme A^0 est régulier, l'adhérence schématique D de D_U dans A^0 est un diviseur de A^0 et définissons $\mathscr{L}_1 = \mathscr{O}(D)$. Pour rigidifier $\mathscr{L}_1$, on le remplace par $\mathscr{L}_1 \otimes \pi^*\varepsilon^*_{A^0}\mathscr{L}_1^\vee$ qui est un faisceau inversible $\mathscr{L}_2$ sur A^0, muni d'une rigidification qui prolonge la rigidification initiale sur $\mathscr{L}_U$. Enfin, le faisceau inversible $m^*_{A^0}\mathscr{L}_2 \otimes p_1^*\mathscr{L}_2^\vee \otimes p_2^*\mathscr{L}_2^\vee$ est (sur S) génériquement trivial, puisque trivial une fois restreint à $A_U \times_U A_U \subset A^0 \times_S A^0$. Comme la projection $\pi_2 : A^0 \times_S A^0 \to S$ est à fibres connexes, il provient de la base et est donc de la forme $\pi_2^*\mathscr{M}$, le faisceau inversible $\mathscr{M}_U$ étant canoniquement trivial. Posons finalement $\mathscr{L} = \mathscr{L}_2 \otimes \pi^*\mathscr{M}^\vee$. C'est un élément de $\mathrm{Pic}(A^0)$ muni d'une rigidification et d'un isomorphisme rigidifié comme on voulait, ce qui prouve l'existence du prolongement.

L'unicité du prolongement se démontre de même, si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont deux prolongements, le faisceau inversible $\mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}^\vee$ est génériquement trivial et rigidifié.

Il provient ainsi de la base, mais le faisceau inversible sur S dont il provient est nécessairement trivial à cause des rigidifications. Ainsi, il existe un unique isomorphisme rigidifié $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ et il est compatible aux deux isomorphismes supplémentaires. ∎

1.3. Compactification, métriques

Soit S un schéma de Dedekind connexe, notons η son point générique. Soient A_η une η-variété abélienne, A son modèle de Néron sur S et A^0 la composante neutre de A. Soient E_η une extension de A_η par $\mathbf{G}_m$ et E l'extension de A^0 par $\mathbf{G}_m$ fournie par la proposition 1.2.2. Notons $\mathscr{L}$ le faisceau inversible sur A^0 associé à E, vue comme $\mathbf{G}_m$-torseur, de sorte que E s'identifie à $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\}$.

On pose $\mathscr{W} = \mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^\vee$ et on définit $\overline{E}$ comme $\mathbf{P}(\mathscr{W})$. C'est un A^0-fibré projectif dont E est un ouvert. En effet, si $P \in A^0(S)$ et $\varepsilon_P : S \to A^0$ est la section correspondante, un S-point de E au-dessus de P correspond à un isomorphisme $\mathscr{O}_S \to \varepsilon_P^*\mathscr{L}$, tandis qu'un S-point de $\overline{E}$ correspond à un quotient localement libre de rang 1 de $\varepsilon_P^*(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^\vee)$, autrement dit à un sous-faisceau inversible de $\mathscr{O}_S \oplus \varepsilon_P^*\mathscr{L}$ tel que le quotient soit sans torsion.

Les projections de $\mathscr{W}$ vers $\mathscr{O}_{A^0}$ (resp. $\mathscr{L}^\vee$) définissent deux sous-schémas de $\overline{E}$, respectivement les sections « nulle » et « infini » (la section nulle est effectivement la section nulle de $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)$). Ce sont deux diviseurs relatifs de $\overline{E}$ au-dessus de A^0, notons les D_0 (resp. D_∞). Notant π la projection $\mathbf{P}(\mathscr{W}) \to A$, il résulte du lemme suivant que $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{W})}(D_0 - D_\infty) = \pi^*\mathscr{L}$.

Lemme 1.3.1. — *(cf.* [**17**, Chap. V, Prop. 2.6]*) Soient X un schéma, $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang $n+1$ sur X et $\pi : \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$. Si $\mathscr{N}$ et $\mathscr{V}$ sont deux faisceaux localement libres sur X, de rang 1 et n respectivement, avec une suite exacte $0 \to \mathscr{N} \to \mathscr{E} \to \mathscr{V} \to 0$, l'image de $\mathbf{P}(\mathscr{V}) \hookrightarrow \mathbf{P}$ est un diviseur D dans $\mathbf{P}$ et $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(D) \otimes \pi^*\mathscr{N}$.*

Preuve. Posons $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \otimes \mathscr{N}^\vee$ et $\mathbf{P}' = \mathbf{P}(\mathscr{E}')$. Comme $\mathscr{N}$ est inversible, $\mathbf{P}'$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{P}$, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{P}'}(1)$ s'identifiant d'après [**17**, Chap. II, Lemma 7.9] à $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \mathscr{N}^{-1}$. Cela nous ramène à prouver le lemme quand $\mathscr{N}$ est trivial. Dans ce cas, l'injection $\mathscr{O}_X \hookrightarrow \mathscr{E}$ s'interprète comme un élément non nul de $\Gamma(X, \mathscr{E})$, puis comme $\pi_*\mathscr{O}(1) = \mathscr{E}$, comme une section s non nulle de $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1))$ dont le diviseur est égal à D ; ainsi, le lemme est démontré. ∎

Notons $\mathscr{M}_0$ et $\mathscr{M}_\infty$ les faisceaux inversibles associés aux diviseurs D_0 et D_∞. Ainsi, $\mathscr{M}_0 \otimes \mathscr{M}_\infty^\vee \simeq \pi^*\mathscr{L}$. Si $\sigma : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to S$ est une point complexe de

S, montrons comment munir les faisceaux inversibles $\sigma^*\mathscr{M}_0$ (resp. $\sigma^*\mathscr{M}_\infty$) de métriques hermitiennes.

Montrons tout d'abord l'existence d'une « métrique carrée » sur $\mathscr{L}$ (cf. [**28**, II.2] dans le cas cubiste) :

Proposition 1.3.2. — *Soient X une variété abélienne complexe et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X muni d'un « isomorphisme carré » $m^*\mathscr{L} \simeq p_1^*\mathscr{L} \otimes p_2^*\mathscr{L}$. Alors, il existe une unique métrique hermitienne sur $\mathscr{L}$ telle que cet isomorphisme soit de norme 1. De plus, si $\mathscr{L}$ est rigidifié à l'origine, cette métrique est l'unique métrique hermitienne sur $\mathscr{L}$ compatible à la rigidification et dont la forme de courbure est nulle.*

Preuve. Tout d'abord, il existe une unique rigidification à l'origine telle que l'isomorphisme carré y soit compatible et si $c_1 \in H^2_{dR}(X)$ est la première classe de Chern de $\mathscr{L}$, il existe d'après la théorie de Hodge une unique forme différentielle invariante par translations qui représente c_1. D'autre part, le « lemme $\partial\overline{\partial}$ » (cf. [**16**, pp. 148–149]) implique l'existence d'une métrique hermitienne sur $\mathscr{L}$ dont la forme de courbure soit cette forme différentielle, et deux telles métriques diffèrent d'une constante strictement positive. Il existe ainsi sur $\mathscr{L}$ une unique métrique qui soit compatible à la trivialisation à l'origine et dont la forme de courbure soit invariante par translations. D'autre part, $\mathscr{L}$ appartenant à $\mathrm{Pic}^0(X)$, on a $c_1 = 0$ et la courbure de la métrique est nulle.

Enfin, le fibré $m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^\vee \otimes p_2^*\mathscr{L}^\vee$, trivial, est muni d'une métrique hermitienne dont la forme de courbure est nulle. Par suite, il possède une section globale sans zéros dont la norme est une fonction harmonique et donc constante, X étant compacte. Ainsi, la norme de l'isomorphisme carré est constante ; sa valeur à l'origine est par définition égale à 1, d'où la proposition. ■

Corollaire 1.3.3. — *Avec les notations de la proposition précédente, l'unique isomorphisme $[n]^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^{\otimes n}$ compatible aux rigidifications à l'origine est une isométrie.*

Preuve. La proposition précédente nous fournit sur le faisceau inversible $[n]^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{\vee n}$, canoniquement isomorphe au faisceau $\mathscr{O}_X$, une métrique hermitienne canonique dont il faut vérifier qu'elle est triviale. Or, d'une part cette métrique est constante (sa forme de courbure étant nulle), et d'autre part, la norme de la section 1 vaut 1 à l'origine, ce qui achève la preuve du corollaire. ■

La proposition précédente nous fournit une métrique canonique sur $\sigma^*\mathscr{L}$, si bien que $\mathscr{W}$ est muni, pour tout point complexe $\sigma : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to S$ de S, d'une métrique continue $\|\cdot\|^\sigma_{\sup}$: si $s = (s_1, s_2)$ est une section locale de $\mathscr{O}_A \oplus \mathscr{L}^\vee$, on définit

$$\|s\|^\sigma_{\sup}(x) = \max\left(\|s_1\|(x^\sigma), \|s_2\|(x^\sigma)\right).$$

Remarque 1.3.4. Cette métrique est seulement continue ; c'est cependant cette métrique précisément qui reflète l'action du tore sur la compactification, cf. la proposition 1.3.5. D'autre part, lorsqu'on considère la hauteur de points rationnels, il suffit de choisir une métrique continue. Enfin, comme c'est une limite uniforme de métriques lisses, les arguments de [**38**] montrent que la considération de cette métrique est légitime dans le contexte de la géométrie d'Arakelov en dimension supérieure, par exemple pour étudier la hauteur des cycles (ce que, jusqu'à nouvel ordre, nous ne ferons pas !).

Comme le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1)$ est un quotient de $\pi^*\mathscr{W}$, il est naturellement muni d'une métrique hermitienne. D'après le lemme 1.3.1, $\mathscr{M}_0 = \pi^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1)$ ce qui nous donne une métrique hermitienne canonique ω_0 sur $\mathscr{M}_0$. De même, $\mathscr{M}_\infty$ est muni d'une métrique hermitienne canonique ω_∞.

Étudions enfin le comportement des objets que nous venons d'introduire par rapport aux morphismes de multiplication par n dans E.

Proposition 1.3.5. — *Le morphisme $[n]_E : E \to E$ s'étend uniquement en un morphisme $\overline{E} \to \overline{E}$, toujours noté $[n]$. De plus, si $\bullet \in \{0, \infty\}$ et $n \geqslant 0$, on a des isomorphismes canoniques de norme 1 : $[n]^*\mathscr{M}_\bullet \simeq \mathscr{M}_\bullet^n$; pour $n \leqslant 0$, on a $[n]^*\mathscr{M}_0 \simeq \mathscr{M}_\infty^{|n|}$ et réciproquement.*

Preuve. Si $n \in \mathbf{Z}$, la multiplication par n dans E provient du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbf{V}(\mathscr{L}^{\vee n}) \setminus \{0\} \arrow[r, equal] \arrow[dr] & \mathbf{V}([n]^*\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\} \arrow[d] \\
 & & A^0 \arrow[r, "{[n]}"] & A^0
\end{tikzcd},$$

où, l'application $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee) \setminus \{0\} \to \mathbf{V}(\mathscr{L}^{\vee n}) \setminus \{0\}$ associe à une section sans zéros de $\mathscr{L}$ la puissance tensorielle n-ème de cette section, et le carré de droite est cartésien. Il en résulte que le morphisme $[n] : E \to E$ s'étend à $\overline{E}$ selon le diagramme, dont le carré de droite est cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(\mathscr{W}) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbf{P}(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^{\vee n}) \arrow[r, equal] \arrow[dr] & \mathbf{P}([n]^*\mathscr{W}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}(\mathscr{W}) \arrow[d] \\
 & & A^0 \arrow[r, "{[n]}"] & A^0
\end{tikzcd},$$

la flèche $\mathbf{P}(\mathscr{W}) \to \mathbf{P}(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^{\vee n})$ étant donnée par le morphisme d'algèbres

$$\mathrm{Sym}^\bullet(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^{\vee n}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^\bullet(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^\vee)$$

pour $n \geqslant 0$, et

$$\mathrm{Sym}^\bullet(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^{|n|}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^\bullet(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}) \to \mathrm{Sym}^\bullet\left((\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^\vee) \otimes \mathscr{L}\right)$$

quand $n \leqslant 0$.

Quand $n \geqslant 0$, on a ainsi $[n]_{\overline{E}}^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(n)$. D'autre part, quand $n \leqslant 0$, on a d'après [**17**, II, Lemma 7.9],

$$[-1]_{\overline{E}}^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \pi^* \mathscr{L}.$$

Par conséquent, $[-1]_{\overline{E}}^* \mathscr{M}_\infty = \mathscr{M}_0$ et $[-1]_{\overline{E}}^* \mathscr{M}_0 = \mathscr{M}_\infty$, soit parce que $[-1]$ est une involution, soit par un calcul direct. La formule pour $n \leqslant 0$ quelconque résulte de l'écriture $[n] = [-1] \circ [-n]$.

Il reste à montrer que ces isomorphismes respectent les métriques hermitiennes : pour cela, il suffit de montrer que les isomorphismes

$$[-1]^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \pi^* \mathscr{L} \qquad \text{et} \qquad [n]^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(n), \quad \text{pour } n \geqslant 0,$$

respectent eux-mêmes les métriques. Dans le premier cas, il suffit de remarquer que les métriques hermitiennes sur les deux faisceaux localement libres canoniquement isomorphes $\pi_*[-1]^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) = \mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}$ et $\pi_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \pi^* \mathscr{L}) = (\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^\vee) \otimes \mathscr{L}$ coïncident, si bien que l'isomorphisme naturel $[-1]^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \pi^* \mathscr{L}$ est une isométrie. Dans le second cas, cela résulte du fait que le morphisme de faisceaux localement libres

$$\mathrm{Sym}^k(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^{\vee n}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^{kn}(\mathscr{O}_{A^0} \oplus \mathscr{L}^\vee)$$

est une isométrie partielle. ∎

1.4. Construction des hauteurs relatives

On reprend les notations du paragraphe précédent, en supposant que S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Rappelons que le premier groupe de Chow–Arakelov $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$ de S s'identifie au groupe des faisceaux inversibles sur S munis de métriques hermitiennes « à l'infini » compatibles à la conjugaison complexe.

Fixons tout d'abord un entier $N > 0$ qui annule les groupes des composantes connexes de A_s pour tout point $s \in S$.

Soient $P \in E(\eta)$ et $Q = \pi(P) \in A(\eta)$. Comme A/S est le modèle de Néron de A_η, il existe une section $\varepsilon_Q : S \to A$ qui prolonge Q. Par conséquent, on peut trouver un entier $N \geqslant 1$ tel que $[N]_A Q \in A(\eta)$ se prolonge en une section $\varepsilon_{[N]Q} : S \to A^0$. Par suite, $\overline{E}/A^0$ étant projectif, $[N]P$ se prolonge en une section $\varepsilon_{[N]P} : S \to \overline{E}$ qui relève $\varepsilon_{[N]Q}$.

Proposition 1.4.1. — *Si* $\bullet \in \{0,\infty\}$, *les éléments* $(\varepsilon_{[N]P}^{*}\mathscr{M}_{\bullet}) \otimes \frac{1}{N}$ *de* $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ *ne dépendent pas du choix de* N. *On les note* $H_{\bullet,S}(P)$.

Preuve. Le caractère canonique des métriques hermitiennes $\omega_{\bullet}$ sur les faisceaux inversibles $\mathscr{M}_{\bullet}$ implique qu'elles sont invariantes par la conjugaison complexe. Ainsi, nous avons bien par fonctorialité des éléments $\varepsilon_{[N]P}^{*}\mathscr{M}_{\bullet}$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$.

D'autre part, si M est un autre entier qui annule les groupes des composantes connexes de A_s pour tout $s \in S$, montrons que

$$(\varepsilon_{[N]P}^{*}\mathscr{M}_{\bullet}) \otimes \frac{1}{N} = (\varepsilon_{[M]P}^{*}\mathscr{M}_{\bullet}) \otimes \frac{1}{M}.$$

Pour cela, il suffit de supposer que M est un multiple de N, soit $M = Nk$ pour un entier $k \geqslant 1$. Or d'une part, $[k]^*\mathscr{M}_{\bullet} = \mathscr{M}_{\bullet}^{\otimes k}$ en tant que faisceau inversible métrisé (proposition 1.3.5) et d'autre part, $\varepsilon_{[M]P} = [k] \circ \varepsilon_{[N]P}$, si bien que l'on a

$$\varepsilon_{[M]P}^{*}\mathscr{M}_{\bullet} = (\varepsilon_{[N]P}^{*}\mathscr{M}_{\bullet})^{\otimes k},$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

D'autre part, la proposition 1.3.5 (ou la proposition 1.4.1, comme on veut !) entraîne immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1.4.2. — *Soit* $P \in E(\eta)$. *Si* $n \geqslant 0$, *on a* $H_{\bullet,S}([n]P) = nH_{\bullet,S}(P)$. *De plus* $H_{0,S}([-1]P) = H_{\infty,S}(P)$.

Proposition 1.4.3. — *Soient* $\eta' \to \eta$ *une extension finie,* $f : S' \to S$ *le normalisé de* S *dans* η', A' *le modèle de Néron de* $A_\eta \times_\eta \eta'$, E' *l'extension de* A'^0 *par* $\mathbf{G}_m$ *qui prolonge* $E_\eta \times \eta'$. *Si* $P \in E_\eta(\eta)$, *on a*

$$f_* H_{\bullet,S'}(P \times_S S') = [S' : S] H_{\bullet,S}(P) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(S') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \quad .$$

Preuve. Si A/S est semi-stable, c'est clair : la composante neutre de A' est obtenue à partir de celle de A par changement de base, si bien que $E' = E \times_S S'$, etc.

Dans le cas général, soit $\varphi : A \times_S S' \to A'$ le morphisme naturel qui prolonge l'identité $A_\eta \times \eta' = A_{\eta'}$. L'image de $A^0 \times_S S'$ par φ est contenue dans A'^0 et il nous faut comparer $\varphi^*\mathscr{L}'$ et $\mathscr{L} \times_S S'$. Or, $\varphi^*\mathscr{L}' \otimes f^*\mathscr{L}^\vee$ est un faisceau inversible métrisé sur $A^0 \times_S S'$ qui vérifie le théorème du carré et est génériquement trivial. Comme $S' \to S$ est fidèlement plat, on a $(\pi \times_S S')_* \mathscr{O}_{A^0 \times_S S'} = \mathscr{O}_{S'}$; d'autre part, $A^0 \times_S S' \to S'$ est à fibres connexes, si bien que $\varphi^*\mathscr{L}' \otimes f^*\mathscr{L}^\vee$ provient d'un faisceau inversible sur S', lequel est trivial à cause des rigidifications. Autrement dit, φ^*E', etc. sont obtenues à partir de E par changement de base, d'où la proposition. ■

Nous pouvons donc poser :

Définition 1.4.4. *Soient $\overline{\eta}$ la clôture algébrique de η et $P \in E(\overline{\eta})$. Si η' est une extension finie de η telle que $P \in E(\eta')$ et $f : S' \to S$ est le normalisé de S, on appelle* hauteurs relatives *de P les éléments $H_\bullet(P) := f_* H_{\bullet,S'}(P) \otimes \frac{1}{[S':S]}$ de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.*

Théorème 1.4.5. — *Les fonctions $\widehat{\deg} H_\bullet : E(\overline{\eta}) \to \mathbf{R}$ sont les hauteurs canoniques sur $\overline{E}(\overline{\eta})$ attachées aux faisceaux inversibles $\mathscr{M}_{\bullet,\eta}$ sur $\overline{E}_\eta$. De plus (Zarhin–Bloch, Mazur–Tate), $\widehat{\deg} H_0(P) - \widehat{\deg} H_\infty(P)$ est la hauteur de Néron–Tate de $\pi(P)$ relativement au faisceau algébriquement équivalent à zéro $\mathscr{L}$ sur A.*

Preuve. Pour $\bullet \in \{0, \infty\}$, soit $h_\bullet$ une hauteur de Weil sur $\overline{E}(\overline{\eta})$ attachée au faisceau inversible $\mathscr{M}_{\bullet,\eta}$ sur $\overline{E}_\eta$. Fixons un entier $n \geqslant 2$. Les *hauteurs canoniques* relatives au faisceau inversible $\mathscr{M}_{\bullet,\eta}$ de poids n pour le morphisme $[n]_{\overline{E}_\eta}$ (cf. par exemple [**4**]) sont par définition les fonctions sur $\overline{E}(\overline{\eta})$ définies par

$$\hat{h}_\bullet(P) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n^k} h_\bullet([n^k]P).$$

Rappelons pourquoi cette limite existe : comme $[n]^* \mathscr{M}_{\bullet,\eta} = \mathscr{M}_{\bullet,\eta}^n$, il existe une constante C_n telle que $|h_\bullet([n]P) - n h_\bullet(P)| \leqslant C_n$ pour tout point P, si bien que

$$\left| \frac{1}{n^k} h_\bullet([n^k]P) - \frac{1}{n^{k-1}} h_\bullet([n^{k-1}]P) \right| \leqslant \frac{1}{n^k} C_n,$$

et la limite s'écrit comme somme d'une série uniformément convergente. La dénomination hauteur est justifiée par la comparaison $|\hat{h}_\bullet - h_\bullet| \leqslant C_n/(n-1)$, tandis que le terme canonique vient de ce que $\hat{h}_\bullet([n]P) = n\hat{h}_\bullet(P)$ pour tout P.

Montrons maintenant qu'il existe pour toute extension finie $\eta' \to \eta$ une constante $C_{\eta'}$ telle que l'on ait, pour tout point $P \in \overline{E}(\eta')$, l'inégalité

$$\left| h_\bullet(P) - \widehat{\deg} H_\bullet(P) \right| \leqslant C_{\eta'}.$$

En effet, si S' est le normalisé de S dans η' et si l'entier $N > 0$ annule les groupes des composantes connexes du modèle de Néron de $A_{\eta'}$ sur S', l'expression $h_\bullet([N]P) - N h_\bullet(P)$ est bornée uniformément en $P \in E(\eta')$. D'autre part, $\widehat{\deg} H_\bullet([N]P) = N \widehat{\deg} H_\bullet(P)$ d'après la proposition 1.4.2. Enfin, en choisissant comme modèle entier de $\overline{E}_{\eta'}$ l'adhérence de E' dans un espace projectif convenable, on constate que la différence $\widehat{\deg} H_\bullet([N]P) - h_\bullet([N]P)$ est uniformément bornée lorsque P décrit $\overline{E}(\eta')$. En mettant bout à bout ces majorations, on a bien une inégalité comme annoncée.

La proposition 1.4.2 et la définition de la hauteur canonique entraînent alors que pour tout $P \in \overline{E}(\eta')$,

$$\hat{h}_\bullet(P) = \widehat{\deg} H_\bullet(P).$$

L'extension finie η' étant arbitraire, cela implique bien que $\hat{h}_\bullet = \widehat{\deg} H_\bullet$.

Enfin, comme $\mathscr{M}_0 \otimes \mathscr{M}_\infty^\vee = \pi^*\mathscr{L}$, on a pour tout $P \in \overline{E}(\eta)$ relevant un point de A^0,

$$\widehat{\deg}\, H_0(P) - \widehat{\deg}\, H_\infty(P) = \widehat{\deg}\, \varepsilon_P^*\pi^*\mathscr{L} = \widehat{\deg}\, (\pi \circ \varepsilon_P)^*\mathscr{L}.$$

Autrement dit, $h_{\mathscr{L}}$ désignant la hauteur de Néron–Tate sur A_η relative au fibré inversible $\mathscr{L}$, la fonction linéaire

$$\widehat{\deg}\, H_0 - \widehat{\deg}\, H_\infty - h_{\mathscr{L}} \circ \pi$$

est, pour tout $\eta' \to \eta$, bornée sur un sous-groupe d'indice fini de $A(\eta')$; elle est alors nécessairement nulle, ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarquons pour finir que les hauteurs relatives contiennent toute l'information nécessaire pour connaître la hauteur d'un point de l'extension (compactifiée) dans un plongement projectif donné : le groupe de Picard de $\overline{E}_\eta$ est $\mathbf{Z} \oplus \mathrm{Pic}(A_\eta)$, si bien que tout faisceau (très) ample sur $\overline{E}_\eta$ est de la forme $\pi^*\mathscr{N} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(n)$ pour un faisceau (très) ample $\mathscr{N}$ sur A_η et un entier $n > 0$. En sus de la hauteur de Néron–Tate sur A_η, la connaissance de H_∞ suffit donc, même si la considération de $H_0 + H_\infty$ est plus symétrique.

Corollaire 1.4.6 (Waldschmidt, [**7**, App.], Laurent [**21**]). — *Soit h_{NT} une hauteur de Néron–Tate sur A_η pour un diviseur symétrique ample et h la fonction $E_\eta(\overline{\eta}) \to \mathbf{R}_+$ définie par $h_{NT} \circ \pi + \widehat{\deg}\, H_0 + \widehat{\deg}\, H_\infty$. C'est une hauteur sur E_η ; de plus $h(P) = 0$ si et seulement si P est d'ordre fini.*

Preuve. Que ce soit une hauteur résulte du théorème 1.4.5 et des remarques qui précèdent ; elle est positive comme somme de fonctions positives. Enfin, si $h(P) = 0$, il est nécessaire que $h_{NT}(\pi(P)) = 0$, ce qui prouve que $\pi(P)$ est d'ordre fini. Alors, pour tout entier n, $h([n]P) = nh(P) = 0$ et le théorème de Northcott entraîne que l'ensemble $\{P, 2P, 3P, \dots\}$ est fini, c'est-à-dire que P est d'ordre fini. La réciproque est claire, d'où le corollaire. ■

1.5. Points de hauteur relative nulle

Pour finir, nous voulons donner quelques expressions explicites des hauteurs H_0 et H_∞ et appliquer la théorie précédente à l'étude des points de hauteur relative nulle.

Nous conservons les notations des paragraphes précédents. Rappelons qu'un point P de $\overline{E} = \mathbf{P}(\mathscr{W})$ relevant une section (de la composante neutre) $\varepsilon_Q : S \to A^0$ est la donnée d'un quotient inversible de rang 1 de $\mathscr{W}$, soit un faisceau inversible $\mathscr{I}$ sur S et deux sections $x_0 : \mathscr{O}_S \to \mathscr{I}$, $x_1 : \varepsilon_Q^*\mathscr{L}^\vee \to \mathscr{I}$ telles que $(x_0, x_1) : \mathscr{W} \to \mathscr{I}$ soit surjectif. Le point P_η appartient à E_η si et seulement si $x_0 \neq 0$ et $x_1 \neq 0$.

Les faisceaux inversibles $\mathscr{M}_\infty$ et $\mathscr{M}_0$ étant définis par les inclusions $\mathscr{O}_{A^0} \hookrightarrow \mathscr{W}$ et $\mathscr{L}^\vee \hookrightarrow \mathscr{W}$, les diviseurs sur S des éléments $\theta_\infty = x_0 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{O}_S, \mathscr{I})$ et $\theta_0 = x_1 \in \operatorname{Hom}(\varepsilon_Q^*\mathscr{L}^\vee, \mathscr{I})$ s'interprètent respectivement comme les intersections (transverses, sur le schéma $\overline{E}$) $D_\infty \cdot \overline{\{P\}}$ et $D_0 \cdot \overline{\{P\}}$.

Alors, $\varepsilon_P^*\mathscr{M}_\infty = \mathscr{I}$ et la norme de la section θ_∞ de $\mathscr{I}$ pour la métrique hermitienne héritée de $\mathscr{M}_\infty$, en tout point $\sigma \in S(\mathbf{C})$, est donnée par la formule

$$\|\theta_\infty\|^\sigma = \frac{\|x_0\|^\sigma}{\max(\|x_0\|^\sigma, \|x_1\|^\sigma)}$$

(à proprement parler, le membre de droite pour être calculé, nécessite le choix d'une métrique sur $\mathscr{I}$ mais n'en dépend pas). Notons $\operatorname{div}(\theta_\infty) = \sum\limits_{\mathfrak{p}\in S} n_{\infty,\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}]$, on a alors

$$\widehat{\operatorname{div}}\,(\theta_\infty) = \left(\operatorname{div}(\theta_\infty), -\log\|\theta_\infty\|^{2,\sigma}\right)$$

et

$$\widehat{\deg}\, H_\infty(P) = \widehat{\deg}\ \widehat{\operatorname{div}}\,(\theta_\infty) = \sum_{\mathfrak{p}} n_{\infty,\mathfrak{p}} \log N(\mathfrak{p}) - \sum_{\sigma\in S(\mathbf{C})} \log\|\theta_\infty\|^\sigma.$$

C'est une somme de termes positifs de sorte que la hauteur relative $\widehat{\deg}\, H_\infty(P)$ est nulle si et seulement si θ_∞ est un isomorphisme dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$: θ_∞ est un isomorphisme de faisceaux inversibles et sa norme est 1 en toute place ; cette dernière condition équivaut à $\|x_0/x_1\|^\sigma \geqslant 1$.

De même, si $\operatorname{div}(\theta_0) = \sum_{\mathfrak{p}} n_{0,\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}]$, on a

$$\widehat{\deg}\, H_0(P) = \sum_{\mathfrak{p}\in S} n_{0,\mathfrak{p}} \log N(\mathfrak{p}) - \sum_{\sigma\in S(\mathbf{C})} \log\|\theta_0\|^\sigma\ ,$$

où

$$\|\theta_0\|^\sigma = \frac{\|x_1\|^\sigma}{\max(\|x_0\|^\sigma, \|x_1\|^\sigma)}.$$

Ainsi, la hauteur relative $\widehat{\deg}\, H_0(P)$ est nulle si et seulement si θ_0 est un isomorphisme dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$, soit si c'est un isomorphisme de faisceaux inversibles sur S dont le norme est 1 en toute place, ce qui signifie $\|x_1/x_0\|^\sigma \geqslant 1$.

PROPOSITION 1.5.1. — *Avec les notations précédentes, si $\varepsilon_Q : S \to A^0$, il existe un point $P \in \overline{E}(S)$ de hauteur relative nulle relevant Q si et seulement si le faisceau inversible métrisé $\varepsilon_Q^*\mathscr{L} \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$ est trivial.*

Preuve. En effet, les considérations qui précèdent montre que si P est un tel point, les deux sections $x_0 : \mathscr{O}_S \to \mathscr{I}$ et $x_1 : \varepsilon_Q^*\mathscr{L}^\vee \to \mathscr{I}$ sont des isomorphismes de faisceaux inversibles et $\|x_0/x_1\|^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in S(\mathbf{C})$. Autrement dit, la section rationnelle $x_1 \circ x_0^{-1}$ de $\mathscr{L}$ est sans pôles ni zéros et de norme 1. Cela signifie bien qu'elle réalise un isomorphisme $\mathscr{O}_S \simeq \mathscr{L}$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$. ■

Ce résultat peut paraître surprenant, mais il s'explique bien par le lemme suivant (dont il peut être intéressant de remarquer que l'analogue géométrique est classique) :

LEMME 1.5.2. — *Soient S le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres et $(L, \|\cdot\|)$ un élément de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$, d'ordre fini. Alors il existe une extension finie $f : S' \to S$ telle que $f^*(L, \|\cdot\|)$ est nul dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S')$.*

Preuve. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $(L^{\otimes n}, \|\cdot\|^n) = 0$ et choisissons une base $t_n \in L^{\otimes n}$ de norme 1 en toute place, soit $\|t_n\|^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in S(\mathbf{C})$. Il existe une extension finie S'/S (par exemple, l'anneau des entiers du corps de classe de Hilbert du corps des fractions de S) telle que $L' = L \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}$ est un $\mathscr{O}_{S'}$ module libre de rang 1 ; soit donc s' une base de L'. Alors, $s'^{\otimes n}$ est une base de $L^n \otimes \mathscr{O}_{S'}$ et il existe une unité u de $\mathscr{O}_{S'}$ telle que $s'^{\otimes n} = ut_n$. Une extension $S'' \to S'$ telle que $u^{1/n} \in \mathscr{O}_{S''}$ permet de poser $s'' = u^{-1/n}s'$; on constate que s'' est une base de $L'' = L' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S''}$ de norme 1 en toute place, si bien que $L \otimes \mathscr{O}_{S''} = 0$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S'')$. ■

Revenons à notre discussion : si $Q \in A(S)$ est de la forme $[n]Q_1$, avec $Q_1 \in A(S)$ et $P \in E(S)$ est un point de hauteur relative nulle qui relève Q, on peut considérer un point P_1 relevant Q_1 tel que $[n]_E P_1 = P$. Or, le faisceau d'Arakelov $\varepsilon_{Q_1}^* \mathscr{L}$ n'est pas forcément trivial, mais juste de torsion, ce qui signifie que P_1 n'est pas *a priori* défini sur S.

On en déduit aussi de la proposition précédente le fait suivant [**2**, proposition 2] : *si $K = \mathbf{Q}$ ou si K est un corps quadratique imaginaire, la nullité de la hauteur de Néron–Tate de $x \in A(K)$ relativement à $\mathscr{L}$ implique qu'il existe un point de hauteur relative nulle dans l'extension paramétrée par $\mathscr{L}$ relevant un multiple de x.* En effet, comme $\mathscr{L}|_{nx} = (\mathscr{L}|_x)^{\otimes n}$, on peut choisir n de sorte que $\mathscr{L}|_{nx} \simeq \mathscr{O}_S$ dans $\mathrm{Pic}(A)$; il n'y a qu'une place archimédienne et si s est une base de $\mathscr{L}|_{nx}$, la nullité de $\widehat{\deg}\, \mathscr{L}|_{nx}$ implique que $\|s\| = 1$ et $\mathscr{L}|_{nx} = 0$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$, ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE 1.5.3. On vérifie aisément que les expressions explicites pour $\widehat{\deg}\, H_0$ et $\widehat{\deg}\, H_\infty$ que nous avons écrites plus haut donnent la décomposition de la hauteur relative en une somme de hauteurs locales canoniques, comme dans [**1, 4**].

Montrons enfin comment les « points de Ribet » de [**19, 1**] s'interprètent dans ce contexte, en supposant que A/S est un schéma abélien.

PROPOSITION 1.5.4 (voir aussi [**1**, th. 4]). — *Supposons que A est un schéma abélien sur S. Soient $f : A^\vee \to A$ un S-morphisme de schémas abéliens et $g = f - f^\vee : A_\eta^\vee \to A_\eta$ qui est un endomorphisme antisymétrique. Il existe au-dessus du point $g(\mathscr{L}) \in A(S)$ un S-point canonique de hauteur relative nulle.*

Remarque 1.5.5. On peut éviter de supposer que A/S est un schéma abélien en faisant appel à la théorie des métriques adéliques de Zhang (cf. [**39**]) et en remarquant que le groupe $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$ s'identifie au groupe des métriques adéliques sur K.

Preuve. Sur $X = A \times A^\vee$, considérons la (bi)extension de Poincaré $\mathscr{P}_X$, et de même sur $Y = A^\vee \times A$, métrisés de sorte que le théorème du cube est une isométrie [**28**]. Soit s l'isomorphisme $Y \simeq X$ qui échange les facteurs ; par unicité du prolongement métrisé, on a un isomorphisme de faisceaux inversible métrisés $s^*\mathscr{P}_X = \mathscr{P}_Y$ qui prolonge la bidualité sur la fibre générique.

Le critère valuatif de propreté entraîne que g se prolonge en un unique endomorphisme $A^\vee \to A$. Alors, on a les égalités entre faisceaux inversibles métrisés, qui résultent de ce qu'elles sont vraies sur η et de l'unicité du prolongement :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}|_{f(\mathscr{L})} &= \mathscr{P}_X|_{f(\mathscr{L}),\mathscr{L}} = \mathscr{P}_Y|_{\mathscr{L},f^\vee(\mathscr{L})} \qquad \text{par dualité}\\ &= (s^*\mathscr{P}_X)|_{\mathscr{L},f^\vee(\mathscr{L})} = \mathscr{P}_X|_{f^\vee(\mathscr{L}),\mathscr{L}} = \mathscr{L}|_{f^\vee(\mathscr{L})},\end{aligned}$$

si bien que $\mathscr{L}|_{g(\mathscr{L})}$ est canoniquement trivial, en tant que faisceau inversible métrisé sur S. La preuve de la proposition 1.5.1 montre que les S-points de hauteur relative nulle relevant $g(\mathscr{L})$ correspondent aux isomorphismes $\mathscr{L}|_{g(\mathscr{L})} \to (\mathscr{O}_S, \|1\|)$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$, d'où un point canonique défini par l'isomorphisme ci-dessus. ■

Remarque 1.5.6. Prouvons que le « point de Ribet » défini dans [**19**] et considéré dans [**1**] du point de vue des hauteurs est égal au point donné par la proposition précédente. Considérons comme dans [**19**, (4.1), p. 146] le diagramme

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^*E \arrow[r] \arrow[d] & A^\vee \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\ 1 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Choisissons $y \in f^*E(\eta)$ relevant $\mathscr{L}$, soit $x^1 = f(y) \in E(\eta)$, d'où un 1–motif $M_1 \colon \mathbf{Z} \to f^*E$. Par définition de la dualité de Cartier des 1–motifs, le dual de M_1 est un 1–motif $M_2 : \mathbf{Z} \to E$. Soit $x^2 \in E(\eta)$ l'image de 1. Le point $x_f := x^1 - x^2 \in E(\eta)$ relève $f(\mathscr{L}) - f^\vee(\mathscr{L})$ et Bertrand prouve dans [**1**] que ce point est de hauteur relative nulle. Quand A/S est un schéma abélien, on peut faire cette construction sur S en choisissant $y \in f^*E(S)$ (si c'est possible) et en raisonnant en termes de S–1–motifs. Pour simplifier, raisonnons « localement sur $S \cup \{\infty\}$ » (S compactifié en rajoutant les places à l'infini) — le résultat à obtenir est de nature locale, en l'espèce une hauteur locale à calculer en un point indépendant de y — et choisissons $y \in f^*E(S)$; il correspond donc à un isomorphisme $f^\vee(\mathscr{L})|_{\mathscr{L}} \to \mathscr{O}_S$ puisque

f^*E est paramétrée par $f^\vee$. Alors, la description symétrique du 1–motif M_1 est la trivialisation de $\mathscr{P}_Y|_{\mathscr{L},f^\vee(\mathscr{L})} = f^\vee(\mathscr{L})|_{\mathscr{L}}$ que définit y. Le 1–motif dual est alors donné par la trivialisation canonique de $\mathscr{P}_X|_{f(\mathscr{L}),\mathscr{L}}$ donnée par la trivialisation précédente et la dualité entre les S–schémas abéliens A et $A^\vee$. Autrement dit, x^2 est donné par la trivialisation de $\mathscr{L}|_{f(\mathscr{L})}$ qu'on en déduit comme dans la preuve de la proposition et la différence $x^1 - x^2$ est défini par l'isomorphisme $\mathscr{L}|_{f(\mathscr{L})} \simeq \mathscr{L}|_{f^\vee(\mathscr{L})}$ de la démonstration de la proposition 1.5.4, isomorphisme qu'on a vu être une isométrie.

Chapitre 2.—

Autour de l'extension universelle

2.1. Introduction

Dans ce court chapitre, nous étudions un modèle entier particulier de l'extension universelle d'une variété abélienne. La construction est due à Mazur et Messing et nous commençons par rappeler au paragraphe 2.2 les résultats principaux de [**23**] dont nous aurons à faire usage.

Au paragraphe 2.3, nous pouvons alors étudier un peu plus en détail *l'extension canonique* d'un modèle de Néron, telle qu'elle est définie dans [**23**, §5]. Puisqu'un modèle de Néron n'a pas forcément d'extension universelle (son Ext^1 par $\mathbf{G}_a$ n'étant pas nécessairement localement libre), nous utilisons son extension canonique qui est un modèle entier privilégié de l'extension universelle de sa fibre générique. Si tout est défini sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, nous prouvons en fait qu'au niveau des sous-schémas en groupes de p^n-torsion, quitte à étendre les scalaires afin de rendre ces schémas en groupes finis et plats, tout se passe comme si l'extension canonique est universelle (théorème 2.3.3). Outre le calcul au chapitre 3 d'une hauteur locale dans le cas de mauvaise réduction (proposition 3.4.9), ce résultat nous permet de prouver que l'application construite par Coleman dans [**9**] coïncide avec l'application périodes p-adiques de Hodge-Tate (proposition 2.3.4).

2.2. Rappels sur l'extension universelle

Ce paragraphe contient les résultats de [**23**] dont nous aurons besoin par la suite.

Soit S un schéma et G un schéma en groupes fini et plat sur S. Notons G^* le dual de Cartier : c'est le schéma en groupes qui représente le faisceau de groupes abéliens $\mathrm{Hom}_S(G, \mathbf{G}_m)$. On obtient alors une application $\alpha_G : G \to \omega_{G^*}$ par le diagramme :

$$\begin{aligned} G(S') = \mathrm{Hom}_{S'}(G^*_{S'}, \mathbf{G}_{m\,S'}) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'\text{-schémas pointés}}(\mathrm{Inf}^1(G^*)_{S'} \to \mathbf{G}_{m\,S'}) = \omega_{G^*} \otimes \mathscr{O}_{S'}. \end{aligned}$$

D'après [**23**, 1.4, p. 5], cette application est universelle pour les homomorphismes de G dans un S-faisceau quasi-cohérent : pour tout S-faisceau quasi-cohérent M (vu comme un faisceau en groupes abéliens pour la topologie fppf sur S) et tout morphisme de faisceaux abéliens $f\colon G \to M$, il existe un unique morphisme de faisceaux quasi-cohérents $\tilde{f}\colon \omega_{G^*} \to M$ tel que $f = \tilde{f} \circ \alpha_G$.

Fixons un nombre premier p, soit S un schéma et G un groupe p-divisible sur S. On suppose que p est localement nilpotent sur S, ou bien que S est le spectre d'un anneau p-adiquement complet. Si $n \geqslant 1$, notons $G(n)$ le noyau de la multiplication par p^n sur G. Il existe alors une extension vectorielle universelle de G qui est donnée, quand $p^n = 0$ dans S, par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G(n) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{G(n)}"'] & G \arrow[r, "{[p^n]}"] \arrow[d, dashed] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \omega_{G^*} \arrow[r] & E(G) \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où l'on a identifié $\omega_{G(n)^*}$ avec ω_{G^*} puisque $p^n \mathscr{O}_S = 0$. Que cette extension soit universelle signifie que pour toute extension vectorielle $0 \to V \to E \to G \to 0$, il existe un unique morphisme $f : \omega_{G^*} \to V$ tel que $E = f_* E(G)$.

Si A est un schéma abélien sur une base quelconque S, il existe aussi une extension vectorielle universelle $E_{\mathrm{univ}}(A)$ universelle de A ; c'est une extension de A par le cotangent en l'origine $\omega_{A^\vee}$ du S-schéma abélien dual de A. De plus, si p est nilpotent sur S, elle est donnée par le diagramme obtenu à partir du précédent en remplaçant G par A et en utilisant le fait que $A^\vee(n) = A(n)^*$. En particulier, la restriction de l'extension vectorielle $E_{\mathrm{univ}}(A)$ au groupe p-divisible G de A est canoniquement isomorphe à l'extension universelle de G.

En particulier, soit $x \in A(n)$, $\hat{x} \in E_{\mathrm{univ}}(A)$ relevant x. Le point $[p^n]\hat{x} \in E_{\mathrm{univ}}(A)$ relève 0 et définit donc un élément $\partial_{\mathrm{univ}}(\hat{x}) \in \omega_{A^\vee}$; la classe de $\partial_{\mathrm{univ}}(\hat{x})$ modulo $p^n\omega_{A^\vee}$ ne dépend en fait que de x, d'où une application

$$\partial_{\mathrm{univ}}\colon A(n) \to \omega_{A^\vee}/p^n\omega_{A^\vee} \quad .$$

Or ce dernier quotient s'identifie à $\omega_{A(n)^*}$ et l'on vérifie que l'application ∂_{univ} n'est autre que $\alpha_{A(n)}$.

Donnons une autre description de l'extension universelle de $A^\vee$: on sait que $A^\vee$ représente les extensions de A par $\mathbf{G}_m$. Appelons rigidification d'une telle extension $1 \to \mathbf{G}_m \to E \to A \to 0$ la donnée d'un scindage de cette extension sur le premier voisinage infinitésimal de la section nulle de A, autrement dit, un scindage de la suite exacte des espaces tangents correspondante. Appelons $\mathrm{Extrig}_S(A, \mathbf{G}_m)$ le faisceau sur S d'extensions rigidifiées de A par $\mathbf{G}_m$. On a ainsi une suite exacte

$$0 \to \omega_A \to \mathrm{Extrig}_S(A, \mathbf{G}_m) \to A^\vee \to 0 \quad .$$

D'après [**23**, 2.6, p. 21], cette extension vectorielle *est* l'extension universelle de $A^\vee$.

Enfin, Mazur et Messing étendent cette construction au cas d'un modèle de Néron : supposons que S soit le spectre d'un anneau de Dedekind et A un modèle de Néron sur S. Comme le S-groupe $\mathrm{Ext}^1(A^0, \mathbf{G}_m)$ des extensions de la composante neutre A^0 par $\mathbf{G}_m$ est représenté (pour la topologie lisse) par le modèle de Néron dual $A^\vee$, on dispose pareillement d'une suite exacte de faisceaux abéliens :

$$0 \to \omega_A \to \mathrm{Extrig}_S(A^0, \mathbf{G}_m) \to A^\vee \to 0 \quad .$$

D'après [**23**, 5.2, p. 54], cette suite exacte est représentable par des S schémas en groupes lisses. Suivant la terminologie de Mazur et Messing, nous appellerons *extension canonique* de $A^\vee$ l'extension vectorielle donnée par $\mathrm{Extrig}_S(A^0, \mathbf{G}_m)$ et nous la noterons $E_{\mathrm{can}}(A^\vee)$. Notons que sa restriction au point générique η de S est canoniquement l'extension universelle de A_η.

Il est bon de remarquer que $E_{\mathrm{can}}(A^\vee)$ n'est *pas* forcément l'extension universelle de $A^\vee$, pour la simple raison que celui-ci n'en possède pas forcément, cf. les contre-exemples de Breen–Raynaud dans [**23**, 5.6, p. 58].

2.3. Compléments sur l'extension canonique

Soient S le spectre d'un anneau de valuation discrète de caractéristiques mixtes $(0, p)$ et $\pi : A \to S$ un modèle de Néron. Comme précédemment, on note A^0 la composante neutre de A, $A^\vee$ le modèle de Néron dual. Notons S_n le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal (p^n) de $\mathscr{O}_S$.

Soient G le noyau de la multiplication par p^n dans A, $A^{[n]}$ le plus petit sous-schéma en groupes ouvert de A qui contient G.

On fait l'hypothèse que G est fini et plat sur S,

ce qui implique notamment que A/S est semi-stable. On a alors une suite exacte :

$$(\varepsilon) \qquad 0 \to G \to A^{[n]} \xrightarrow{[p^n]_A} A^0 \to 0 \quad ,$$

et comme $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m) = 0$ (cf. par exemple [SGA 7_1, Exp. VIII, 3.3.1]), la suite exacte des Ext's se récrit de la manière suivante :

$$0 \to \mathrm{Hom}_S(G, \mathbf{G}_m) = G^* \to A^\vee = \mathrm{Ext}^1_S(A^0, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{[p^n]_A} \mathrm{Ext}^1_S(A^{[n]}, \mathbf{G}_m) \to 0 \quad .$$

Il en résulte que G^*, qui est fini et plat sur S, est le noyau de la multiplication par p^n dans $A^\vee$.

Notons, pour tout S-schéma en groupes H, $\mathrm{Inf}^1(H) \subset H$ le premier voisinage infinitésimal de la section nulle dans H. Par définition [**23**, 2.1], (ε)-$\mathrm{Homrig}(G, \mathbf{G}_m)$ est alors l'ensemble des homomorphismes $f : G \to \mathbf{G}_m$ munis d'une rigidification le long de $\mathrm{Inf}^1(A^0)$ de la suite exacte $1 \to \mathbf{G}_m \to E(f) \to A^0 \to 0$ induite par *push-out* de (ε) par f (c'est-à-dire une section $\mathrm{Inf}^1(A^0) \to E(f)$ commutant aux projections). L'oubli de f nous définit ainsi un morphisme de groupes (ε)-$\mathrm{Homrig}(G, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Extrig}(A^0, \mathbf{G}_m)$ compatible avec les projections naturelles sur G^* et $A^\vee$. On constate que l'on a le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. — *Ce morphisme de groupes induit un isomorphisme entre* (ε)-$\mathrm{Homrig}(G, \mathbf{G}_m)$ *et la restriction à* G^* *de* $\mathrm{Extrig}(A^0, \mathbf{G}_m)$.

D'après [**23**, 2.2], on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \omega_A \to (\varepsilon)\text{-}\mathrm{Homrig}(G, \mathbf{G}_m) \to G^* \to 0 \quad .$$

Comme G^* est annulé par p^n, on en déduit une application $\beta \colon G^* \to \omega_A/p^n$. (Relever $x \in G^*$ en $\tilde{x}$, multiplier $\tilde{x}$ par p^n, cela donne un élément de ω_A bien défini modulo $p^n\omega_A$). Comme G^* est fini et plat et $\omega_A/p^n = \omega_G$ un faisceau quasi-cohérent sur S, cette application se factorise par l'application universelle $\alpha_{G^*} \colon G^* \to \omega_G$ et le théorème suivant les compare :

Théorème 2.3.2. — *L'application β est égale à $-\alpha_{G^*}$, l'opposée de l'application universelle de G^* à valeur dans un faisceau quasi-cohérent.*

Preuve. Soit $f \in G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_m)$ et choisissons un relèvement de f dans (ε)-$\mathrm{Homrig}(G, \mathbf{G}_m)$, autrement dit une rigidification σ de l'extension $f_*(\varepsilon)$ le long du premier voisinage infinitésimal de la section nulle. Alors, l'extension $[p^n]_* f_*(\varepsilon)$ est triviale (car $[p^n]_{\mathbf{G}_m} \circ f = 1$) et munie d'une rigidification qu'il faut comparer à la rigidification naturelle sur l'extension triviale.

Nous pouvons sans restreindre la généralité étendre les scalaires à S_n. Alors, les premiers voisinages infinitésimaux de la section nulle $\mathrm{Inf}^1(G)$ dans G et $\mathrm{Inf}^1(A^0)$ dans A^0 coïncident canoniquement, si bien que f définit une application (toujours notée f) $\mathrm{Inf}^1(A^0) \to \mathrm{Inf}^1(\mathbf{G}_m)$.

L'extension $E = E(f) = f_*(\varepsilon)$ est quotient de $A^{[n]} \times \mathbf{G}_m$ par le sous-groupe des points de la forme $(g, f(g)^{-1})$ pour $g \in G$. Ainsi, posons pour $x \in \mathrm{Inf}^1(A^0)$, soit $\tilde{x} \in \mathrm{Inf}^1(A^{[n]})$ un point tel que $[p^n]\tilde{x} = x$ et définissons $\sigma(x)$ comme la classe de $(\tilde{x}, f(\tilde{x})^{-1})$ dans E dont on voit qu'elle ne dépend pas du choix de $\tilde{x}$ dans $f_*(\varepsilon)$.

L'extension $[p^n]_* f_*(\varepsilon)$ est alors quotient de $E \times \mathbf{G}_m$ par le sous-groupe des points de la forme $([0, t], t^{-p^n})$ pour $t \in \mathbf{G}_m$. La rigidification induite par σ associe à $x \in \mathrm{Inf}^1(A^0)$ la classe de l'élément $([\tilde{x}, f(\tilde{x})^{-1}], 1)$. Or, l'isomorphisme

$[p^n]_* f_*(\varepsilon) \to A^0 \times \mathbf{G}_m$ est donné par $([a,t],u) \to ([p^n]a, t^{p^n}u)$. Par suite, la rigidification σ' sur l'extension triviale $A^0 \times \mathbf{G}_m$ que nous avons obtenue s'écrit $\sigma'(x) = ([p^n]\tilde{x}, f(\tilde{x})^{-p^n}) = (x, f(x)^{-1})$.

Cette extension triviale de A^0 par $\mathbf{G}_m$, rigidifiée, nous définit l'élément $-f^*(dt/t)$ de $\omega_{A^0} = \omega_G$. Par conséquent, $\beta(f) = -f^*(dt/t) = -\alpha_G(f)$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

Dans la suite, nous identifierons la restriction à G^* de $\mathrm{Extrig}(A^0, \mathbf{G}_m)$ au *push-out* par la multiplication par -1 de l'extension vectorielle que définit (ε)- $\mathrm{Homrig}(G, \mathbf{G}_m)$. Cette convention rend l'isomorphisme du lemme 2.3.1 compatible avec celui défini par Mazur et Messing [**23**, 2.5.7, p. 20] dans le cas de bonne réduction.

Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\mathfrak{O}_K$ son anneau d'entiers et A_K une variété abélienne sur K dont nous notons A le modèle de Néron sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$ (supposé semi-stable pour simplifier). Soient $A_K^\vee$ la variété abélienne duale de A_K et $A^{\vee 0}$ la composante neutre de son modèle de Néron sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_K$. Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et soit $\mathfrak{O}_p = \varprojlim \mathfrak{O}_{\overline{K}}/p^n$ l'anneau des entiers du complété p-adique de $\overline{K}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $K^{(n)} \subset \overline{K}$ une extension finie de K telle que le noyau de la multiplication par p^n dans le modèle de Néron A_n de $A_K \otimes K^{(n)}$ soit fini et plat sur l'anneau $\mathfrak{O}^{(n)}$ des entiers de $K^{(n)}$; notons G_n l'extension des scalaires à $\mathfrak{O}_p$ de ce schéma en groupe. On peut de plus supposer que $K^{(n)} \subset K^{(n+1)}$ et que $\overline{K} = \bigcup_{n \geqslant 1} K^{(n)}$.

Comme A_n est semi-stable, on dispose pour tout n d'une immersion ouverte canonique $A_n \otimes \mathfrak{O}^{(n+1)} \hookrightarrow A_{n+1}$. Cela nous permet de définir $A_\infty = \varinjlim A_n \otimes \mathfrak{O}_p$ qui est un $\mathfrak{O}_p$-schéma en groupes lisse, localement de présentation finie.

De même, les flèches naturelles entre faisceaux d'extensions rigidifiées

$$\mathrm{Extrig}_{\mathfrak{O}^{(n)}}(A^{\vee 0}, \mathbf{G}_m) \otimes \mathfrak{O}^{(n+1)} \to \mathrm{Extrig}_{\mathfrak{O}^{(n+1)}}(A^{\vee 0}, \mathbf{G}_m)$$

sont des immersions ouvertes et permettent de définir *l'extension canonique* de A_∞ sur $\mathfrak{O}_p$; c'est une extension vectorielle

$$0 \to \omega_{A^{\vee 0}} \otimes \mathfrak{O}_p \to E_{\mathrm{can}}(A_\infty) \to A_\infty \to 0 \quad .$$

Comme G_n s'identifie au noyau de la multiplication par p^n dans A_∞, on peut définir $G_\infty = \varinjlim G_n$ qui est le groupe p-divisible sur $\mathfrak{O}_p$ attaché à $A_{\overline{K}}$.

La restriction de l'extension canonique de A_∞ à G_∞ nous fournit une extension vectorielle sur $\mathfrak{O}_p$

$$0 \to \omega_{A^{\vee 0}} \otimes \mathfrak{O}_p \to E_{\mathrm{can}}(G_\infty) \to G_\infty \to 0$$

que nous pouvons appeler l'extension canonique de G_∞. Mais pour tout $n \geqslant 0$, $G_\infty \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{O}_p/p^n)$ dispose d'une extension universelle, comme tout groupe p-divisible sur un schéma où p est nilpotent, d'où une extension universelle de G_∞ sur $\mathfrak{O}_p$.

Dans ces conditions, on a le théorème suivant, qui généralise la proposition 2.4.1 de [**23**], où il était supposé bonne réduction :

THÉORÈME 2.3.3. — *L'extension canonique de G_∞ s'identifie canoniquement à son extension universelle.*

Preuve. Pour le démontrer, nous pouvons réduire modulo p^n puis passer à la limite. Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_\infty(n) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{G_\infty(n)^*}"'] & G_\infty \arrow[r, "{[p^n]}"] \arrow[d] & G_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_{G_\infty(n)^*} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E_{\mathrm{univ}}(G_\infty) \arrow[r] \arrow[d] & G_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_{G_\infty(n)^*} \arrow[r] & E_{\mathrm{can}}(G_\infty) \arrow[r] & G_\infty \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel $E_{\mathrm{univ}}(G_\infty)$ est l'extension universelle de G_∞ sur $\mathfrak{O}_{\overline{K}}/p^n$ et f est obtenue par définition de l'extension universelle. (Remarquons que $G_\infty(n) = G_n$ et $\omega_{G_\infty(n)^*} = \omega_{A^{\vee 0}}/p^n$.) Soient ∂_{can} (resp. ∂_{univ}) les cobords $G_\infty(n) \to \omega_{G_\infty(n)^*}$ obtenus à partir des extensions canoniques et universelle de G_∞ : si $i \in \{\mathrm{univ}, \mathrm{can}\}$ et si $x \in G_\infty(n)$, on choisit un relèvement $\hat{x} \in E_i(G_\infty)$ et on pose $\partial_i(x) = [p^n]_{E_i}(\hat{x}) \in \omega_{G_\infty(n)^*}$.

Par définition, $\partial_{\mathrm{univ}} = \alpha_{G_\infty(n)}$, $\partial_{\mathrm{can}} = f \circ \partial_{\mathrm{univ}}$ et le théorème 2.3.2 joint à la convention se signe qui suit le lemme 2.3.1 nous dit que $\partial_{\mathrm{can}} = \alpha_{G_\infty(n)}$. La propriété universelle de l'homomorphisme $\alpha_{G_\infty(n)}$ entraîne alors que $f = 1$ est l'unique homomorphisme f de $\omega_{G_\infty(n)^*}$ dans lui-même tel que $\partial_{\mathrm{can}} = f \circ \alpha_{G_\infty(n)}$. Ainsi, $f = 1$ modulo p^n puis $f = 1$. ∎

Le théorème 2.3.3 a deux *applications* : la première sera le calcul d'une hauteur relative locale dans le cas de mauvaise réduction (nous la verrons aux propositions 3.4.7 et 3.4.9 plus loin).

La seconde application est une démonstration de la coïncidence, dans le cas de mauvaise réduction, de l'application définie par Coleman [**9**] avec Hodge–Tate. Avec les notations précédentes, Coleman définit en effet une application

$\theta_{A_K}\colon T_p(A_K) \to \omega_{A_K^\vee} \otimes \mathbf{C}_p$ de la façon suivante : Soit $x = (x_n) \in T_p(A_K)$, il correspond à x_n un diviseur $D_n \in A_K^\vee(\overline{K})$ tel que $p^n D_n$ est linéairement équivalent à zéro ; si $p^n D_n = \mathrm{div}(f_n)$, la suite de forme différentielles méromorphes df_n/f_n converge vers une forme différentielle holomorphe sur $A_K^\vee \otimes \mathbf{C}_p$ qui est par définition $\theta_{A_K}(x)$.

Proposition 2.3.4. — *On a l'égalité* $\theta_{A_K}(x) = $ « lim » $\alpha_{G(n)}(x_n)$.

Preuve. On peut bien sûr supposer que A a réduction semi-stable sur l'anneau des entiers de K. Il suffit alors de montrer que $\theta_{A_K}(x)$ appartient à $\omega_{A^\vee} \otimes \mathfrak{O}_p$ et que modulo p^n, $\theta_{A_K}(x) = \alpha_{G(n)}(x_n)$. Or, x_n correspond à une extension (e_n) de A^0 par $\mathbf{G}_m$, définie sur $\mathfrak{O}^{(n)}$. Une fois choisie une rigidification de cette extension, on obtient une rigidification sur l'extension triviale obtenue par *pull-back* de l'extension $[p^n]^*(e_n)$. Or, cette rigidification est précisément définie par la restriction en l'origine de df_n/f_n modulo p^n.

Autrement dit, le Corollaire 12e (Note added in proof de [**9**]) est vrai dans le cas de mauvaise réduction, en remplaçant l'extension universelle par l'extension canonique. Pour finir le calcul, on peut raisonner sur le groupe p-divisible dont le théorème précédent nous dit que l'extension canonique est en fait l'extension universelle, cqfd. ■

Chapitre 3.—

Extensions vectorielles des variétés abéliennes

3.1. Introduction

Nous construisons dans ce chapitre une hauteur particulière sur une extension d'une variété abélienne par un groupe vectoriel, dans l'esprit des constructions du chapitre 1 et de la hauteur de Néron–Tate.

Nous l'évaluons ensuite aux points d'ordre fini. L'énoncé principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.4.11. — *Soient K un corps de nombres, A une variété abélienne sur K de dimension g et E une K-extension non triviale de A par un groupe vectoriel V. Il existe une hauteur de Weil h_W sur $E(\overline{K})$ associée à un plongement projectif de E telle que pour tout nombre premier p ne divisant ni le discriminant de K ni le conducteur de A, la moyenne des hauteurs des points de E annulés par p vérifie l'inégalité*

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right) \log p < \frac{1}{p^{2g}} \sum_{\substack{[p]P=0 \\ P \in E(\overline{K})}} h_W(P) \leqslant \log p.$$

Il généralise les résultats de Paula Cohen [**7, 8**] qui traitait le cas d'une extension non triviale d'une courbe elliptique et de [**5, 6**] où l'on s'intéressait à l'extension vectorielle universelle d'une variété abélienne de dimension arbitraire.

Lorsque l'extension vectorielle est universelle, le modèle entier est fourni (comme annoncé au paragraphe 2.1) par l'extension canonique du modèle de Néron d'une variété abélienne, due à Mazur et Messing ; dans le cas général, nous utilisons un *push-out* de cette extension canonique, utilisant le fait que sur la fibre générique, l'extension vectorielle à étudier est elle-même un *push-out* de l'extension universelle.

Nous compactifions ce modèle entier en un fibré projectif sur le modèle de Néron de la variété abélienne. Il nous suffira alors d'étudier la *hauteur relative* pour le fibré inversible relativement ample $\mathscr{O}(1)$. Elle sera notée $\widehat{\deg}\, H$ dans le texte et la hauteur de Weil h_W est la somme de cette hauteur relative et d'une hauteur de Néron–Tate sur la variété abélienne. Il est plus délicat de montrer que la hauteur relative se calcule effectivement à l'aide d'un degré d'Arakelov que dans le chapitre 1 car la multiplication par un entier > 1 sur le groupe algébrique ne permet plus de « caler » la hauteur convenablement.

Les paragraphes 3.2 et 3.3 sont les pendants des paragraphes 1.3 et 1.4 dans le cas d'une extension par $\mathbf{G}_m$ et le plan en est très proche.

Enfin, nous relions au paragraphe 3.4 la hauteur des points d'ordre fini aux calculs du chapitre 4 concernant les valuations de périodes p-adiques. Ceci nous permet d'étudier le comportement asymptotique de la moyenne des hauteurs des points d'ordre premier donné, lorsque cet ordre tend vers l'infini et d'établir ainsi le théorème principal.

3.2. Compactification, métriques

3.2.a. Modèles entiers

Soit S un schéma de Dedekind connexe, notons η son point générique. Soient A_η une η-variété abélienne, A son modèle de Néron sur S et A^0 la composante neutre de A. Soit $A^\vee$ le modèle de Néron dual, c'est-à-dire le modèle de Néron sur S de la variété abélienne duale $(A_\eta)^\vee$.

Soient V_η un η-groupe vectoriel et E_η une extension de A_η par V_η. Par définition de l'extension universelle, il existe un unique homomorphisme $f_\eta : \omega_{A_\eta^\vee} \to V_\eta$ tel que $E_\eta = f_{\eta *} E_{\mathrm{univ}}$. L'extension canonique de A est une extension par le groupe vectoriel $\omega_{A^\vee}$ et *fixons* un S-vectoriel V ainsi qu'un homomorphisme $f : \omega_{A^\vee} \to V$ qui prolongent f_η. (Comme S est de Dedekind, un *choix meilleur* que les autres pourrait consister à prendre pour V l'image du réseau $\omega_{A^\vee}$ dans V_η.) On définit alors $E := f_* E_{\mathrm{can}}$. C'est une extension de A par le groupe vectoriel V qui prolonge E_η.

Soit $\mathscr{W}$ le faisceau localement libre sur S dont V provient (i.e. $\mathscr{W}$ est le faisceau des sections de V, ou bien encore $V = \mathbf{V}(\mathscr{W}^\vee)$). D'après [**25**, III.4.7 et III.3.7], $\operatorname{Ext}^1_S(A, V) = H^1(A, \mathscr{O}_A \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{W})$, d'où un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de A et pour tous U_1, $U_2 \in \mathfrak{U}$ une section $\sigma_{U_1U_2} : U_1 \cap U_2 \to V$ vérifiant la condition de cocycle

$$0 = \sigma_{U_1U_2} + \sigma_{U_2U_3} + \sigma_{U_3U_1} : U_1 \cap U_2 \cap U_3 \to V.$$

Réciproquement, de telles sections déterminent E de la façon suivante : si $U \in \mathfrak{U}$ et $\pi : E \to A$ est la projection, notons $E_U = \pi^{-1}(U) \subset E$; alors, il existe un isomorphisme $\varphi_U : E_U \to V \times_S U$ vérifiant pour U_1 et $U_2 \in \mathfrak{U}$,

$$\varphi_{U_1} - \varphi_{U_2} = (\sigma_{U_1 U_2}, 0).$$

Or, $H^1(A, \mathscr{O}_A \otimes \mathscr{W})$ est canoniquement isomorphe à $\operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}_A, \mathscr{O}_A \otimes \mathscr{W})$, l'isomorphisme associant au cocycle $\{\sigma_{U_i U_j}\ ;\ U_i, U_j \in \mathfrak{U}\}$ les matrices de transition $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathscr{W}} & \sigma_{U_i U_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}((\mathscr{O}_A \otimes \mathscr{W}) \oplus \mathscr{O}_A)$ qui définissent un faisceau localement libre $\mathscr{F}$ sur A, de rang $\operatorname{rg} V + 1$, avec une suite exacte naturelle $0 \to \mathscr{W} \to \mathscr{F} \to \mathscr{O}_A \to 0$.

Soit $\overline{E} = \mathbf{P}(\mathscr{F}^\vee)$. L'inclusion $V_A \hookrightarrow \mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee)$ définit un sous-fibré isomorphe à $\mathbf{P}(\mathscr{W}^\vee)$ (les hyperplans de V_A) de $\overline{E}$ qui est un diviseur D. En outre, un S-point de $\overline{E}$ correspond à un quotient inversible de $\mathscr{F}^\vee$, alors qu'un S-point de E s'interprète comme un tel quotient $\mathscr{F}^\vee \to \mathscr{I}$ tel que la composition $\mathscr{O}_A \to \mathscr{F}^\vee \to \mathscr{I}$ soit un isomorphisme. On voit ainsi qu'il existe une immersion ouverte canonique $E \hookrightarrow \overline{E}$, le complémentaire de l'image de E dans $\overline{E}$ étant précisément D.

Le lemme 1.3.1 montre que $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{W}^\vee)}(1) = \mathscr{O}(D)$. Il est par définition relativement ample sur A et est muni d'une section canonique s_D telle que $\operatorname{div}(s_D) = D$.

3.2.b. Métriques hermitiennes

Soit $\sigma \in S(\mathbf{C})$; après changement de base par σ, on veut munir $\mathscr{O}(D)$ d'une métrique hermitienne. Pour simplifier les notations, on notera A, etc. les objets $A \times_{S,\sigma} \mathbf{C}, \ldots$ En particulier, A est un tore complexe $\mathbf{C}^g/\Lambda$, où $g = \dim A$ et Λ est un réseau de $\mathbf{C}^g$, et $V = \mathbf{C}^n$ pour $n = \operatorname{rg} V$.

Lemme 3.2.1. — *Il existe un homomorphisme $\rho : \Lambda \to V$ tel que $E(\mathbf{C})$ soit le quotient de $V \times \mathbf{C}^g$ par l'action de Λ suivante :*

$$\lambda \cdot (u, z) = (u + \rho(\lambda), z + \lambda), \qquad \lambda \in \Lambda, \quad u \in V, \quad z \in \mathbf{C}^g.$$

Le fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee)$ est de même le quotient de $(\mathbf{C} \oplus V) \times \mathbf{C}^g$ par l'action

$$\lambda \cdot ((t, u), z) = ((t, u + t\rho(\lambda)), z + \lambda), \qquad \lambda \in \Lambda, \quad t \in \mathbf{C}, \quad u \in V, \quad z \in \mathbf{C}^g.$$

Preuve. Comme $H^1((\mathbf{C}^g)^{\mathrm{an}}, \mathscr{O}) = 0$, l'extension de $\mathbf{C}^g$ par V obtenue par *pull-back* de E est scindée. Une fois choisi un scindage, on obtient une représentation ρ de $\Lambda = \pi_1(A)$ dans V qui agit par translations sur lui-même. Réciproquement, étant donnée ρ, on reconstruit E puis $\mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee)$ à l'aide des formules indiquées.

Si ρ' est la représentation attachée à un autre scindage, $\rho' - \rho : \Lambda \to V$ s'étend par $\mathbf{R}$-linéarité en un homomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire. construit est canoniquement isomorphe, Le morphisme donné sur les revêtements universels par $((t, u), z) \mapsto ((t, u + (\rho' - \rho)(z)), z)$ est alors un isomorphisme. ■

Avec les notations du lemme, $\overline{E}$ est le quotient de $\mathbf{P}(\mathbf{C} \oplus V) \times \mathbf{C}^g$ par l'action de Λ qui provient de celle sur $\mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee)$. Dans ces conditions, le diviseur D est défini par l'équation $t = 0$ et t s'identifie à la section s_D de $\mathscr{O}(D)$. Si $\pi : \overline{E} \to A$ désigne la projection naturelle, $\mathscr{O}(D)$ est un quotient de $\pi^* \mathscr{F}^\vee$ et il suffit de munir $\mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee)$ d'une métrique hermitienne h pour que $\mathscr{O}(D)$ en hérite naturellement par la formule

$$\|s_D\|_{([t:u],z)} = \frac{|t|}{h_z(t,u)^{1/2}}.$$

(Si $u \in V$, $t \in \mathbf{C}$ et $z \in \mathbf{C}^g$ avec $(t,u) \neq (0,0)$, on note $([t:u],z)$ l'unique point de $\mathbf{P}(\mathscr{F}^\vee)$ dont un relevé dans $(\mathbf{C} \oplus V) \times \mathbf{C}^g$ est $((t,u),z)$.)

Il reste à construire h_z. Pour cela, on remarque que la suite exacte de fibrés vectoriels sur A

$$0 \to V \times A \to \mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee) \to \mathbf{C} \times A \to 0$$

admet une section $\mathscr{C}^\infty$ naturelle : désignons toujours par ρ le prolongement $\mathbf{R}$-linéaire de $\rho : \Lambda \to V$ en une application $\mathbf{C}^g \to V$ et posons $\varphi(t,z) = ((t, t\rho(z)), z)$. Pour $\lambda \in \Lambda$, on a

$$\lambda \cdot \varphi(t,z) = \lambda \cdot ((t, t\rho(z)), z) = ((t, t\rho(\lambda) + t\rho(z)), z + \lambda),$$

tandis que

$$\varphi(\lambda \cdot (t,z)) = \varphi(t, z+\lambda) = ((t, t\rho(z+\lambda)), z+\lambda),$$

de sorte que $\varphi : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^g \to (\mathbf{C} \oplus V) \times \mathbf{C}^g$ passe au quotient par l'action de Λ. À la section φ est ainsi associé un scindage $\mathscr{C}^\infty$ de la suite exacte ci-dessus, $\Phi : \mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee) \to (V \oplus \mathbf{C}) \times A$ décrit sur le revêtement universel de A par $(t,u)_z \to (t, u - t\rho(z))_z$.

Choisissons une métrique hermitienne $\|\cdot\|_V$ sur l'espace vectoriel V. Alors, on peut munir $\mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee)$ de la métrique somme directe orthogonale des métriques constantes $\|\cdot\|_V$ sur $V \times A$ et $|\cdot|$ sur $\mathbf{C} \times A$.

Nous avons ainsi établi la proposition

Proposition 3.2.2. — *Une fois fixée une métrique hermitienne sur V, il existe une unique métrique hermitienne sur $\mathscr{O}(D)$ pour laquelle la norme de s_D est donnée par l'expression*

$$\|s_D\|_{([t:u],z)} = \frac{|t|}{\sqrt{\|u - t\rho(z)\|_V^2 + |t|^2}}.$$

Remarque 3.2.3. La métrique hermitienne construite est indépendante du choix de la représentation $\rho : \Lambda \to V$. En effet, si $\rho + \theta$ est une autre représentation définissant l'extension, $\theta : \mathbf{C}^g \to V$ étant un homomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire, on a les égalités

$$\begin{aligned}
\|s_D\|'_{([t:u+\theta(z)],z)} &= |t| \left(\|u + t\theta(z) - t\rho'(z)\|^2 + |t|^2\right)^{-1/2} \\
&= |t| \left(\|u - t\rho(z)\|^2 + |t|^2\right)^{-1/2} \\
&= \|s_D\|_{([t:u],z)}.
\end{aligned}$$

3.3. Construction de la hauteur relative

3.3.a. Construction

Soient R un anneau de Dedekind, $S = \operatorname{Spec} R$, K le corps de fractions de R et $\eta = \operatorname{Spec} K$ le point générique de S. Notons $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, $\overline{S} = \operatorname{Spec} \overline{R}$.

Soit $0 \to V_\eta \to E_\eta \to A_\eta \to 0$ une η-extension d'une η-variété abélienne A_η par un η-groupe vectoriel V_η. Notons c_η la classe de l'extension dans $H^1(A_\eta, V_\eta \otimes \mathcal{O}_{A_\eta})$.

Définition 3.3.1. *Un* S-modèle *de cette extension est la donnée d'un S-schéma A plat, de type fini et séparé, prolongeant A_η tel que $A(S) = A_\eta(\eta)$, d'un S-groupe vectoriel V prolongeant V_η et d'une classe $c \in H^1(A, V \otimes \mathcal{O}_A)$ telle que $c \otimes \eta = c_\eta$.*

Un $\overline{S}$-modèle *est la donnée d'un S-groupe vectoriel V prolongeant V_η, d'une famille (K_i) d'extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$, telles que $\bigcup_i K_i = \overline{K}$, et, notant S_i le normalisé de S dans* $\operatorname{Spec} K_i$*, d'un S_i-modèle $(A_i, V \times_S S_i, c_i)$ (du changement de base à* $\operatorname{Spec} K_i$*) de l'extension, astreints à la condition de compatibilité suivante : si $R_i \subset R_j$, on demande l'existence d'une immersion ouverte $\varphi : A_i \times_{S_i} S_j \hookrightarrow A_j$ qui est l'identité sur la fibre générique et telle que $c_i \otimes R_i = \varphi^* c_j$.*

Si K est un corps de nombres, un (S, ∞)-modèle *(resp. un* $(\overline{S}, \infty)$-modèle*) est la donnée d'un S-modèle (resp. un $\overline{S}$-modèle) et, pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$, d'une métrique hermitienne sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel, $V_\eta \otimes_\sigma \mathbf{C}$, invariantes par la conjugaison complexe.*

Notant S_v le spectre du complété de S en un point fermé v de S, un S-modèle détermine canoniquement (par changement de base) un S_v-modèle. De même, la donnée d'une place $\overline{v}$ de $\overline{S}$ relevant v permet d'obtenir un $\overline{S_v}$-modèle par extension des scalaires d'un $\overline{S}$-modèle.

D'après le critère valuatif de propreté, un un S-modèle (A, V, c) (resp. un (S, ∞)-modèle) tel que A est projectif (propre) sur S fournit automatiquement un

$\overline{S}$-modèle (resp. un $(\overline{S},\infty)$-modèle) en prenant pour toute extension finie $S' \to S$ le S'-modèle $(A\times_S S', V\times_S S', c\times_S S')$. Nous dirons qu'un tel $\overline{S}$-modèle est projectif.

La définition précédente tire son intérêt de la proposition suivante, selon laquelle l'extension canonique définit un $\overline{S}$-modèle. Cependant, si A_η n'a pas bonne réduction, ce $\overline{S}$-modèle n'est pas un $\overline{S}$-modèle projectif au sens des lignes qui précèdent.

Proposition 3.3.2. — *Soit* $0 \to V_\eta \to E_\eta \to A_\eta \to 0$ *une extension comme ci-dessus et* $f_\eta : \omega_{A_\eta^\vee} \to V_\eta$ *l'application canonique définissant l'extension. Si* A *est le modèle de Néron de* A_η *sur* S*, soit* $f : \omega_{A^\vee} \to V$ *un homomorphisme du cotangent en l'origine du modèle de Néron de* $A_\eta^\vee$ *vers un* S*-groupe vectoriel prolongeant* V_η *tel que* $f\otimes_S \eta = f_\eta$.

Supposons que A *est semi-stable. Alors, la collection, pour toute extension finie* $S' \to S$*, du modèle de Néron* A' *de* A_η *sur* S' *et de la classe du* push-out *de l'extension canonique de* A' *par la composition de* f *et de l'application* $\omega_{A'^\vee} \to \omega_{A^\vee} \times_S S'$ *définit un* $\overline{S}$*-modèle.*

Preuve. Soit $S' \to S$ une extension finie, notons η' le point générique de S' et désignons par A' le modèle de Néron de $A_\eta \times \eta'$, par V' le S'-groupe vectoriel $V \times_S S'$, et par c' la classe de cohomologie $c' \in H^1(A', V' \otimes \mathscr{O}_{A'})$ définie par le push-out par $f \times_S S'$ de l'extension canonique de A'.

Tout d'abord, (A', V', c') est un S'-modèle de l'extension : on a $A'(S') = A_\eta(\eta')$ en vertu de la propriété universelle du modèle de Néron et la fibre générique de l'extension canonique étant canoniquement isomorphe à l'extension universelle, on en déduit par *push-out* que $c' \otimes_{S'} \eta' = c_\eta \times_\eta \eta'$.

Il reste à montrer que ces S'-modèles sont bien compatibles. Comme A/S est semi-stable, A'/S' est aussi semi-stable, et il suffit de prouver la compatibilité entre le S-modèle défini par A et le S'-modèle.

Si A/S est un schéma abélien, alors $A' = A\times_S S'$, $c' = c\times_S S'$ et la compatibilité est immédiate.

Dans le cas général, l'application canonique $A^\vee \times_S S' \to A'^\vee$ qui prolonge l'identité sur la fibre générique est une immersion ouverte. Elle induit par conséquent un isomorphisme sur les composantes neutres, ainsi que sur les premiers voisinages infinitésimaux de la section nulle

$$\operatorname{Inf}^1(A^{\vee 0} \times_S S') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Inf}^1(A'^{\vee 0}).$$

D'autre part, l'extension canonique est définie par $\operatorname{Extrig}_S(A^{\vee 0}, \mathbf{G}_m)$; partant d'une S-extension rigidifiée de $A^{\vee 0}$, on peut faire le changement de base à S' d'où une application canonique $E_{\mathrm{can}}(A) \times_S S' \to E_{\mathrm{can}}(A')$ qui prolonge l'identité sur la fibre générique. Comme la notion de rigidification commute au changement de base, cette application identifie $E_{\mathrm{can}}(A) \times_S S'$ comme le *pull-back* de $E_{\mathrm{can}}(A')$ par l'immersion ouverte $A \times_S S' \to A'$.

Cette dernière immersion ouverte induit un isomorphisme sur les cotangents à l'origine si bien que l'application $f' : \omega_{A'^\vee} \to V'$ provient de f par extension des scalaires. La compatibilité en résulte. ■

Comme au paragraphe 3.2, tout S-modèle (A, V, c) permet de définir un faisceau localement libre $\mathscr{W}$ tel que $V = \mathbf{V}(\mathscr{W}^\vee)$, un faisceau localement libre $\mathscr{F}$ de rang $\operatorname{rg} V + 1$, extension de $\mathscr{O}_A$ par $\mathscr{W}$, et dont la classe est précisément c, un S-schéma quasi-projectif et plat $\overline{E} = \mathbf{P}(\mathscr{F}^\vee)$, un diviseur $D \subset \overline{E}$, un faisceau inversible $\mathscr{O}(D)$, relativement ample et muni d'une section s_D dont le diviseur est D.

De même, un (S, ∞)-modèle fournit une métrique hermitienne sur le faisceau inversible $\mathscr{O}(D)$, compatible à la conjugaison complexe.

Fixons un S-modèle (resp. un (S, ∞)-modèle si S est le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres). Soit $P \in E_\eta(\eta)$ et $Q = \pi(P) \in A_\eta(\eta)$. Par hypothèse, il existe une unique section $\varepsilon_Q : S \to A$ qui prolonge Q. D'autre part, $\overline{E}/A$ étant projectif, le critère valuatif de propreté permet de prolonger P en une section $\varepsilon_P : S \to \overline{E}$ qui relève ε_Q.

Définition 3.3.3. *On définit des S-*hauteurs relatives locales *de P : si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de R et v est la valuation (normalisée) de R associée à $\mathfrak{p}$, on pose $h_{S,v}(P) = (\overline{\{P\}} \cdot D)_v$, produit d'intersection au-dessus de $\mathfrak{p}$ du 1-cycle $\overline{\{P\}}$ et du diviseur D, transverses.*

Dans le cas global, étant donné un (S, ∞)-modèle, si σ est un plongement de K dans $\mathbf{C}$, on définit $h_{S,\sigma}(P) = -\log \|s_D\|^\sigma(P)$.

*On définit enfin l'élément $H_S(P) = \varepsilon_P^* \mathscr{O}(D)$ de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$, appelé S-*hauteur relative *de P pour le (S, ∞)-modèle considéré.*

La proposition suivante reproduit la définition du degré arithmétique d'un élément de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)$:

Proposition 3.3.4. — *On a l'égalité*

$$\widehat{\deg}\, H_S(P) = \sum_{\mathfrak{p} \in S} h_{S,v_\mathfrak{p}}(P) \log N(\mathfrak{p}) + \sum_{\sigma \in S(\mathbf{C})} h_{S,\sigma}(P).$$

La donnée d'un $\overline{S}$-modèle (resp. d'un $(\overline{S}, \infty)$-modèle) permet de définir ces fonction sur tout $E_\eta(\overline{\eta})$. Pour simplifier, on n'explicite la définition que dans le cas des corps de nombres.

Définition 3.3.5. *Fixons un $(\overline{S}, \infty)$-modèle. Soit $P \in E_\eta(\overline{\eta})$ et $\eta' \subset \overline{\eta}$ une extension finie de η telle que P est défini sur η'. Soit $\kappa : S' \to S$ le normalisé de*

S dans η'. Alors l'élément $\kappa_* H_{S'}(P) \otimes \frac{1}{[S':S]}$ de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est indépendant du choix de S'. On l'appelle hauteur relative *de P pour ce $(\overline{S}, \infty)$-modèle.*

Si l'on ne précise pas le $(\overline{S}, \infty)$-modèle, c'est que l'on a choisi le modèle défini par les extensions canoniques, le choix d'un homomorphisme $\omega_{A^\vee} \to V$ et d'une métrique hermitienne sur V_η. Nous la noterons parfois H_{can} quand il pourrait y avoir confusion.

3.3.b. La hauteur relative est une hauteur

Rappelons (cf. par exemple [**35**] ou [**20**]) qu'il existe sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ une fonction h_W appelée *hauteur* et jouissant de nombreuses propriétés (théorème de Northcott, etc.). Si $X/\overline{\mathbf{Q}}$ est une variété algébrique quasi-projective, tout plongement $\varphi : X \hookrightarrow \mathbf{P}^N_{\overline{\mathbf{Q}}}$ nous fournit une fonction $h_{W,\varphi}$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ que nous appellerons hauteur de Weil. Plus généralement, nous appellerons hauteur de Weil sur une variété quasi-projective X définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ toute fonction $h_{W,X} \colon X(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ qui est la somme d'une fonction de la forme $h_{W,\varphi}$ et d'une fonction bornée. Si X est projective, on peut associer par linéarité une fonction $h_{W,D}$ (définie à une fonction bornée près) à tout diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$. Une *hauteur de Weil* sur X associée au diviseur D sera par définition une fonction $h \colon X(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ telle que $h - h_{W,D}$ soit bornée.

Théorème 3.3.6. — *Soit h_W une hauteur de Weil sur $\overline{E}_\eta$ associée au diviseur D. Alors, il existe une constante C telle que pour tout point $P \in E(\overline{\eta})$, on ait*

$$|\widehat{\deg}\, H_{\mathrm{can}}(P) - h_W(P)| \leqslant C.$$

Lemme 3.3.7. — *La hauteur relative définie à partir d'un $\overline{S}$-modèle projectif est une hauteur de Weil.*

Preuve. En effet, si (A, V, c) est un $\overline{S}$-modèle projectif, $\widehat{\deg}\, H(P)$ est alors le degré d'Arakelov du faisceau inversible métrisé $\varepsilon_P^* \mathscr{O}(D)$, calculé à l'aide d'un modèle projectif $\overline{E}$ de $\overline{E_\eta}$. ■

Dans le lemme suivant, les $\overline{S}$-points d'un $\overline{S}$-modèle projectif n'est rien d'autre que la limite inductive des S'-points de $E' = \overline{E'} \setminus D'$, les immersions ouvertes $A \times S' \to A'$ définissant des immersions $E \times S' \to E'$ d'où une injection $E(S) \hookrightarrow E'(S')$. Nous dirons qu'ils forment un groupe si leur restriction à la fibre générique est un sous-groupe de $E_\eta(\overline{\eta})$.

Lemme 3.3.8. — *Il existe un $\overline{S}$-modèle projectif de l'extension dont les $\overline{S}$-points sont un groupe.*

Preuve. Soit $\mathscr{X}$ un S-schéma propre, de type fini et plat, dont la fibre générique est A_η ; par exemple, l'adhérence de A_η dans un espace projectif $\mathbf{P}^n_S$ convenable. Soit $\mathscr{Y}$ un S-schéma propre, de type fini et plat qui d'une part prolonge $A_\eta \times_\eta A_\eta$, et d'autre part est muni d'applications p_1, p_2, $m\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ qui prolongent respectivement la première projection, la seconde projection et la multiplication $A_\eta^2 \to A_\eta$; par exemple, l'adhérence dans $\mathscr{X}^3$ de l'image de A_η^2 par la composition $A_\eta^2 \xrightarrow{(p_1,p_2,m)} A_\eta^3 \hookrightarrow \mathscr{X}^3$.

Soient (U_i) un recouvrement ouvert affine fini de $\mathscr{X}$, U_{ij} l'intersection de U_i et U_j, qui est aussi un ouvert affine ; soient donc $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ et $U_{ij} = \operatorname{Spec} R_{ij}$. Les $U_{i,\eta}$ sont des ouverts affines de A_η sur lesquels le V_η-torseur $E_\eta|_{U_{i,\eta}}$ est trivial, d'où une section $\sigma_i : U_{i,\eta} \to E_\eta$. Sur $U_{i,\eta} \cap U_{j,\eta}$, la différence $\sigma_i - \sigma_j$ est une fonction régulière f_{ij} à valeurs dans V_η, soit $f_{ij} \in R_{ij} \otimes V_\eta$. Par conséquent, on peut trouver un S-groupe vectoriel V dont V_η soit la fibre générique et tel que $f_{ij} \in R_{ij} \otimes V$; les f_{ij} vérifiant encore la condition de cocycle, cela nous définit bien un S-modèle projectif de l'extension, et donc un $\overline{S}$-modèle projectif par changement de base.

Notons $E \to \mathscr{X}$ le V-torseur formé à partir de S-modèle.

Comme $\mathscr{X}$ est un S-modèle propre d'une variété abélienne, il résulte du critère valuatif de propreté que les $\overline{S}$-points de $\mathscr{X}$ forment un groupe. En revanche, E n'est pas propre sur S, et l'ensemble $E(\overline{S})$ n'est pas *a priori* un sous-groupe de $E(\overline{\eta})$. Il reste à montrer comment modifier ce modèle de sorte que cette propriété soit satisfaite.

Notons Ω_{ijk} l'ouvert (affine) $(p_1,p_2)^{-1}(U_i \times_S U_j) \cap m^{-1}(U_k)$ de $\mathscr{Y}$, R_{ijk} son anneau et $\Omega_{ijk,\eta}$ sa fibre générique. On a une fonction $f_{ijk} : \Omega_{ijk,\eta} \to V_\eta$ définie par

$$f_{ijk}(x,x') = \Big(\sigma_i(x) \ominus_{E_\eta} \sigma_j(x')\Big) \ominus_{E_\eta} \sigma_k\left(x \ominus A_\eta x'\right),$$

si bien que f_{ijk} appartient à $R_{ijk} \otimes V \otimes_S \eta$ et il existe un dénominateur commun à tous ces éléments. Ainsi, quitte à remplacer V par $\frac{1}{D}V \subset V_\eta$, sans changer les f_i, etc., on peut supposer que

$$f_{ijk} \in R_{ijk} \otimes V.$$

Dans ces conditions, montrons que $E(\overline{S})$ est un groupe. Il suffit de montrer que $E(S')$ est un groupe pour toute extension finie $S' \to S$, et les propriétés ci-dessus restant vraies après changement de base à S', on peut se contenter de prouver que $E(S)$ est un groupe. C'est alors une propriété locale pour la topologie de Zariski sur S, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète.

Soient e et $e' \in E(S)$, $x = \pi(e)$ et $x' = \pi(e') \in \mathscr{X}(S)$. Comme S est un trait, on peut trouver i, j et k tels que $(p_1,p_2)^{-1}(x,x') \in \Omega_{ijk}$. Alors, comme E est un V-torseur sur $\mathscr{X}$, dire que e est entier revient à dire qu'il existe un élément $v \in V$

tel que $e = \sigma_i(x) + v$, et de même pour e' (le + est au sens des torseurs). On constate alors que

$$\begin{aligned} e \ominus_{E_\eta} e' &= (\sigma_i(x) + v) \ominus (\sigma_j(x') + v') \\ &= \sigma_k(x \ominus_{A_\eta} x') + (v - v' + f_{ijk}(x, x')) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $e \ominus e'$ appartient bien à $E(S)$. Ainsi, $E(S)$ est un groupe, ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Le lemme qui suit est une variante de la proposition 3.4.3 démontrée plus loin.

LEMME 3.3.9. — *Soient (A, V, c) un S-modèle et v une place de $S = \operatorname{Spec} R$. Pour tout $\lambda \in R$ non nul, on note $[\lambda]_*E$ le $\lambda^{-1}V$ torseur construit à l'aide du S-modèle $(A, \lambda^{-1}V, c)$. Dans ces conditions, pour tout $P \in E_\eta(\eta)$, $h_{S,v}(P) \leqslant v(\lambda)$ si et seulement si P se prolonge en un point entier de $[\lambda]_*E(S)$.*

LEMME 3.3.10. — *Étant donnés deux S-modèles dont les points forment un groupe, notons $h_{S,v,1}$ et $h_{S,v,2}$ les hauteurs locales en une place v de S définies par ces modèles. Alors,*

$$\sup_{P \in E_\eta(\eta)} |h_{S,v,1}(P) - h_{S,v,2}(P)| \leqslant \sup_{\substack{P \in E_\eta(\eta) \\ \pi(P)=0}} |h_{S,v,1}(P) - h_{S,v,2}(P)| .$$

Preuve. Soient donc (A_1, V_1, c_1) et (A_2, V_2, c_2) deux S-modèles. Notons E_1 et E_2 les V_1-torseurs (resp. V_2) correspondants. Soit $P \in E_\eta(\eta)$, $Q = \pi(P) \in A_\eta(\eta)$ et Q_1, Q_2 les deux sections de $A_1(S)$, $A_2(S)$ prolongeant Q. Soient P_1 et P_2 les points entiers de $\overline{E_1}(S)$ et $\overline{E_2}(S)$ qui prolongent P.

Montrons qu'il existe $P^0 \in E_\eta(\eta)$ tel que $\pi(P^0) = Q$ et tel que P^0 se prolonge en un point entier P_1^0 et P_2^0 dans chacun des S-modèles E_1 et E_2.

Comme S est affine, la restriction du V_1 torseur E_1 à Q_1 est triviale et on fixe un isomorphisme $u_1 : Q_1^* E_1 \to V_1$. De même, fixons un isomorphisme $u_2 : Q_2^* E_2 \to V_2$, compatible à l'isomorphisme $\varphi_{12} : E_{1,\eta} \to E_{2,\eta}$. Ainsi, il suffit de trouver $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ tel que $\varphi_{12} \circ u_1^{-1}(v_1) = u_2^{-1}(v_2)$. L'isomorphisme $Q_1^* E_{1,\eta} \simeq Q_2^* E_{2,\eta}$ se prolonge en un homomorphisme $Q_1^* E_1 \to \frac{1}{D} Q_2^* E_2$ pour un entier $D \geqslant 1$ et il suffit de prendre $v_1 \in D V_1$ pour conclure.

Alors, le point P_1 appartient à $E_1(S)$ si et seulement si $P_1 \ominus_{E_\eta} P_1^0$ aussi (car $E_1(S)$ est un sous-groupe), et de même, $P_2 \in E_2(S)$ si et seulement si $P_2 - P_2^0 \in E_2(S)$.

Si, pour $\lambda \in R$, on désigne par $[\lambda]_* E_1$ le S-modèle $(A_1, \frac{1}{\lambda} V_1, c_1)$ de l'extension E_η, et de même pour E_2, le lemme 3.3.9 affirme que $h_{S,v,1}(P) \leqslant v(\lambda)$ si et seulement si le point P se prolonge en un point entier dans $[\lambda]_* E_1$.

Par suite, les points entiers des S-modèles $[\lambda]_* E_i$ étant aussi des groupes, on a les équivalences

$$\begin{aligned} h_{S,v,1}(P) \leqslant v(\lambda) &\Leftrightarrow P_1 \in [\lambda]_* E_1(S) \\ &\Leftrightarrow P_1 - P_1^0 \in [\lambda]_* E_1(S) \end{aligned}$$

car P^0 se prolonge en un point entier du $\frac{1}{\lambda}V_1$-torseur $[\lambda]_* E_1$, et de même,

$$h_{S,v,2}(P) \Leftrightarrow P_2 - P_2^0 \in [\lambda]_* E_2(S).$$

Finalement, comme le point $P - P^0$ se projette en l'origine de A_η, le lemme est démontré. ■

Preuve du théorème 3.3.6. Vu les lemmes précédents, il suffit de comparer les hauteurs globales en la fibre à l'origine définies par, d'une part un $(\overline{S}, \infty)$-modèle projectif, et d'autre part le $(\overline{S}, \infty)$-modèle que donne l'extension canonique.

On commence par se ramener au cas où les mêmes métriques hermitiennes sur V_η sont les mêmes, ce qui change les hauteurs globales par une fonction bornée. Ainsi, les hauteurs locales archimédiennes sont les mêmes.

Ensuite, il existe un ouvert dense U de S tel que le U-modèle obtenu par extension des scalaires à partir de l'extension canonique est projectif. Ainsi, on peut supposer que les hauteurs locales en toute place $v \in U$ coïncident.

Enfin, pour l'ensemble fini de places $v \in S \setminus U$, la comparaison en l'origine est facile : on a deux R_v-modules V_1 et V_2, ainsi que des isomorphismes $V_1 \otimes K \simeq V_\eta \simeq V_2 \otimes K$ tels que $h_{S,v,1}(w)$ et $h_{S,v,2}(w)$ soient le dénominateur de w dans $V_1 \otimes K$ (resp. $V_2 \otimes K$) pour tout $w \in V_\eta \otimes \overline{K}$. Comme l'isomorphisme $V_1 \otimes K \simeq V_2 \otimes K$ (et son inverse) que l'on obtient a un dénominateur borné, il existe ainsi une constante C_v telle que pour tout $w \in V_\eta \otimes \overline{K}$,

$$|h_{S,v,1}(w) - h_{S,v,2}(w)| \leqslant C_v.$$

En définitive, les deux hauteurs diffèrent sur $E_\eta(\overline{\eta})$ d'une fonction bornée, majorée par $C = \sum_{v \notin U} C_v \log N(v)$. ■

Corollaire 3.3.11. — *Soit h_W une hauteur de Weil sur $\overline{E}_\eta$ associée à un plongement projectif de $\overline{E}_\eta$. Il existe un entier $n \geqslant 1$ et une constante C tels que pour tout point $P \in E(\overline{\eta})$ d'ordre fini, on ait*

$$|h_W(P) - n\widehat{\deg}\, H(P)| \leqslant C.$$

Preuve. En effet, la structure du groupe de Picard des fibrés projectifs nous dit que h_W est associé à un élément de la forme $\pi^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(n)$ dans $\mathrm{Pic}(\overline{E}_\eta)$, π étant la projection $\overline{E}_\eta \to A_\eta$; comme ce fibré est ample, $n \geqslant 1$. Le corollaire se déduit des deux points suivants :

– grâce à l'existence de la hauteur de Néron–Tate sur $A_\eta(\overline{\eta})$, le terme correspondant à $\pi^*\mathscr{L}$ est uniformément borné lorsque $\pi(P)$ décrit $A_\eta(\overline{\eta})_{\text{tors}}$;

– d'après le théorème 3.3.6, la différence entre $n\widehat{\deg}\, H(P)$ et le terme correspondant à $\mathscr{O}(n)$ est uniformément bornée lorsque $P \in \overline{E}_\eta(\overline{\eta})$. ■

3.4. Hauteur des points d'ordre fini

Nous calculons ici la hauteur relative des points d'ordre fini sur une extension vectorielle ; remarquons que la projection $\pi : E_\eta \to A_\eta$ induit un isomorphisme entre les sous-groupes de torsion :

Lemme 3.4.1. — *Soit $\pi : E_\eta \to A_\eta$ une extension vectorielle d'une variété abélienne, η étant le spectre d'un corps de caractéristique* 0. *Alors, pour tout entier non nul n et pour tout point $x \in A_\eta$ annulé par n, il existe un unique point $\xi \in E_\eta$ relevant x et annulé par n.*

Preuve. Notons $0 \to V_\eta \to E_\eta \to A_\eta \to 0$ cette extension. Soit un point $\xi_0 \in E_\eta$ relevant x. Le point $[n]\xi_0$ est au-dessus de $[n]x = 0_A$ et est donc un élément du groupe vectoriel V_η. Alors, on cherche ξ sous la forme $\xi_0 + v$, ce qui donne comme unique solution $v = -\frac{1}{n}([n]\xi_0)$. ■

Si la partie archimédienne de la hauteur est très facile à évaluer, la partie à distance finie nécessite plus de soin et les calculs du chapitre 4 sur les schémas en groupes finis.

Nous conservons les notations du paragraphe 3.3.

3.4.a. Calcul archimédien

Proposition 3.4.2. — *Soit n un entier non nul. Soient $S' \to S$ le normalisé de S dans une extension finie $\eta' \to \eta$ et $P \in E(\eta')$ tel que $[n]P = 0$. Alors, pour tout $\sigma \in S'(\mathbf{C})$, on a $h_{S',\sigma}(P) = 0$.*

Preuve. Pour simplifier les notations, effectuons le changement de base par $\sigma : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to S'$. Il faut ainsi montrer que $\|s_D\|_P = 1$. Comme l'extension de $\mathbf{C}^g$ par V obtenue par *pull-back* de E est scindée, le même calcul que dans le lemme 3.2.1 montre que la loi de groupe sur E se déduit par passage au quotient par l'action de $\pi_1(A)$ de l'opération

$$(u, z) \oplus (u', z') \mapsto (u + u', z + z')$$

sur $V \times \mathbf{C}^g$. Vue comme loi de groupe rationnelle sur $\overline{E}$, elle provient de l'opération

$$([t : u], z) \oplus ([t' : u'], z') \mapsto ([tt', t'u + tu'], z + z').$$

Par suite, la multiplication par n provient du morphisme $([t:u],z) \mapsto ([t:nu],nz)$ sur $\mathbf{P}(\mathbf{C}\oplus V)\times\mathbf{C}^g$. Il en résulte que les coordonnées des points annulés par n de E, lues sur le revêtement universel, sont $([1:\rho(\lambda)/n],\lambda/n)$ avec $\lambda\in\Lambda \pmod{n\Lambda}$.

D'après la proposition 3.2.2, on a l'égalité

$$\|s_D\|_P = |t|\left(\|u-t\rho(z)\|_V^2+|t|^2\right)^{-1/2},$$

alors que l'on a $u=\rho(\lambda)/n$, $t=1$ et $z=\lambda/n$, si bien que $\|s_D\|_P=1$. ∎

3.4.b. Calcul aux places finies : préliminaires

Désormais, on choisit une place v de S et on suppose, après changement de base, que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète R. Si K est le corps des fractions de R (donc $\eta=\operatorname{Spec} K$ est le point générique de S), A/S est le modèle de Néron d'une variété abélienne A_K/K et E est une extension de A par un groupe vectoriel V/S. On note $i:V\to E$ l'inclusion naturelle.

Le *push-out* de l'extension E via la multiplication par $\lambda\in R$ sur V nous donne une extension $[\lambda]_*E$, ainsi qu'un morphisme $u_\lambda: E\to[\lambda]_*E$: si l'on considère la suite exacte

$$0\to V\xrightarrow{(i,-\lambda)} E\times_S V\xrightarrow{p_\lambda}[\lambda]_*E\to 0$$

qui définit $[\lambda]_*E$, le morphisme u_λ est la restriction de p_λ à $E\times_S\{0\}=E$. Si λ n'est pas une unité de R, l'application u_λ ne s'étend pas à $\overline{E}$. Cependant, si $P\in E(\eta)$, cela a un sens de considérer la section $\varepsilon_{u_\lambda(P)}: S\to\overline{[\lambda]_*E}$ associée au point $u_\lambda(P)$, calculé sur la fibre générique (cf. le paragraphe 3.3.a).

Proposition 3.4.3. — *Soit $P\in E(\eta)$. Alors, on peut calculer la S-hauteur relative locale $h_{S,v}(P)$ (définition 3.3.3) par la formule*

$$h_{S,v}(P)=\min\{v(\lambda)\ ;\ \lambda\in R\setminus\{0\},\varepsilon_{u_\lambda(P)}(S)\subset[\lambda]_*E(S)\}.$$

Preuve. Soient $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de A et $w=(w_{UU'})$ un cocycle qui représente la classe de l'extension E dans $H^1(A,\mathscr{O}_A\otimes\mathscr{W})$. Si $\rho:S\to A$ est un S-point de A, un S point $\tilde\rho$ de E au-dessus de ρ est alors une famille de morphismes $\sigma_U:\rho^{-1}(U)\to V$ pour $U\in\mathfrak{U}$ vérifiant $\sigma_U-\sigma_{U'}=w_{UU'}\circ\rho$. L'extension $[\lambda]_*E$ correspond à la classe λw et le S-point $u_\lambda(\tilde\rho)$ est représenté par les morphismes $\lambda\sigma_U$.

Comme R est principal, un S-point de $\overline{E}$ au-dessus de ρ est un couple $(\{\sigma_U\},t)$ défini à multiplication par une unité de R près et tel que $\sigma_U-\sigma_{U'}=tw_{UU'}\circ\rho$ pour tous U, $U'\in\mathfrak{U}$, et $(\sigma_U,t)\neq(0,0)$ modulo l'idéal maximal de R.

Par définition de l'intersection arithmétique, $(\tilde\rho(S)\cdot D)_v$ est égal à $v(t)$, si bien que $\tilde\rho(S)\subset E$ si et seulement si $v(t)=0$. D'après ce qu'on vient de voir, $\varepsilon_{u_\lambda(P)}$

correspond à la famille $(\{\sigma_U\}, t/\lambda)$ tant que $v(t/\lambda) \geqslant 0$, et à $(\{\lambda\sigma_U/t\}, 1)$ quand $v(\lambda/t) \geqslant 0$, d'où la proposition. ■

Lemme 3.4.4. — *Soit $P \in E(K)$. Alors, $h_{S,v}(P) \geqslant 0$. Si de plus $[n]_E P$ se prolonge en un point entier de E/S, par exemple, si $[n]_E P = 0$, alors $h_{S,v}(P) \leqslant v(n)$.*

Preuve. La première partie du lemme est évidente. Pour démontrer la seconde, utilisons la structure affine de E : soient $Q_1 = \pi(P)$, $Q_2 = \pi([n]_E P) = [n]_A Q_1$ et choisissons $P_1 \in E(S)$ tel que $\pi(P_1) = Q_1$ (il en existe car $\operatorname{Spec} R$ est affine !) ; posons enfin $P_2 = [n]_E P$ qui se prolonge par hypothèse en un point entier de E/S. Alors, il existe un unique $x \in V \otimes K$ tel que $P = P_1 + i(x)$, i désignant l'inclusion $V \hookrightarrow E$. La multiplicité d'intersection est alors égale à

$$\min\{v(\lambda)\ ;\ \ \lambda \in R \setminus \{0\}, \lambda x \in V \subset V \otimes K\}.$$

Par hypothèse, $nx = i^{-1}([n]_E(P - P_1)) = [n]_E P - [n]_E P_1$ est entier, et $h_{S,v}(P) \leqslant v(n)$. ■

Corollaire 3.4.5. — *Si $P \in E(K)$ est un point annulé par un entier $n \neq 0$ et si la caractéristique résiduelle ne divise pas n, on a $h_{S,v}(P) = 0$.*

Corollaire 3.4.6. — *Si $P \in E(K)$ est un point annulé par un entier $n \geqslant 1$, la hauteur relative globale de P vérifie $\widehat{\deg}\, H(P) \leqslant \log n$.*

Preuve. En effet,

$$[K : \mathbf{Q}]\widehat{\deg}\, H(P) = \sum_{v \text{ finie}} h_{S,v}(P) \log N(v) + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} h_{S,\sigma(P)}.$$

Le terme archimédien est nul, le terme non archimédien $h_{S,v}(P)$ est positif, majoré par $v(n)$. Par conséquent,

$$\widehat{\deg}\, H(P) \leqslant \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_v v(n) \log N(v) = \log n.$$

■

3.4.c. Groupes finis

On conserve les notations du paragraphe précédent. Soit p la caractéristique résiduelle ; si N est un entier non nul, notons $A(N)$ le sous-schéma en groupes $\operatorname{Ker}[p^N]_A$ de A, que l'on suppose fini et plat sur S. C'est notamment le cas si A/S est un schéma abélien ou bien si K est suffisamment gros pour que les points d'ordre p^N soient définis sur K et si A est semi-abélienne en les places au-dessus de p.

Le sous-schéma en groupes $\mathrm{Ker}[p^N]_{A^\vee}$ de $A^\vee$ s'identifie alors au dual de Cartier $A(N)^*$ de $A(N)$. Rappelons aussi que $\omega_{A(N)^*} = \omega_{A^\vee} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})$. Nous noterons f_N l'application $\omega_{A(N)^*} \to V/p^NV$ déduite du morphisme $f : \omega_{A^\vee} \to V$ qui définit le modèle entier de l'extension.

Soit B un schéma et H un schéma en groupes fini et plat sur B. Rappelons (cf. les chapitres 2 et 4) que l'on dispose d'une application canonique $\alpha_H : H \to \omega_{H^*}$, où H^* est le dual de Cartier de H.

Proposition 3.4.7. — *On suppose que le schéma en groupes $A(N)/S$ est fini et plat sur S. Soit $P \in E(K)$ un point annulé par p^N, notons $Q = \pi(P)$ et $\varepsilon_Q : S \to A(N)$ la section qui prolonge Q. Alors, on a pour tout $\lambda \in R \setminus \{0\}$ l'équivalence :*

$$h_{S,v}(P) \leqslant v(\lambda) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda f_N \circ \alpha_{A(N)} \circ \varepsilon_Q = 0 \quad \textit{dans } V/p^NV.$$

Preuve. L'extension E est obtenue à partir de l'extension canonique de A/S par *push-out* via l'application $\omega_{A^\vee} \to V$.

D'après le lemme 3.4.1 et la proposition 3.4.3, l'inégalité $h_{S,v}(P) \leqslant v(\lambda)$ est vraie si et seulement si ε_Q se relève en un point annulé par p^N dans l'extension vectorielle $[\lambda]_*E$. Or, pour vérifier ce dernier fait, il n'est pas restrictif d'effectuer le changement de base de $S = \operatorname{Spec} R$ à $S_N = \operatorname{Spec}(R/p^NR)$. En effet, une fois choisie une origine P_1 dans la fibre affine au-dessus de ε_Q (comme dans la preuve du lemme 3.4.4), l'équation à résoudre s'écrit $p^Nx = v$ et cette équation possède une solution $x \in V$ si et seulement si $v \in p^NV$, c'est-à-dire s'il y a une solution après changement de base à S_N. De même, la condition de droite est vraie si et seulement si elle est vraie après changement de base à S_N puisque $\omega_{A(N)^*}$ est déjà annulé par p^N.

Pour simplifier les notations, on notera de la même manière les S-schémas et les S_N schémas obtenus par extension des scalaires de S à S_N.

La construction du cobord $\partial_E : A(N) \to V/p^NV$ associé à une extension E de A par un groupe vectoriel V (cf. le pagraphe 2.2, page 28 pour l'extension universelle) montre qu'il existe un point P annulé par p^n et relevant Q dans l'extension si et seulement si $\partial_E(Q) = 0$. Or, les résultats rappelés au chapitre 2 (cas de bonne réduction) ou bien le théorème 2.3.2 (cas de réduction semi-stable) montrent que le cobord associé à l'extension canonique est $\alpha_{A(N)}$, si bien que le cobord associé à l'extension vectorielle E est $f_N \circ \alpha_{A(N)}$ et celui associé à l'extension $[\lambda]_*E$ est $\lambda f_N \circ \alpha_{A(N)}$, ce qui conclut la démonstration de la proposition. ■

3.4.d. Calcul aux places finies : suite

Dans tous ce paragraphe, K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, R est l'anneau des entiers de K, A/R est le modèle de Néron d'une variété abélienne sur K, V est un R-schéma en groupes vectoriels et E une extension de A par V. On suppose que A est *semi-stable*. Notons aussi $\mathfrak{q}$ l'idéal maximal de R et v la valuation de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ définie par $\mathfrak{q}$, normalisée par $v(p) = 1$. Soient K' une extension finie de K telle que la p-torsion de A_K soit définie sur K' et R' la clôture intégrale de R dans K'. Soit S' le spectre de R' et $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de R'.

La proposition 3.4.7 va nous permetre d'appliquer les résultats du chapitre 4 et d'en déduire des évaluation des hauteurs relatives locales des points d'ordre p. Nous ferons en particulier appel à la proposition suivante qui sera démontrée au prochain chapitre (indépendamment de ce qui suit) :

PROPOSITION (Proposition 4.4.2). — *Soit G un schéma en groupes fini et plat sur R, annulé par p. On suppose que R est absolument non ramifié. Soit $f : \omega_{G^*} \to R/pR$ une application non nulle. Alors, il existe $x \in G(\overline{R})$ tel que si $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ vérifie $\lambda f \alpha_G(x) = 0$, on a l'inégalité $v(\lambda) > \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

On déduit alors immédiatement de cette proposition, ainsi que de la proposition 3.4.7, l'évaluation suivante :

PROPOSITION 3.4.8. — *Supposons que A/R est un schéma abélien, que K est absolument non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et que la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de l'extension E est non triviale.*

Alors, il existe un point $P \in E_K(K')$ d'ordre p dont la hauteur relative locale vérifie

$$h_{S',v_{\mathfrak{p}}}(P) > \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v_{\mathfrak{p}}(p) \quad .$$

On peut donner des résultats plus précis dans certains cas à condition de connaître le schéma en groupes des points annulés par $[p]$ et l'application $\omega_{G^*} \to V/pV$. Donnons ici le cas étale et le cas supersingulier. Les calculs de l'appendice A.1 concernant le cas des variétés abéliennes à multiplication complexe pourraient aussi être retraduits dans ce cadre. Le cas étale était le résultat principal de [**6**], voir aussi [**23**, bas de la page 56] où il est virtuellement montré que la hauteur locale est strictement positive. Dans le cas supersingulier, ceci redonne, par une méthode toute différente, une partie des résultats de [**8**], mais sous l'hypothèse que le corps de base est non ramifié en p.

PROPOSITION 3.4.9. — *On suppose que A a réduction semi-stable en les places au-dessus de p et que E est l'extension canonique de A. Soit $P \in E_K(K')$ un point d'ordre p qui se projette en un point de $A(R')$ dont la réduction modulo p est d'ordre p ; alors la hauteur relative de P est égale à $v_{\mathfrak{p}}(p)$.*

Preuve. Avec les notations précédant la proposition 3.4.7, le théorème 2.3.3 signifie que le morphisme f_N défini par l'extension est l'identité. Il suffit alors d'appliquer le lemme 4.4.6. ■

PROPOSITION 3.4.10. — *Supposons que A/R est une courbe elliptique dont la réduction modulo $\mathfrak{p}$ est supersingulière et que K est absolument non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$. Si E est l'extension universelle de A, tout point $P \in E_K(K')$ d'ordre p a pour hauteur relative locale $h_{S',v_\mathfrak{p}}(P) = \left(1 - \frac{p}{p^2-1}\right) v_\mathfrak{p}(p)$.*

Preuve. Mettre 3.4.7 contre 4.4.7. ■

3.4.e. Conclusion

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal de ce chapitre.

THÉORÈME 3.4.11. — *Soient K un corps de nombres, A une variété abélienne sur K de dimension g et E une K-extension non triviale de A par un groupe vectoriel V. On suppose que A admet un modèle semi-stable sur l'anneau des entiers de K. Soit p un nombre premier qui ne divise ni le discriminant de K ni le conducteur de A_K et tel que de plus l'application « $f : \omega_{A^\vee} \to V$ » qui définit le modèle entier ne se réduise pas en 0 modulo chacune des places divisant p. Alors, la moyenne des points de E annulés par p vérifie l'inégalité*

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right) \log p < \frac{1}{p^{2g}} \sum_{\substack{[p]P=0 \\ P \in E(\overline{K})}} \widehat{\deg}\, H(P) \leqslant \log p.$$

REMARQUE 3.4.12. Il est clair que tout nombre premier p assez grand vérifie l'hypothèse du théorème. Si p ne divise ni le discriminant de K ni le conducteur de A_K, il suffit que les diverses extensions vectorielles obtenues par réduction modulo les places divisant p soient non triviales ; cette dernière condition sera d'ailleurs automatique si l'on a choisi comme modèle entier l'extension « meilleure que les autres » définie au paragraphe 3.2.a. On obtient ainsi l'énoncé du théorème 3.4.11 cité dans l'introduction de ce chapitre.

Preuve du théorème 3.4.11. Il s'agit de recueillir les informations contenues dans la proposition 3.3.4, la proposition 3.4.2, le lemme 3.4.4 et la proposition 3.4.8. Soit p un nombre premier tel que le corps de définition K soit non ramifiée sur $\mathbf{Q}$ en p, tel que A ait bonne réduction en toutes les places divisant p, et enfin tel que la réduction de l'extension modulo ces places soit non triviale.

Soit K' une extension de K telle que les points d'ordre p de A soient définis sur K', soit S' le spectre de l'anneau des entiers de K'.

(1) Si $\sigma \in S'(\mathbf{C})$ et $P \in E(\overline{K})$ est annulé par p, on a d'après la proposition 3.4.2 $h_{S',\sigma}(p) = 0$.

(2) Si $\mathfrak{p}$ est un point fermé de S' dont la caractéristique résiduelle est première à p, $P \in E(\overline{K})$ est annulé par p, alors, d'après le lemme 3.4.4, on a $h_{S',v_\mathfrak{p}}(P) = 0$.

(3) Si $\mathfrak{p}$ est une place de S' dont la caractéristique résiduelle est p et $P \in E(\overline{K})$ est annulé par p, le lemme 3.4.4 affirme aussi que $0 \leqslant h_{S,v_\mathfrak{p}}(P) \leqslant v(p)$.

Les points (1), (2) et (3) impliquent déjà que

$$\begin{aligned}
\sum_{[p]P=0} \widehat{\deg}\, H(P) &= \frac{1}{[K':\mathbf{Q}]} \sum_{[p]P=0} \left(\sum_{\mathfrak{p}\in S'} h_{S',v_\mathfrak{p}} \log N(\mathfrak{p}) + \sum_{\sigma\in S'(\mathbf{C})} h_{S',\sigma}(P) \right) \\
&= \frac{1}{[K':\mathbf{Q}]} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in S' \\ p\mid\mathfrak{p}}} \log N(\mathfrak{p}) \left(\sum_{[p]P=0} h_{S',v_\mathfrak{p}} \right) \\
&\leqslant \frac{p^{2g}-1}{[K':\mathbf{Q}]} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in S' \\ p\mid\mathfrak{p}}} v_\mathfrak{p}(p) \log N(\mathfrak{p}) \leqslant p^{2g} \log p.
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant la minoration 3.4.8.

(4) Soit $\mathfrak{p}$ une place de S' dont la caractéristique résiduelle est p et notons $\mathfrak{q}$ la place de S au-dessous de $\mathfrak{p}$, de sorte que $\mathfrak{q}/p$ est non ramifiée. D'après la proposition 3.4.8, il existe un point $P \in E(K')$ d'ordre p dont la hauteur locale vérifie

$$h_{S',v_\mathfrak{p}}(P) > \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v_\mathfrak{p}(p) \quad .$$

Or, l'ensemble des $x \in E(K')$ tels que $[p]x = 0$ et $h_{S',v_\mathfrak{p}}(x) \leqslant (p-2)v_\mathfrak{p}(p)/(p-1)$ est un sous-groupe de $E(K')$. On vient de voir qu'il n'est pas égal à toute la p-torsion de $E(K')$, donc son ordre divise strictement p^{2g} et l'ensemble des $P \in E(K')$ d'ordre p et tels que $h_{S',v_\mathfrak{p}}(P) > (p-2)v_\mathfrak{p}(p)/(p-1)$ est de cardinal supérieur ou égal à $p^{2g} - p^{2g-1} = p^{2g-1}(p-1)$. Par conséquent, comme de plus $h_{S',v_\mathfrak{p}} \geqslant 0$, on a

$$\sum_{\substack{[p]P=0 \\ P\in E(K')}} h_{S',v_\mathfrak{p}}(P) > (p-2)p^{2g-1} v_\mathfrak{p}(p) = p^{2g}(1-2/p)v_\mathfrak{p}(p).$$

Finalement, on a, en utilisant aussi les points (1) et (2),

$$\sum_{[p]P=0} \widehat{\deg}\, H(P) > p^{2g}(1-2/p) \frac{1}{[K':\mathbf{Q}]} \sum_{\mathfrak{p}\mid p} v_\mathfrak{p}(p) \log N(\mathfrak{p}) > p^{2g}(1-2/p) \log p.$$

■

On laisse au lecteur le soin de raffiner le théorème 3.4.11 au moyen des propositions 3.4.9 et 3.4.10 (cf. [**5**] dans le premier cas).

Remarque 3.4.13. Quitte à se contenter d'une inégalité large dans le théorème 3.4.11, on peut n'utiliser du chapitre 4 que le paragraphe 4.3. En particulier, le théorème 1 de l'introduction générale est conséquence des résultats de Fontaine sur la « presque décomposition de Hodge–Tate » des schémas en groupes finis.

3.5. Points de hauteur relative nulle

Dans ce paragraphe, nous voulons donner quelques exemples de points de hauteur relative nulle sur l'extension universelle.

Soient K un corps de nombres, A_K une variété abélienne sur K dont on suppose que le modèle de Néron A sur l'anneau $\mathfrak{O}_K$ des entiers de K est semi-stable.

Au moins conjecturalement, les énoncés de transcendance permettent de prédire que la contribution archimédienne à la hauteur d'un point e de $E(\overline{K})$ ne peut s'annuler que si son image a dans $A(\overline{K})$ est un point de torsion.

Dans ce cas, la formule donnant la contribution archimédienne prouve que celle-ci n'est nulle que si le point e est lui-même d'ordre fini.

Notons alors G le schéma en groupes sur $\operatorname{Spec}\mathfrak{O}_K$, noyau de la multiplication par p dans A. L'unique point de torsion de $E(\overline{K})$ relevant a est de hauteur relative nulle si et seulement si $\alpha_G(a) = 0$. Supposons que K est non ramifié sur $\mathbf{Q}$ en les places divisant l'ordre p de a.

Pour toute place v divisant p, le schéma en groupes $G_v = G \otimes \mathfrak{O}_{K,v}$ contient une plus grande partie torique G_v^{tor} ; notons H_v le quotient de G_v par G_v^{tor} et b_v l'image de a dans H_v. Comme l'application naturelle $\omega_{G_v^*} \to \omega_{H_v^*}$ est un isomorphisme et que la formation de l'application α_G commute aux changements de base, $\alpha_G(a) = 0$ si et seulement si $\alpha_{H_v}(b_v) = 0$ pour toute place v divisant p. On déduit alors des résultats du paragraphe 4.4 que pour tout quotient simple $\pi \colon H_v \to M_v$, $\pi(b_v) = 0$.

Ainsi, pour assurer que $\widehat{\deg}\, H(e) = 0$, il suffit que $b_v = 0$ pour toute place v, autrement dit que a appartienne en toute place v divisant p à la partie torique du noyau de la multiplication par p de A. On constate en fait que cette condition suffit, sans hypothèses sur la ramification.

La courbe modulaire $X_0(11)$ est une courbe de genre 1 avec bonne réduction hors de 11 dont il est bien connu que le $\mathbf{Z}$-schéma en groupes de 5-torsion comporte un μ_5. En effet, elle possède 5 points rationnels sur $\mathbf{Q}$ (dont deux pointes) ; dans le modèle de Néron de $X_0(11)$, ils engendrent un sous-$\mathbf{Z}$-schéma en groupes de $X_0(11)[5]$, d'ordre 5. D'après la classification des schémas en groupes d'ordre premier par Oort et Tate [**29**], ce schéma en groupes est (sur l'anneau $\mathbf{Z}_5$) $\mathbf{Z}/5$ ou μ_5. Comme il possède des points rationnels, c'est $\mathbf{Z}/5$. Par suite, $X_0(11)[5]$ possède un sous-schéma en groupes isomorphe à μ_5. Dans l'extension universelle de cette courbe elliptique, les points d'ordre fini qui relèvent ces points de $X_0(11)$ sont de hauteur relative nulle.

Pour construire (une infinité) d'autres exemples, suivons la méthode utilisée par Wiles dans son « 3–5 trick ». Notons $G[5]$ le $\mathbf{Z}$-schéma en groupes noyau de la multiplication par 5 dans le modèle de Néron de $X_0(11)$ et soit $Y'(5)$ la courbe modulaire qui classifie les couples (E, φ) où E est une courbe elliptique et $\varphi : G[5] \hookrightarrow E$ une injection de schémas en groupes. La courbe $X'(5)$ (la compactifiée de $Y'(5)$) est une tordue de la courbe modulaire $X(5)$ qui paramètre les courbes elliptiques avec une structure de niveau 5. Cette courbe est, sur $\overline{\mathbf{Q}}$, isomorphe à la réunion disjointe de quatre courbes de genre 0 — il en est ainsi de même pour $X'(5)$. Or, $X'(5)$ a un point rationnel sur $\mathbf{Q}$, à savoir $X_0(11)$, si bien qu'une des composantes de $X'(5)_{\overline{\mathbf{Q}}}$ est définie sur $\mathbf{Q}$ et possède par conséquent une infinité de points $\mathbf{Q}$-rationnels. Tous ces points donnent lieu à des courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ dont l'extension universelle a des points d'ordre 5 dont la hauteur relative est nulle. En fait, tous les points de $Y'(5)(\overline{\mathbf{Q}})$ donnent lieu à de telles courbes (sur une extension finie de $\mathbf{Q}$). Des produits de telles courbes elliptiques nous fournissent alors des exemples en toute dimension.

3.6. Remarques sur l'analogue géométrique

Soient C une courbe projective lisse sur un corps k algébriquement clos et K le corps des fonctions de C. Soient A_K une K-variété abélienne, A/C son modèle de Néron et $E \to A$ l'extension canonique (chapitre 2, ou [**23**, 5.1]) de A sur C. Ainsi, $E_K \to A_K$ est l'extension universelle de A_K.

On peut recopier presque mot pour mot la construction de la hauteur relative sur la compactification naturelle de E_K que nous avons donnée quand C est le spectre « compactifié » d'un anneau d'entiers de corps de nombres. On obtient ainsi une hauteur relative sur $E_K(\overline{K})$, qui est l'analogue géométrique de celle que nous avons étudiée dans le cas arithmétique.

Proposition 3.6.1. — *Si l'entier n est premier à la caractéristique de k, la projection $E_K \to A_K$ induit un isomorphisme entre les sous-groupes de n-torsion et tous les points de $E_K(\overline{K})$ annulés par n sont de hauteur relative nulle.*

Au contraire, si n est égal à la caractéristique de k, la n-torsion de E_K est égale à la fibre de $E_K \to A_K$ au-dessus de 0, en particulier, les points d'ordre n de $E_K(\overline{K})$ ont des hauteurs non bornées.

Preuve. Pour démontrer la première assertion, supposons n premier à la caractéristique de k et récrivons la preuve du corollaire 3.4.5. On peut supposer que les points de $A_K(\overline{K})$ annulés par $[n]_A$ sont définis sur K. Comme $n \neq 0$ dans K, la projection naturelle $E_K \to A_K$ est injective sur les sous-groupes de n-torsion. Soient ensuite $\mathfrak{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert affine de C et $P \in A_K(K)$ un point annulé par n, $\varepsilon_P : C \to A$ la section correspondante. Comme U_i est affine et que E est un torseur sous un groupe vectoriel, la restriction de E à U_i est triviale et il est possible de relever la restriction de ε_P à U_i en une section $\varphi_i : U_i \to E$. Alors, $[n]_E\varphi_i : U_i \to E$ relève la section nulle $\varepsilon_0 : C \to A$ et correspond donc à un élément

$v_i \in \omega_{A^\vee}$. Définissons maintenant $\varphi'_i : U_i \to E$ par $\varphi'_i = \varphi_i \ominus_E \left(\frac{1}{n} v_i\right)$, si bien que $[n]\varphi'_i : U_i \to E$ est la restriction à U_i de la section nulle de E. Il en résulte que les sections φ'_i se recollent en une section $\varphi'_P : C \to E$ annulée par $[n]_E$ et relevant ε_P. En particulier, d'une part $E_K(K)[n] \to A_K(K)[n]$ est un isomorphisme et d'autre part, les points de $E_K(K)[n]$ ont une hauteur relative nulle.

Supposons maintenant que n est égal à la caractéristique de k. La description [**23**, 2.6.2, p. 21] de l'extension universelle d'une variété abélienne sur une base où $p = 0$ entraîne que les points annulés par p dans $E_K(K)$ relevant $\xi \in A_K(K)$ sont représentés par des couples $(x, t) \in A_K(K) \times \omega_{A_K^\vee}$ tels que $[p]x = \xi$ et $\alpha(\xi) = 0$, α étant l'application universelle du K-schéma en groupes $A_K[p]$ vers $\omega_{A_K[p]^*} = \omega_{A_K^\vee}$.

Si $\xi = 0$, toute la fibre au-dessus de 0 est annulée par p. Si $\xi \neq 0$, ξ a par définition une image non nulle dans le quotient étale de $A_K[p]$ et le calcul du morphisme universel d'un schéma en groupes étale montre que l'image de ξ est non nulle, si bien qu'aucun point relevant ξ dans $E_K(K)$ n'est annulé par p.

Cela prouve bien que la p-torsion de E_K est la fibre en zéro de $E_K \to A_K$ qui est un K-vectoriel dont les points ont des hauteurs arbitrairement grandes. ■

Chapitre 4.—

Périodes des schémas en groupes finis et des variétés abéliennes

4.1. Introduction

Ce chapitre est essentiellement centré autour des schémas en groupes *finis*, qui finalement s'avèrent concentrer les problèmes qui nous intéressent.

Nous commençons par rappeler rapidement dans le paragraphe 4.2 la théorie des formes différentielles de première et seconde espèces sur un schéma en groupes fini et plat, cf. [**15, 23**].

Nous utilisons ensuite au paragraphe 4.3 la « presque décomposition de Hodge–Tate » des schémas en groupes finis, établie par Fontaine, pour obtenir un résultat de majorations de valuations p-adiques des périodes p-adiques de seconde espèce. On a vu au chapitre précédent (remarque 3.4.13) que ce résultat suffit essentiellement pour démontrer le théorème principal 3.4.11.

Nous donnons au paragraphe 4.4 une autre méthode pour évaluer ces valuations de périodes, qui utilise les schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ introduits par Raynaud dans [**31**]. L'intérêt pour nous de cette théorie est qu'elle permet d'obtenir une majoration des valuations des périodes p-adiques des formes de seconde espèce meilleure que celle que nous avons tirée de la théorie de Fontaine, notamment lorsque $p = 2$. La technique consiste à « dévisser » un schéma en groupes fini et plat annulé par p à l'aide d'une suite de Jordan–Hölder dont les quotients successifs sont du type introduit par Raynaud. Les calculs explicites sont alors très commodes. Toutefois, hormis l'étude du plus grand quotient étale, les dévissages que cette théorie nécessite nous limitent au cas « $e \leqslant p - 1$ ».

Nous donnons à l'appendice A.1 une application de notre méthode. On retrouve ainsi certains des calculs de Colmez dans [**11**] où il évaluait les valuations des périodes p-adiques des variétés abéliennes à multiplication complexe. Les schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ y apparaissent essentiellement comme des « groupes finis à multiplication complexe ».

Enfin, nous montrons à l'appendice A.2 comment ces majorations de valuations de périodes permettent de donner un nouveau point de vue sur la « conjecture de Manin » pour une courbe elliptique admettant une paramétrisation modulaire forte. Toutefois, nous n'obtenons pas mieux que le résultat de Mazur de 1978 là-dessus.

4.2. Périodes p-adiques

4.2.a. Seconde espèce

Soit B un schéma et G un schéma en groupes fini et plat sur B. Notons $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_m)$ le dual de Cartier de G. La (bi-)dualité de Cartier permet d'écrire $G = \mathrm{Hom}(G^*, \mathbf{G}_m)$ d'où un homomorphisme naturel $\alpha_G \colon G \to \omega_{G^*/B}$ qui associe à $f \colon G^* \to \mathbf{G}_m$ la forme différentielle $f^*(dt/t)$. D'après [**23**, 1.4] (voir aussi [**24**]), cette application est universelle pour les homomorphismes de G dans un faisceau quasi-cohérent : pour tout faisceau quasi-cohérent M (identifié au schéma en groupes qu'il représente) sur B et tout morphisme de B–schémas en groupes $\varphi : G \to M$, il existe un unique morphisme de faisceaux quasi-cohérents $\tilde{\varphi} : \omega_{G^*} \to M$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \alpha_G$.

Soient maintenant K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\mathfrak{O}_K$ l'anneau des entiers de K et H un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}\, \mathfrak{O}_K$ (par exemple un groupe formel p-divisible sur $\mathfrak{O}_K$, ou le groupe p-divisible attaché à un $\mathfrak{O}_K$–schéma abélien). Notons H^* son dual au sens des groupes p-divisibles et ω_{H^*} le module des formes différentielles invariantes sur H^*. On notera $\mathfrak{O}_{\overline{K}}$ l'anneau des entiers d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et $\mathfrak{O}_p$ le complété p-adique de $\mathfrak{O}_{\overline{K}}$.

Considérons l'extension universelle ([**23**, 1.8, 1.9, 1.10]) de H par un schéma en groupes vectoriels sur $\mathfrak{O}_K$: c'est une suite exacte

$$0 \to \omega_{H^*} \to E(H) \to H \to 0 \quad .$$

Si $x = (x_1, \ldots)$ est un élément du module de Tate p-adique $T_p(H)$, Coleman [**9**, Note added in proof] considère une suite $(\hat{x}_n)$ de points entiers dans $E(H)(\mathfrak{O}_{\overline{K}})$ relevant la suite (x_n). Alors, pour tout entier n, $[p^n]_{E(H)}\hat{x}_n$ relève $0 \in H(\mathfrak{O}_{\overline{K}})$ et définit donc un élément de $\omega_{H^*} \otimes \mathfrak{O}_{\overline{K}}$. On constate que la suite $[p^n]_{E(H)}\hat{x}_n$ converge dans $\omega_{H^*} \otimes \mathfrak{O}_p$ et on note $\theta_H(x)$ sa limite.

Si H est le groupe p-divisible attaché à un schéma abélien sur $\mathfrak{O}_K$, ω_{H^*} est le dual du $\mathfrak{O}_K$-module des formes différentielles de seconde espèce (défini comme le quotient de H^1_{dR} par le sous-module des formes différentielles invariantes). Ceci justifie d'appeler cette application θ_H *application périodes de seconde espèce.*

Notons $H(n)$ le noyau de la multiplication par p^n dans H ; c'est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathfrak{O}_K$. Soit ι_n l'inclusion $H(n) \hookrightarrow H$ qui identifie $\omega_{H(n)^*}$ à $\omega_{H^*}/p^n\omega_{H^*}$. On peut relier l'application de périodes θ_H aux homomorphismes $\alpha_{H(n)}$ de la façon suivante (cf. [**12**]).

Lemme 4.2.1. — *Soient $x_n \in H(\mathfrak{O}_p)$ tel que $[p^n]_H x_n = 0$ et $\hat{x}_n \in E(H)(\mathfrak{O}_p)$ qui relève x_n. On a l'égalité $\alpha_{H(n)}(x_n) = \iota_n^*([p^n]_{E(H)}\hat{x}_n)$.*

Preuve. Notons B_n l'anneau $\mathfrak{O}_p/p^n\mathfrak{O}_p$. Les groupes abéliens $\omega_{H(n)^*/\mathfrak{O}_p}(\mathfrak{O}_p)$ et $\omega_{H(n)^*/B_n}(B_n)$ sont égaux, si bien qu'il est loisible, pour démontrer ce lemme, d'étendre les scalaires à B_n. Comme ι_n^* est un isomorphisme sur B_n, il reste à montrer le fait suivant : soit $x \in H(n)(B_n)$ et $\hat{x} \in E(H)(B_n)$ qui relève x. Alors, l'élément $[p^n]_{E(H)}\hat{x}$ de ω_{H^*/B_n} est égal à $\alpha_{H(n)}(x)$.

Comme p est nilpotent dans B_n, on dispose de la description suivante de $E(H)$ ([**23**, 1.8]) : c'est le *push-out* par $\alpha_{H(n)} : H(n) \to \omega_{H(n)^*}$ de la suite exacte

$$0 \to H(n) \to H \xrightarrow{[p^n]_H} H \to 0 \quad .$$

Ainsi, le point $\hat{x}$ est défini par un couple $(a,b) \in H(B_n) \times \omega_{H^*}$ modulo les points de la forme $(\xi, -\alpha_{H(n)}(\xi))$ pour $\xi \in H(n)(B_n)$. Avec ces notations, $\hat{x}$ relève le point $[p^n]_H a$ et $[p^n]_{E(H)}\hat{x} = ([p^n]_H a, p^n b) = ([p^n]_H a, 0)$. Comme on a supposé que $\hat{x}$ relève x, on voit que $[p^n]_{E(H)}\hat{x}$ est donné par le couple $(x,0) \in H(B_n) \times \omega_{H^*}$, lequel couple est dans la même classe que $(0, \alpha_{H(n)}(x))$, d'où le lemme. ∎

Si $\eta : \omega_{H^*} \otimes \mathfrak{O}_p \to \mathfrak{O}_p$ est une forme de seconde espèce et $x \in T_p(H)$, on notera $\int_x \eta$ l'élément $\eta(\theta_H(x))$ de $\mathfrak{O}_p$. S'il est non nul, sa valuation est bien définie et le lemme précédent montre que l'on peut la calculer à un cran fini comme suit.

Lemme 4.2.2. — *Soit $\rho \in \mathbf{Q}_+$ et fixons un entier $n > \rho$. La valuation de $\int_x \eta$ est supérieure ou égale à ρ si et seulement si $p^{n-\rho}\eta(\alpha_{H(n)}(x_n)) = 0$.*

Preuve. En effet, $\int_x \eta$ appartient à $p^\rho\mathfrak{O}_p$ si et seulement si $p^{n-\rho}\int_x \eta = 0 \mod p^n$, soit, en vertu du lemme précédent, $p^{n-\rho}\eta(\alpha_{H(n)}(x_n)) = 0$. ∎

Si G est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathfrak{O}_K$, annulé par p^n, nous conviendrons d'appeler *forme différentielle de seconde espèce* sur G tout homomorphisme $\omega_{G^*} \to \mathfrak{O}_{\overline{K}}/p^n$. L'homomorphisme universel α_G induit de même une application périodes. Si $x \in G(\mathfrak{O}_{\overline{K}})$ et $\eta\colon \omega_{G^*} \to \mathfrak{O}_{\overline{K}}/p^n$ est une forme de seconde espèce, un abus de notations fréquent nous fera noter $\int_x \eta$ pour l'élément $(\eta\circ\alpha_G)(x) \in \mathfrak{O}_{\overline{K}}/p^n$.

4.2.b. Première espèce

Gardons les notations du paragraphe précédent. Soit en outre $\Omega = \Omega^1_{\mathfrak{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{O}_K}$ le module des différentielles de Kähler de $\mathfrak{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{O}_K$. C'est un $\mathfrak{O}_{\overline{K}}$ module de p-torsion, p-divisible [**15**].

Soient $\omega \in \omega_H = \varprojlim \omega_{H(n)}$ une forme différentielle invariante sur H (« de première espèce ») et $x = (x_1, \dots) \in T_p(H)$. On peut considérer x_n comme un $\mathfrak{O}_K$-morphisme de schémas $\operatorname{Spec} \mathfrak{O}_{\overline{K}} \to H(n)$ ce qui nous procure pour tout entier $n \geqslant 1$ un élément $x_n^*\omega \in \Omega$ et finalement une suite $(x_n^*\omega) \in T_p(\Omega)$ que nous noterons $\int_x \omega$. Nous désignerons cette application $T_p(H) \times \omega_H \to T_p(\Omega)$ par *application périodes de première espèce.*

Pour définir la valuation d'un élément de $T_p(\Omega)$, nous utiliserons la convention suivante (cf [**11**, p. 637]) : si $\varpi \in \Omega$, l'ensemble des $x \in \mathfrak{O}_{\overline{K}}$ tels que $x\varpi = 0$ est un idéal principal et on notera $v_p(\varpi)$ l'opposé de la valuation d'un de ses générateurs. Alors, si $\varpi = (\varpi_1, \dots) \in T_p(\Omega)$ la suite $n + v_p(\varpi_n)$ est stationnaire et nous notons $v_p(\varpi)$ sa limite.

Il résulte facilement de cette définition le lemme suivant :

Lemme 4.2.3. — *Soit $\rho \in \mathbf{Q}_+$ et fixons un entier $n > \rho$. Soit $x = (x_1, \dots) \in T_p(H)$ et $\omega \in \omega_H$. Alors, la valuation de $\int_x \omega$ est supérieure ou égale à ρ si et seulement si $p^{n-\rho} x_n^* \omega = 0$.*

Comme dans le cas des formes de seconde espèce, si G est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathfrak{O}_K$, nous appellerons forme différentielle de première espèce une forme différentielle invariante, et l'application périodes de première espèce dans ce contexte est simplement l'évaluation qui associe à $(x, \omega) \in G(\mathfrak{O}_{\overline{K}}) \times \omega_G$ l'élément $x^*\omega \in \Omega$, que nous noterons aussi $\int_x \omega$.

4.3. Application de la théorie de Fontaine [**15**]

Dans ce paragraphe, nous voulons montrer comment, à l'aide de la théorie de Fontaine de la « presque décomposition de Hodge–Tate des groupes finis », on peut évaluer les valuations p-adiques des périodes p-adiques.

Proposition 4.3.1. — *Soient R l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, v la valuation de R, normalisée par $v(p) = 1$ et G un schéma en groupes fini et plat sur* $\operatorname{Spec} R$, *annulé par p^n. Notons $\mathfrak{D}_R$ la différente de R sur $\mathbf{Z}_p$. Soit $f : \omega_{G^*} \to R/p^n$ une application linéaire d'ordre p^n exactement (i.e. $\lambda f = 0$ pour $\lambda \in \overline{R}$ implique $\lambda \in (p^n)$). Il existe $x \in G(\overline{R})$ tel que si $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ vérifie $\lambda f \alpha_G(x) = 0$, alors $v(\lambda) \geqslant n - \frac{1}{p-1} - v(\mathfrak{D}_R)$.*

Preuve. Notons comme Fontaine Ω le module des différentielles de $\overline{R}/R$ dont on rappelle que c'est le $\overline{R}$-module engendré par les éléments $x\,dy$ pour x et y dans $\overline{R}$, avec les relations $x\,dy + y\,dx = d(xy)$ pour tous x et $y \in \overline{R}$ et $dx = 0$ pour tout $x \in R$. Alors, Fontaine construit dans [**15**, §4] une application (qu'il note φ_G)

$$\overline{R} \otimes_{\mathbf{Z}_p} G(\overline{R}) \longrightarrow \overline{R} \otimes_R \omega_{G^*} \oplus \operatorname{Hom}(\omega_G, \Omega)$$

dont la première composante est exactement notre application α_G, prolongée par linéarité. Si a est un élément de $\overline{R}$ tel que $v(a) = \frac{1}{p-1} + v(\mathfrak{D}_R)$, il prouve de plus [**15**, Corollaire, p. 401] que le noyau et le conoyau de φ_G sont annulés par a.

Comme f est d'ordre p^n exactement, il existe $\xi \in \omega_{G^*}$ tel que $f(\xi) \in R/p^n$ est une unité. D'autre part, le résultat de Fontaine implique que $a(\xi, 0)$ appartient à l'image de φ_G et il existe ainsi un élément $\underline{x} = \sum_i \lambda_i \otimes x_i \in \overline{R} \otimes_{\mathbf{Z}_p} G(\overline{R})$ tel que $\varphi_G(\underline{x}) = (a\xi, 0)$, autrement dit

$$\sum_i \lambda_i \alpha_G(x_i) = a\xi \quad .$$

Si la proposition était fausse, il existerait un $\lambda \in \overline{R}$ tel que $v(a\lambda) < n$ mais $\lambda f(\alpha_G(x)) = 0$ pour tout $x \in G(\overline{R})$ et alors,

$$\lambda a f(\xi) = \lambda \left(\sum_i \lambda_i f(\alpha_G(x_i)) \right) = 0 \quad ,$$

ce qui est une contradiction. ■

Remarquons que si G est un groupe de Barsotti–Tate tronqué d'échelon n (par exemple, la p^n-torsion d'un schéma abélien sur R), ω_{G^*} est alors libre sur R/p^n et il existe une application linéaire $\omega_{G^*} \to R/p^n$ d'ordre p^n exactement.

D'autre part, si on note e l'indice de ramification de $R/\mathbf{Z}_p$, la différente $\mathfrak{D}_R$ a une valuation supérieure à $1 - 1/e$ (avec égalité si et seulement si l'extension est modérément ramifiée, cf. [**33**, Prop. 13, p. 67]). Par suite, dès que $e \geqslant p - 1$, $1 - \frac{1}{p-1} - v(\mathfrak{D}_R)$ est négatif ou nul et la proposition précédente ne dit plus rien sur les points d'ordre p. En particulier, la proposition précédente ne dit rien des points d'ordre 2 ! En revanche, elle pourrait permettre de donner une minoration non triviale de la somme des hauteurs des points d'ordre p^n pour un entier n explicite (dépendant de la ramification en p).

Dans le paragraphe suivant, nous utiliserons la théorie de Raynaud des schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ pour obtenir, sous l'hypothèse $e \leqslant p - 1$, un résultat un peu meilleur : il supposera d'une part que la forme différentielle de seconde espèce non nulle (et non pas seulement primitive) ; d'autre part, il donnera une minoration non triviale quand $p = 2$.

4.4. Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ et valuations de périodes

4.4.a. Rappels sur la théorie de Raynaud

Nous rappelons dans ce paragraphe les principales propriétés des « schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ » dont nous aurons besoin. Tous les résultats de ce paragraphe sont dus à Raynaud et sont tirés de [**31**].

Soit R un anneau local complet pour une valuation discrète v, de caractéristique résiduelle p et de caractéristique 0 ; notons $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de R et $k = R/\mathfrak{p}$ le corps résiduel. On note K son corps des fractions et $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. L'anneau R contient $\mathbf{Z}_p$, et donc aussi l'élément $w \in \mathbf{Z}_p \subset R$ défini par Raynaud en [**31**, (17), p. 242]. Rappelons la congruence $w \equiv -p \pmod{p^2}$.

Soit e l'indice de ramification de R sur $\mathbf{Z}_p$. On supposera dans tout ce paragraphe que $e \leqslant p-1$.

Soient $r \geqslant 1$ un entier, $q = p^r$ une puissance de p et $\mathbf{F}$ le corps fini à q éléments. On dit qu'un caractère $\chi : \mathbf{F} \to R^\times$ est *fondamental* si l'application composée $\mathbf{F} \to R^\times \to k$ est un morphisme de corps. Si k contient $\mathbf{F}_q$, ce que l'on supposera désormais, il existe r caractères fondamentaux χ_i, indexés par $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ et vérifiant $\chi_i^p = \chi_{i+1}$.

Un *schéma en groupes en* $\mathbf{F}$*-vectoriels* sur R est un schéma en groupes fini et plat G sur R dont le foncteur associé $h_G : (\mathrm{Sch}/R)^0 \to \mathrm{Ab}$ provient d'un foncteur $h_G : (\mathrm{Sch}/R)^0 \to (\mathbf{F} - \text{vectoriels})$ — autrement dit, c'est un schémas en groupes fini et plat sur R muni d'une action de $\mathbf{F}$.

Soit alors $\mathscr{A} = \mathscr{A}_G$ l'algèbre affine de G et $\mathscr{I}$ l'idéal d'augmentation (définissant l'élément neutre de G). L'action de $\mathbf{F}$ sur G se traduit en une décomposition canonique $\mathscr{I} = \bigoplus_\chi \mathscr{I}_\chi$ de $\mathscr{I}$ indexée par les caractères $\chi : \mathbf{F} \to R^\times$, où $\mathbf{F}$ agit sur $\mathscr{I}_\chi$ *via* le caractère χ. On est amené à n'étudier que les schémas en groupes en $\mathbf{F}$-vectoriels qui vérifient la condition supplémentaire [**31**, p. 246]

$(\star\star)$ Chacun des $\mathscr{I}_\chi$ est un R-module libre de rang 1.

On démontre alors (prop. 1.2.2, p. 247) qu'un R-schéma en groupes en $\mathbf{F}$-vectoriels de rang q vérifie la condition $(\star\star)$. De plus, Raynaud montre (cor. 3.3.7, p. 268) qu'un R-schéma en groupes fini et plat, annulé par p et *simple* est automatiquement un R-schéma en $\mathbf{F}$-vectoriels vérifiant $(\star\star)$ pour un corps fini $\mathbf{F}$-convenable.

Si G/R est un schéma en groupes en $\mathbf{F}$-vectoriels vérifiant cette condition $(\star\star)$, Raynaud donne des équations explicites pour G, la loi d'addition, etc. Plus précisément, il montre qu'il existe r couples (γ_i, δ_i) d'éléments de R, indexés par $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$, vérifiant $\gamma_i\delta_i = w$ et tels que de plus :

– l'algèbre affine de G est $\mathscr{A} = R[X_i, i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}]/(X_i^p - \delta_i X_{i+1} \ ; \ i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z})$;

– le dual de Cartier G^* de G est défini par les couples (δ_i, γ_i) ; notons $\mathscr{A}^*$ son algèbre ;

– l'élément $\lambda \in \mathbf{F}$ agit sur $\mathscr{A}$ (resp. sur $\mathscr{A}^*$) par la formule $[\lambda]^* X_i = \chi_i(\lambda) X_i$ (resp. $[\lambda]^* Y_i = \chi_i(\lambda) Y_i$) ;

– la dualité $G \times G^* \to \mathbf{G}_m = \operatorname{Spec} R[T, T^{-1}]$ est donnée par la formule

$$T \mapsto \sum_{a_i=0}^{p-1} \left(\prod_i X_i^{a_i} \right) \otimes \left(\prod_i Y_i^{a_i} \right),$$

où la somme sera désormais notée $\sum_\chi$, la notation étant motivée par [**31**] ;

– la comultiplication peut aussi être donnée explicitement, mais cela ne nous sera pas nécessaire.

Le module des différentielles de G est engendré sur $\mathscr{A}$ par les dX_i, $i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$, avec les relations $pX_i^{p-1} dX_i = \delta_i dX_{i+1}$. Par conséquent, le module ω_G des différentielles invariantes, qui s'identifie au module des différentielles en l'origine, est donné par

$$\omega_G = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} R/(\delta_{i-1}) \, [dX_i].$$

On déduit enfin de la remarque 3.4.2 de [**31**] qu'un R-schéma en groupes vectoriels défini par les équations $X_i^p = \delta_i X_{i+1}$ est *simple* si et seulement si la suite des $v(\delta_i)$ n'est pas invariante par une permutation circulaire non triviale.

4.4.b. Formes de seconde espèce

Commençons par calculer les formes de seconde espèce. Si $x = (x_i) \in G(\overline{R})$, le morphisme associé par la dualité de Cartier $\varphi_x : G^* \to \mathbf{G}_m$ est donné par la formule

$$T \mapsto \sum_\chi \prod_i x_i^{a_i} \prod_i Y_i^{a_i},$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \alpha_G(x) &= \varphi_x^*(dT/T) = \sum_\chi \left(\prod_i x_i^{a_i} \right) \left(\sum_j a_j Y_j^{a_j - 1} Y_{j+1}^{a_{j+1}} \cdots Y_{i+r-1}^{a_{i+r-1}} \, dY_j \right) \\ &= \sum_i x_i \, [dY_i] \in \omega_{G^*}. \end{aligned}$$

Ce calcul nous permet d'établir le lemme :

Lemme 4.4.1. — *Soient G/R un schéma en groupes fini, plat, annulé par p, simple et $f : \omega_{G^*} \to R/pR$ non nul. On suppose que l'indice de ramification e de R sur $\mathbf{Z}_p$ est inférieur ou égal à $p - 1$. Alors, si $x \in G(\overline{R})$ est non nul et si $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ est tel que $\lambda f \alpha_G(x) = 0$, on a l'inégalité $v(\lambda) > \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

Preuve. Notons $q = \#G$ et soit r l'entier tel que $p^r = q$. Notons aussi $\mathbf{F}$ le corps fini à q éléments. D'après les rappels faits plus haut, G est un schéma en $\mathbf{F}$-vectoriels et est donc défini par des équations $X_i^p = \delta_i X_{i+1}$, avec $\delta_i \in R$, $\gamma_i \in R$ et $\delta_i \gamma_i = w$.

Le point x est défini par les équations $x_i^p = \delta_i x_{i+1}$, d'où on tire

$$x_i^q = \left(\delta_i^{p^{r-1}} \delta_{i+1}^{p^{r-2}} \cdots \delta_{i+r-1}\right) x_i.$$

Comme $x \neq 0$, on a ainsi

$$v(x_i) = \frac{1}{q-1}\left(p^{r-1} v(\delta_i) + \cdots + v(\delta_{i+r-1})\right).$$

Comme $e \leqslant p-1$, on peut interpréter l'expression de $v(x_i)$ en fonction des $v(\delta_i)$ comme un développement p-adique et l'ordre sur les $v(x_i)$ est l'ordre lexicographique sur les $(\delta_i, \dots)$; en particulier, les valuations $v(x_i)$ sont distinctes puisque l'égalité $v(x_i) = v(x_j)$ implique que la suite $(v(\delta_1), \dots)$ est invariante par la permutation circulaire $n \mapsto n + j - i$ et, G étant simple, une telle permutation circulaire est nécessairement triviale.

Notons $\alpha_i \in R/pR$ l'image par f de $[dY_i]$ et ν la valuation de l'annulateur de f, c'est-à-dire l'élément de $\mathbf{Q}$ tel que $\lambda f = 0 \Leftrightarrow v(\lambda) \geqslant \nu$. Ainsi, $v(\alpha_i) \geqslant v(p) - \nu$ pour tout i, et l'égalité est atteinte. Notons j l'unique élément de $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ tel que $v(\alpha_j) = v(p) - \nu$ et $v(x_j)$ minimal. Puisque $\gamma_{j-1}[dY_j] = 0$, on a l'égalité $\gamma_{j-1}\alpha_j = 0$ d'où il ressort que $v(\delta_{j-1}) \leqslant v(p) - \nu$.

Soit $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ tel que $\lambda f \alpha_G(x) = 0$. On a alors $\lambda x_j \alpha_j = 0$, si bien que $v(\lambda) \geqslant \nu - v(x_i)$. On a ainsi

$$\begin{aligned} v(\lambda) &\geqslant \nu - \frac{1}{q-1}\left(p^{r-1} v(\delta_j) + \cdots + p v(\delta_{j+r-2}) + v(\delta_{j+r-1})\right) \\ &\geqslant \nu - \frac{1}{q-1}\left(p^{r-1} v(p) + \cdots + p v(p) + (v(p) - \nu)\right) \\ &\geqslant \nu - \frac{v(p)}{p-1} + \frac{\nu}{q-1} \end{aligned}$$

et comme $\nu \geqslant v(p)/e$ (la plus petite valuation non nulle d'un élément de $R \setminus \{0\}$), on a bien $v(\lambda) > \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$. ∎

Un argument de dévissage nous permet de passer ensuite au cas général :

Proposition 4.4.2. — *Soit G un schéma en groupes fini et plat sur R, annulé par p. On suppose que l'indice de ramification e de R sur $\mathbf{Z}_p$ est inférieur ou égal à $p-1$. Soit $f : \omega_{G^*} \to R/pR$ une application non nulle. Alors, il existe $x \in G(\overline{R})$ tel que si $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ vérifie $\lambda f \alpha_G(x) = 0$, on a l'inégalité $v(\lambda) > \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

Preuve. Notons $\nu = \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha_{H'}"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha_G"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_H"] & 0 \\
& \omega_{H'^*} \arrow[r, "\iota^*"] & \omega_{G^*} \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "f"] & \omega_{H^*} \arrow[r] & 0 \\
& & R/pR & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel H est un schéma en groupes simple. Distinguons deux cas :

– si $f\iota^* \neq 0$, il existe par récurrence un élément $x \in H'$ tel que si $\lambda f \iota^* \alpha_{H'}(x) = 0$, alors $v(\lambda) \geqslant \nu$. Or, on a

$$\lambda f \alpha_G(\iota(x)) = \lambda f \iota^* \alpha_{H'}(x),$$

si bien que $\iota(x)$ convient dans ce cas.

– si $f\iota^* = 0$, l'application f passe au quotient et définit une application $\tilde{f} : \omega_{H^*} \to R/pR$ qui n'est pas nulle. Par conséquent, si $\tilde{x} \in H(\overline{R})$ est non nul et $\lambda \tilde{f} \alpha_H(\tilde{x}) = 0$, on a, d'après le lemme 4.4.1, $v(\lambda) \geqslant \nu$. Soit $x \in G(\overline{R})$ tel que $\pi(x) = \tilde{x} \neq 0$. L'égalité $\lambda f \alpha_G(x) = \lambda \tilde{f} \alpha_H(\tilde{x})$ entraîne que x convient. ■

Remarque 4.4.3. (Comparaison avec la proposition 4.3.1.) Si l'on suppose de plus que la forme de seconde espèce $f : \omega_{G^*} \to R/pR$ est primitive, i.e. que $\lambda f = 0$ implique $\lambda \in pR$, alors on peut appliquer la proposition précédente à $\pi^{e-1} f$, π étant une uniformisante de R et $v(\pi) = 1/e$. On constate alors qu'il existe un point $x \in G(\overline{R})$ tel que si $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ vérifie $\lambda f \alpha_G(x) = 0$, alors on a $v(\lambda) > \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$, ce qui est sensiblement meilleur que le résultat fourni par la proposition 4.3.1 (avec $n = 1$, $v(\mathfrak{D}_R) \geqslant 1 - \frac{1}{e}$). D'ailleurs, même dans le cas non ramifié, la proposition 4.4.2 donne $v(\lambda) > 1 - 1/(p-1)$, alors que la proposition 4.3.1 ne donnait « que » $v(\lambda) \geqslant 1 - 1/(p-1)$.

Les énoncés précédents affirmaient l'existence pour toute forme de seconde espèce non nulle d'un point telle que la période soit presque une unité. Nous pouvons donner un énoncé dual, sous l'hypothèse (nécessaire) que le dual est connexe. La méthode de démonstration oblige de supposer que l'indice de ramification est 1.

Proposition 4.4.4. — *Soit G/R un R-schéma en groupes fini et plat dont le dual est connexe. On suppose que R est absolument non ramifié. Si $x \in G(\overline{R})$ est non nul, il existe une forme de seconde espèce $f : \omega_{G^*} \to R/pR$ telle que pour tout $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$, l'égalité $\lambda f \alpha_G(x) = 0$ entraîne l'inégalité $v(\lambda) > \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

Preuve. Par hypothèse, $\omega_{G^*} \neq 0$. Si G est simple, il suffit d'après le lemme 4.4.1 de choisir une application non nulle $f : \omega_{G^*} \to R/pR$ arbitrairement pour que la conclusion de la proposition soit vraie.

Dans le cas général raisonnons par récurrence en distinguant deux cas. S'il existe un sous-schéma en groupes non nul $H \subset G$ tel que $x \notin H$, notons $\pi : G \to G/H$ la projection et choisissons $f : \omega_{(G/H)^*} \to R/pR$ tel que $\lambda f \alpha_{G/H}(\pi(x)) = 0$ implique $v(\lambda) > (p-2)v(p)/(p-1)$. Alors, on constate l'homomorphisme $\pi^* \circ f : \omega_{G^*} \to R/pR$ satisfait à la conclusion du théorème.

Sinon, x appartient à tout schéma en groupes non nul inclus dans G et appartient en particulier à un schéma en groupes simple G_1 (il n'y a d'ailleurs dans ce cas qu'un unique sous-schéma en groupes simple...). Comme le dual G^* de G est connexe, le dual de G_1 est aussi connexe et la proposition appliquée à G_1 nous fournit $f_1 : \omega_{G_1} \to R/pR$ tel que $\lambda f_1 \alpha_{G_1}(x)$ implique $v(\lambda) > (p-1)v(p)/(p-1)$. D'après le lemme suivant, l'application entre R/pR-espaces vectoriels $\omega_{G_1^*} \to \omega_{G^*}$ est injective et on peut prolonger f_1 en un homomorphisme $f : \omega_{G^*} \to R/pR$, ce qui conclut la démonstration dans ce cas. ∎

LEMME 4.4.5. — *L'homomorphisme naturel $\omega_{G_1^*} \to \omega_{G^*}$ est injectif.*

Preuve. Notons $G_2 = G/G_1$. Comme R est absolument non ramifié, il résulte du premier cas de la proposition 3.2.1 de [**32**] que G, G_1 et G_2 sont des BT_1. Si k est le corps R/pR, les R-modules ω_G, ω_{G_1}, ω_{G_2} (resp. de même avec les groupes duaux) sont des k-espaces vectoriels dont on note d, d_1, d_2 (resp. d^*,...) les dimensions. Or, les noyaux K et K^* des applications $\omega_{G_2} \to \omega_{G_1}$ et $\omega_{G_1^*} \to \omega_{G^*}$ dans les suites exactes

$$\omega_{G_2} \to \omega_G \to \omega_{G_1} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_{G_1^*} \to \omega_{G^*} \to \omega_{G_2^*} \to 0$$

sont des k-espaces vectoriels de dimensions $n = d_2 + d_1 - d$ et $n^* = d_2^* + d_1^* - d^*$. D'après [**18**, Remarque 2.2.2.b)], on a les égalités

$$d + d^* = \operatorname{rg} G, \qquad d_1 + d_1^* = \operatorname{rg} G_1 \qquad \text{et} \qquad d_2 + d_2^* = \operatorname{rg} G_2 \ .$$

Par conséquent, $n + n^* = 0$ et l'application $\omega_{G_1^*} \to \omega_{G^*}$ est injective. ∎

Les résultats précédents sont valables sans hypothèses sur la nature du schéma en groupes. Voici deux exemples où des renseignements supplémentaires sur la géométrie de celui-ci permettent de les raffiner.

LEMME 4.4.6. — *Soit G/R un schéma en groupes fini et plat. Notons $\pi : G \to G^{\text{ét}}$ son quotient étale maximal. Alors, si $x \in G(\overline{R})$ vérifie $\pi(x) \neq 0$, l'égalité $\lambda \alpha_G(x) = 0$ pour $\lambda \in \overline{R}$ implique $\lambda \in p\overline{R}$.*

Preuve. On peut supposer que $x \in G(R)$ et Il suffit de prouver le résultat quand $G = G^{\text{ét}}$; de plus, on peut supposer que $x \in G(R)$ et quitte à prendre un quotient plus petit, on peut aussi supposer que G est engendré par x. Alors, G/R est un schéma en groupes étale de rang p et la théorie de Oort–Tate [**29**] indique que G a pour équation $X^p - X = 0$, son dual a pour équation $Y^p - wY = 0$ et l'application $G \to \omega_{G^*}$ est donnée par $x \mapsto x[dY]$. Or, l'annulateur de $[dY]$ est (p) et x s'identifie à une racine $p-1$–ème de l'unité, si bien que $\lambda\alpha_G(x) = 0$ implique bien $\lambda \in p\overline{R}$. ■

De même, les arguments de l'exemple [**31**, 3.4, p. 271] permettent de traiter plus complètement le cas supersingulier :

Lemme 4.4.7. — *Supposons que G/R est le sous-groupe de p-torsion d'une courbe elliptique sur R de réduction supersingulière ; supposons aussi que R est absolument non ramifié. Soient $x \in G(\overline{R})$ non nul et $\lambda \in \overline{R}$ tels que $\lambda\alpha_G(x) = 0$. Alors on a $v(\lambda) \geqslant (p^2-p-1)/(p^2-1)$.*

Preuve. Pour commencer, remarquons que G est simple, car sinon il admettrait un sous-groupe d'ordre p, lequel serait étale ou toroïdal, conformément à la classification [**29**] des groupes d'ordre p sur une base non ramifiée ; mais ceci est incompatible avec l'hypothèse que la courbe elliptique est supersingulière. Ensuite, comme G est simple et R non ramifié, c'est un groupe en $\mathbf{F}$-vectoriels du type étudié par Raynaud. Il correspond à $r = 2$ ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_{p^2}$) et on a nécessairement $v(\gamma_1) = 0$ et $v(\gamma_2) = 1$ (ou le contraire), car sinon G serait étale ou toroïdal. Par suite, $\lambda\alpha_G(y) = 0$ si et seulement si $y = 0$ ou $v(\lambda) \geqslant (p^2-p-1)/(p^2-1)$. ■

4.4.c. Formes de première espèce

Traitons maintenant le cas des formes de première espèce. Rappelons (cf. [**15**], ou le paragraphe 4.2) qu'elles sont définies comme suit : si $x \in G(\overline{R})$ et $\omega \in \omega_{G/R}$, on considère x comme un morphisme $x : \operatorname{Spec} \overline{R} \to G$, d'où on obtient un élément $\int_x \omega := x^*\omega \in \Omega^1_{\overline{R}/R}$ qui est la « période » voulue.

Lemme 4.4.8. — *Soit G un R-schéma en groupes fini et plat, simple. On suppose que R est absolument non ramifié. Soient $x \in G(\overline{R})$ et $0 \neq \omega \in \omega_{G/R}$ non nuls. Si $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ est tel que $\lambda \int_x \omega = 0$, on a alors l'inégalité $v(\lambda) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

Preuve. Comme dans le paragraphe précédent, G est un schéma en vectoriels auquel les descriptions de Raynaud s'appliquent. Gardons les mêmes notations, de sorte que G est défini par les équations $X_i^p = \delta_i X_{i+1}$. On a calculé $\omega_{G/R} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} (R/\delta_{i-1})[dX_i]$; notons $\omega = \sum \omega_i [dX_i]$ (on considère en fait l'image dans R/δ_{i-1} d'un élément $\omega_i \in R$). Comme $\omega \neq 0$, il existe donc i tel que $\omega_i \neq 0$

(mod p) et $v(\delta_{i-1}) \geqslant 1$. Si $x = (x_i)$, on a les équations $x_i^p = \delta_i x_{i+1}$ et

$$\int_x \omega = \sum_i \omega_i \, dx_i \in \Omega^1_{\overline{R}/R}.$$

On a comme précédemment $x_i^{q-1} = a_i$, où

$$a_i = \delta_i^{p^{r-1}} \delta_{i+1}^{p^{r-2}} \cdots \delta_{i+r-1}.$$

Il n'est pas restrictif de supposer que le corps résiduel de R est algébriquement clos. Alors, x est défini sur l'extension $K' = K(\varpi)$ où $\varpi^{q-1} = p$. Comme $P(x) = X^{q-1} - p$ est un polynôme d'Eisenstein, ϖ engendre l'anneau des entiers de K' et en est une uniformisante. Autrement dit, $R' = R[\varpi]$. Écrivons $a_i = p^{\nu_i} u_i$, où u_i est une unité de R et $\nu_i \geqslant 0$. Comme $q-1$ est premier à p, il existe $u_i^{1/(q-1)} \in R$, si bien que $x_i = \varpi^{\nu_i} v_i$, où v_i est une unité de R. Alors,

$$dx_i = \nu_i \varpi^{\nu_i - 1} v_i \, d\varpi + \varpi^{\nu_i} \, dv_i = \nu_i \varpi^{\nu_i - 1} v_i \, d\varpi$$

puisque $v_i \in R$, soit $dv_i = 0$. L'annulateur de $d\varpi$ dans $\Omega^1_{R'/R}$, et aussi dans $\Omega^1_{\overline{R}/R}$ est alors égal à $P'(\varpi) = (q-1)\varpi^{q-2}$, si bien que l'annulateur de λdx_i est nul si et seulement si $\lambda \nu_i \varpi^{\nu_i - 1} \in (\varpi^{q-2})$. Si p divise ν_i, alors $dx_i = 0$. Si p est premier à ν_i, cela implique $v(\lambda) \geqslant \left(1 - \frac{\nu_i}{q-1}\right) v(p)$.

Remarquons qu'il existe un unique i tel que $v(\delta_{i-1}) = 1$, $\omega_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ et ν_i minimal, soit j cet élément. On a $\lambda \int_x \omega = 0$ si et seulement si $\lambda dx_j = 0$. Or,

$$\nu_j \leqslant p^{r-1} + \cdots + 1 = \frac{q-1}{p-1},$$

si bien que

$$v(\lambda) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p),$$

comme il fallait démontrer. ■

Un dévissage analogue au cas des formes de seconde espèce va nous permettre de passer au cas général :

Proposition 4.4.9. — *Soit G un schéma en groupes fini et plat annulé par p sur R. On suppose que R est absolument non ramifié. Soit $\omega \in \omega_G$ une forme différentielle non nulle. Alors, il existe $x \in G(\overline{R})$ tel que la nullité $\lambda \int_x \omega = 0$ pour $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ implique l'inégalité $v(\lambda) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

Preuve. Considérons comme précédemment une suite exacte

$$0 \to H' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \to 0, \qquad \omega_H \xrightarrow{\pi^*} \omega_G \xrightarrow{\iota^*} \omega_{H'} \to 0,$$

où H est un R schéma en groupes simple.

– Si $\tilde\omega = \iota^*(\omega) \neq 0$, il existe par récurrence $\tilde x \in H'(\overline{R})$ tel que $\lambda \int_{\tilde x} \tilde\omega = 0$ implique $v(\lambda) \geqslant (p-2)v(p)/(p-1)$. Or, on a

$$\int_{\iota(x)} \omega = \iota(x)^*\omega = x^*\iota^*(\omega) = \int_{\tilde x} \tilde\omega,$$

si bien que $\iota(x)$ convient.

– Si $\iota^*(\omega) = 0$, il existe $\tilde\omega \in \omega_H$ tel que $\omega = \pi^*\tilde\omega$. Soit $0 \neq \tilde x \in H(\overline{R})$. Si $\pi(x) = \tilde x$, on a

$$\int_x \omega = x^*\omega = x^*\pi^*\tilde\omega = \int_{\tilde x} \tilde\omega,$$

si bien que x convient, d'après la proposition précédente. ∎

Donnons enfin l'énoncé dual. Il faut cette fois exclure une partie étale :

Proposition 4.4.10. — *Soit G/R un schéma en groupes fini et plat, annulé par p. On suppose que R est absolument non ramifié et que G est connexe. Soit $x \in G(\overline{R})$ non nul. Il existe alors une forme différentielle $\omega \in \omega_{G/R}$ telle que $\lambda \int_x \omega = 0$ pour $\lambda \in \overline{R} \setminus \{0\}$ implique $v(\lambda) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) v(p)$.*

Preuve. Si G est simple, il suffit de choisir une forme différentielle non nulle $\omega \in \omega_G$ (qui est distinct de 0), puis d'appliquer le lemme 4.4.8.

Dans le cas général, soit $H_x \subset G$ le R-schéma en groupes engendré par x (c'est-à-dire le plus petit R-sous-schéma en groupes de G contenant x). Si $H_x \neq G$, il suffit de choisir par récurrence $\omega_x \in \omega_{H_x/R}$ satisfaisant à la conclusion de la proposition pour H_x et x, puis de choisir $\omega \in \omega_{G/R}$ dont la restriction à H_x est égale à ω_x, ce qui est possible, en vertu de la surjectivité de l'homomorphisme $\omega_{G/R} \to \omega_{H_x/R}$

Si $H_x = G$ et que G n'est pas simple, c'est que G contient un sous-groupe simple H tel que $x \notin H$. Alors, l'image $\pi(x)$ de x par la projection $\pi : G \to G/H$ est non nulle, on choisit $\omega \in \omega_{G/H}$ qui convient pour $\pi(x)$ la forme différentielle $\pi^*\omega$ satisfait à la conclusion de la proposition. ∎

Appendices

A.1. Variétés abéliennes de type CM

Dans ce paragraphe, nous voulons montrer comment utiliser la théorie de Raynaud des schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ pour calculer les valuations p-adiques des variétés abéliennes de type CM. Dans le cas où le corps de multiplication est non ramifié en p, nous redémontrons ainsi un résultat de P. Colmez [**11**].

A.1.a. Type CM et schémas en groupes en F-vectoriels

Soient R un anneau de valuation discrète complet, K son corps des fractions que l'on suppose de caractéristique 0, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal et k le corps résiduel fini de caractéristique p. Comme R est supposé complet, R contient l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt sur k et l'on dispose d'une application de Teichmüller : Teich : $k \to R$ qui est multiplicative. De plus R contient l'élément w défini par la formule (17) de [**31**], cf. le paragraphe 4.4.a.

Soient A/R un schéma abélien, G le R-sous-schéma en groupes des points annulés par $[p]$; notons $g = \dim A/R$, si bien que G est fini et plat d'ordre p^{2g} sur R.

On suppose qu'il existe un corps de nombres E, de degré $2g$ sur $\mathbf{Q}$, et une injection $\mathfrak{O}_E \hookrightarrow \mathrm{End}(A/R)$ de l'anneau des entiers de E dans les R-endomorphismes de A. On dispose alors du « type CM » : si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, le corps de multiplication complexe E agit sur $\omega_{A/R} \otimes_K \overline{K}$ via un ensemble Φ de g plongements $\sigma : E \hookrightarrow \overline{K}$ tels que $\Phi \cup \overline{\Phi} = \mathrm{Hom}(E, \overline{K})$. Il n'est pas restrictif de supposer que ces plongements sont définis sur K, quitte à remplacer K par une extension finie.

Soit $(p) = \prod_\alpha \mathfrak{m}_\alpha^{e_\alpha}$ la décomposition de l'idéal $(p) \subset \mathfrak{O}_E$ en idéaux premiers. Notons aussi q_α le cardinal de $\mathfrak{O}_E/\mathfrak{m}_\alpha$; on a la relation $\prod q_\alpha = p^{2g}$. *On suppose désormais que l'extension $E/\mathbf{Q}$ est non ramifiée en p, autrement dit, $e_\alpha = 1$ pour tout α.*

Comme G est annulé par p, on dispose d'une action de $\mathfrak{O}_E/p$ sur G, c'est-à-dire une application $\prod_\alpha \mathbf{F}_{q_\alpha} \to \mathrm{End}(G/R)$. Alors, le groupe G/R se décompose en un produit $\prod G_\alpha$ tel que l'action de $\mathfrak{O}_E$ sur G_α se factorise par $\mathbf{F}_{q_\alpha}$. Ainsi, G_α est un schéma en $\mathbf{F}_{q_\alpha}$-vectoriels, son ordre est supérieur ou égal à q_α, mais alors l'égalité

$$\prod \# G_\alpha = \# G = p^{2g} = \prod q_\alpha$$

implique que l'ordre de G_α est exactement q_α si bien que G_α est justiciable des descriptions de Raynaud. En particulier, l'action de $\mathbf{F}_{q_\alpha}$ sur ω_{G_α} est induite par d_α « caractères fondamentaux » $\mathbf{F}_{q_\alpha} \to R$. Explicitement, si G_α est défini par les équations $X_i^p = \delta_{\alpha,i} X_{i+1}$ (où $i \in \mathbf{Z}/r_\alpha\mathbf{Z}$, $q_\alpha = p^{r_\alpha}$ et $\delta_{\alpha,i} \in R$ est tel que $w/\delta_{\alpha,i} \in R$), on a la description suivante de $\omega_{G_\alpha/R}$ (cf. le paragraphe 4.4.a) :

$$\omega_{G_\alpha/R} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/r_\alpha\mathbf{Z}} (R/\delta_{\alpha,i-1})\,[dX_i].$$

(Comme G_α est en fait le noyau de la multiplication par p dans un groupe p-divisible, on a $v(\delta_{\alpha,i}) \in \{0, v(p)\}$ pour tout i d'après la remarque 1.5.4 de [**31**].)

Rappelons que $\mathbf{F}_{q_\alpha}$ agit sur X_i via le caractère fondamental $\chi_i : \mathbf{F}_{q_\alpha}^\times \to R^\times$; par conséquent, l'action de $\mathbf{F}_{q_\alpha}$ sur ω_{G_α} est à travers les caractères fondamentaux χ_i tels que $v(\delta_{\alpha,i-1}) \neq 0$.

Nous appellerons $\mathbf{F}$-*type* de G_α l'ensemble des caractères fondamentaux qui interviennent dans la représentation de $\mathbf{F}_{q_\alpha}$ sur ω_{G_α}.

Nous allons maintenant comparer le type CM de A et les $\mathbf{F}$-types des G_α.

Proposition A.1.1. — *Soit σ un plongement $E \hookrightarrow K$. Il existe un unique α et un unique caractère fondamental χ_σ de $\mathbf{F}_{q_\alpha}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{O}_E \arrow[r] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathbf{F}_{q_\alpha} \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\chi_\sigma"] & \\
 & R/\mathfrak{p} \arrow[r, "\text{Teich}"] & R
\end{tikzcd}$$

De plus, l'application $\sigma \mapsto \chi_\sigma$ induit une bijection entre les σ tels que $\sigma^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}_\alpha$ et les caractères fondamentaux de $\mathbf{F}_{q_\alpha}$ qui fait se correspondre le type CM de A et la réunion des $\mathbf{F}$-types des G_α.

Preuve. Comme Teich est une section de la flèche de réduction $R \to R/\mathfrak{p}$, la réduction de χ_σ mod. $\mathfrak{p}$ doit être égale à la flèche pointillée du diagramme laquelle existe *a fortiori*, et donc l'idéal premier $\sigma^{-1}(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{O}_E$ est égal à $\mathfrak{m}_\alpha$. Ayant choisi ainsi l'idéal $\mathfrak{m}_\alpha$, notons $\overline{\sigma}$ la flèche pointillée. La composée $\text{Teich} \circ \overline{\sigma} : \mathbf{F}_{q_\alpha} \to R$ induit une application multiplicative $\mathbf{F}_{q_\alpha}^\times \to R^\times$ car Teich est multiplicative ; c'est donc un caractère χ_σ. Comme de plus, $\chi_\sigma \mod \mathfrak{p} = \overline{\sigma}$, le caractère χ_σ est un caractère fondamental de $\mathbf{F}_{q_\alpha}$.

Comme E est non ramifié en toutes les places divisant p, sa clôture galoisienne $\tilde{E}$ ne l'est pas non plus, cf. [**22**, Corollary, p. 108] et l'application $\sigma \mapsto \chi_\sigma$ est injective. De plus, le fait que E soit non ramifié en p implique l'égalité

$$\#\operatorname{Hom}(E,K) = 2g = \sum_\alpha [\mathbf{F}_{q_\alpha} : \mathbf{F}_p]$$

d'où découle la surjectivité de l'application $\sigma \mapsto \chi_\sigma$.

Finalement, soient $\sigma \in \operatorname{Hom}(E,K)$ et $\omega \in \Omega^1_{A/R}$ tels que $x^*\omega = \sigma(x)\omega$ pour tout $x \in \mathfrak{O}_E$. On a $\omega_{G/R} = \Omega^1_{A/R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $x^*(\omega \otimes 1) = \chi_\sigma(x)(\omega \otimes 1)$. Par conséquent, le type CM de A et les $\mathbf{F}$-types des G_α se correspondent bijectivement par l'application $\sigma \mapsto \chi_\sigma$. ■

A.1.b. Valuations des périodes de première et seconde espèce

Nous calculons dans ce paragraphe les valuations des périodes, toujours dans le cas où le corps de multiplication complexe est non ramifié.

Soient $x \in G_\alpha(\overline{R})$ non nul et $i \in \mathbf{Z}/r_\alpha\mathbf{Z}$. Suivant que $v(\delta_{\alpha,i-1}) = v(p)$ ou est nulle, on dispose de la forme de première espèce $[dX_i]$ ou de celle de seconde espèce $[dY-i]^*$ sur laquelle la multiplication complexe agit par le caractère fondamental χ_i. Nous allons calculer la valuation de l'intégrale sur x de cette forme différentielle.

Si $v(\delta_{\alpha,i-1}) = v(p)$, la forme différentielle de première espèce $dX_i \in \omega_{G_\alpha/R}$ est non nulle. On a $\int_x [dX_i] = dx_i$. Les calculs du paragraphe 4.4.c montrent que $\lambda dx_i = 0$ si et seulement si

$$v(\lambda) \geqslant v(p) - \frac{1}{q-1}\left(\sum_{k=0}^{r_\alpha-1} p^k v(\delta_{i-1-k})\right).$$

Or, nous avons vu que $\sigma \in \Phi$ et $\sigma^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}_\alpha$ si et seulement si $v(\delta_{\alpha,j-1}) \neq 0$, pour $\chi_\sigma = \chi_j$. Par suite, $v(\delta_{i+r_\alpha-1-k}) \neq 0$ si et seulement si χ_{i-k} intervient dans le $\mathbf{F}$-type. Nous avons donc obtenu que la valuation de $\int_x [dX_i]$ est égale à

$$(*) \qquad \frac{1}{q-1} \sum_{\substack{u=0 \\ \chi_{i-u} \in \Phi_\alpha}}^{r_\alpha-1} p^u.$$

D'autre part, si $v(\delta_{\alpha,i-1}) = 0$, c'est la forme différentielle de seconde espèce $[dY_i]^* \in \omega_{G^*_\alpha/R}$ qui est non nulle. On a

$$\int_x [dY_i]^* = [dY_i]^* \alpha_{G_\alpha}(x) = [dY_i]^* \sum x_i [dY_i] = x_i.$$

Ainsi, $\lambda \int_x [dY_i]^*$ si et seulement si $v(\lambda x_i) \geqslant v(p)$, ce qui donne la même expression $(*)$ pour la valuation de la période $\int_x [dY_i]^*$.

Ces calculs nous redonnent ainsi une partie (facile) des résultats de Colmez (à peu de choses près la deuxième formule de la page 658 de [**11**]), sous l'hypothèse restrictive que le corps de multiplication complexe est non ramifié en le nombre premier considéré.

A.2. Une remarque sur la conjecture de Manin

Dans cet appendice, nous expliquons comment les considérations de valuations de périodes permettent d'appréhender la constante de Manin d'une courbe elliptique dite de Weil forte. Cependant, il ne semble pas qu'elles permettent à elles seules de démontrer cette conjecture. On obtient cependant dans la preuve de la proposition qui suit une caractérisation très proche de celle que l'on peut trouver dans les résultats de Raynaud cités dans un article récent d'Abbes–Ullmo sur la question (*À propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires*, à paraître).

Soit $A_{\mathbf{Q}}$ une courbe elliptique *semi-stable* sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N. D'après un théorème d'A. Wiles, $A_{\mathbf{Q}}$ est modulaire et il existe un morphisme $\varphi\colon X_0(N)_{\mathbf{Q}} \to A_{\mathbf{Q}}$ défini sur $\mathbf{Q}$. L'image réciproque par φ d'une différentielle de Néron sur $A_{\mathbf{Q}}$ est un élément de $H^0(X_0(N)_{\mathbf{Q}}, \Omega^1)$, c'est-à-dire une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$, propre pour les opérateurs de Hecke et à coefficients dans $\mathbf{Q}$. On écrit $c_A(q + \sum_{n\geqslant 2} c_n q^n)$ son q-développement en la pointe infinie et la conjecture de Manin est que $|c_A| = 1$ si $A_{\mathbf{Q}}$ est une « courbe de Weil forte ».

Notons $J_0(N)$ le modèle de Néron sur $\mathbf{Z}$ de $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$, la jacobienne de $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$; soit aussi $X_0(N)$ le modèle minimal régulier sur $\mathbf{Z}$ de $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$. On déduit de $\varphi\colon X_0(N)_{\mathbf{Q}} \to A_{\mathbf{Q}}$ un morphisme $\varphi\colon J_0(N) \to A$, où A est le modèle de Néron de $A_{\mathbf{Q}}$. Comme $A_{\mathbf{Q}}$ est une courbe de Weil forte, le noyau $K_{\mathbf{Q}}$ de φ est une variété abélienne sur $\mathbf{Q}$.

Lemme A.2.1. — *Soit $\omega \in \Omega^1_{A/\mathbf{Z}}$ une différentielle de Néron. Si p divise c_A, il existe une forme différentielle $\eta \in \Omega^1_{J_0(N)/\mathbf{Z}}$ telle que $\varphi^*\omega = p\eta$.*

Preuve. La propriété universelle des modèles de Néron montre que la paramétrisation $X_0(N)_{\mathbf{Q}} \to A_{\mathbf{Q}}$ se prolonge de manière unique en $X_0(N)^{\text{lisse}} \xrightarrow{i} J_0(N) \xrightarrow{\varphi} A$. D'autre part, $i^*\colon H^0(J_0(N), \Omega^1) \to H^0(X_0(N)^{\text{lisse}}, \Omega^1)$ est un isomorphisme et $H^0(X_0(N)^{\text{lisse}}, \Omega^1) = H^0(X_0(N), \Omega^1)$.

Si p divise c_A, le q–développement de $\varphi^*\omega$ en la pointe ∞ est nul modulo p. Comme $\varphi^*\omega$ est propre pour l'involution d'Atkin–Lehner, laquelle échange les deux pointes, $\varphi^*\omega$ est nul modulo p et il existe $\eta \in \omega_{J_0(N)}$ tel que $\varphi^*\eta = p\beta$, comme annoncé. ∎

Proposition A.2.2 (Mazur). — *Soit p un nombre premier impair. Alors p ne divise pas c_A.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'un nombre premier impair p divise c_A, et rappelons que A est semi-stable en p. On fait dans la suite l'extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}_p$. Notons K le modèle de Néron de $K_{\mathbf{Q}}$.

Supposons d'abord que p ne divise pas N, i.e. que A ait bonne réduction en p. Le diagramme du serpent attaché à la multiplication par p dans la suite exacte $0 \to K_{\mathbf{Q}} \to J_0(N)_{\mathbf{Q}} \to A_{\mathbf{Q}} \to 0$, joint au fait que $K_{\mathbf{Q}}$ est une variété abélienne implique que φ induit une surjection $J_0(N)[p](\overline{\mathbf{Q}_p}) \to A[p](\overline{\mathbf{Q}_p})$. Soit $x \in A[p](\overline{\mathbf{Z}_p})$. Il existe donc $y \in J_0(N)[p](\overline{\mathbf{Z}_p})$ tel que $\varphi(y) = x$ et

$$\int_x \omega = \int_{\varphi(y)} \omega = \int_y \varphi^*\omega = p \int_y \eta = 0$$

puisque $[p]y = 0$. Mais $0 \neq \omega \in \omega_{A[p]}$, et ceci contredit la proposition 4.4.9 car $1/(p-1) < 1$.

Supposons maintenant que p divise N, i.e. que A ait mauvaise réduction semi-stable en p. Les sous-schémas en groupes $A[p]$ (resp. $J_0(N)[p]$, $K[p]$) noyaux de la multiplication par p dans A (resp. $J_0(N)$, K) sont alors plats et quasi-finis sur $\mathbf{Z}_p$. Ils possèdent une partie finie $A[p]^f$ (resp....) et une partie étale $A[p]'$ (resp....) dont la fibre spéciale est vide. De plus les applications $K[p] \to J_0(N)[p] \to A[p]$ se factorisent en des applications correspondantes sur les parties finies qui sont des schémas en groupes finis et plats sur $\mathbf{Z}_p$. Notons $A[p]^0$ (resp....) les parties connexes de $A[p]^f$,...

Appliquant la proposition 4.4.10 à $A[p]^0$, le même argument que dans le cas de bonne réduction nous ramène à prouver que l'image de $J_0(N)[p]^0_{\mathbf{Q}_p}$ dans $A[p]^0_{\mathbf{Q}_p}$ est non nulle. Or, l'application $J_0(N)[p]'_{\mathbf{Q}_p} \to A[p]'_{\mathbf{Q}_p}$ est injective car il ne peut exister d'application non triviale d'un $\mathbf{Z}_p$-schéma en groupes étale vers un $\mathbf{Z}_p$-schéma en groupes connexe que si $p = 2$. Le diagramme du serpent attaché à l'application $J_0(N)[p] \to A[p]$ et aux suites exactes composante connexe/quotient étale de $J_0(N)[p]^f$ et $A[p]^f$ entraîne alors que l'application $J_0(N)[p]^0_{\mathbf{Q}_p} \to A[p]^0_{\mathbf{Q}_p}$ est surjective. ■

Bibliographie

[EGA 2] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique,* Pub. Math. I.H.E.S **11**.

[SGA 7] A. Grothendieck et al., *Séminaire de géométrie algébrique : groupes de monodromie en géométrie algébrique,* Lecture Notes in mathematics **288** et **340**, Springer, 1972-73.

[1] D. Bertrand, « Mimimal heights and polarizations on group varieties », *preprint* IHES, 93/55.

[2] ———, « 1-Motifs et relations d'orthogonalité dans les groupes de Mordell–Weil », Groupe d'étude sur les problèmes diophantiens, *Pub. Math. de l'Univ. Pierre et Marie Curie,* **108**, n^{o} 2.

[3] J-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, « Heights of projective varieties and positive Green forms », *J. Amer. Math. Soc.* **7**, 1994, pp. 903–1027.

[4] G. Call, J. Silverman, « Canonical heights on varieties with morphisms », *Compositio Math.* **89**, 1993, pp. 163–205.

[5] A. Chambert-Loir, « Extension universelle et hauteurs », *C.R.A.S.,* **318**, juin 1994, pp. 1067–1070.

[6] ———, « Extension universelle d'une variété abélienne et hauteurs des points de torsion », *Compositio Math.,* à paraître.

[7] P. Cohen, « Heights of torsion points on commutative group varieties », *Proc. London Math. Soc.,* **52**, 1986, pp. 427–444.

[8] ———, « Heights of torsion points on commutative group varieties II », *Proc. London Math. Soc.,* **62**, 1991, pp. 99–120.

[9] R. Coleman, « Hodge-Tate periods and p-adic abelian integrals », *Invent. Math.,* **78**, 1984, pp. 351–379.

[10] P. Colmez, « Périodes p-adiques des variétés abéliennes », *Math. Ann.,* **292**, 1992, pp. 629–644.

[11] ———, « Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe », *Ann. of Math.,* **138**, 1993, pp. 625–683.

[12] R. Crew, « Universal extensions and p-adic periods of elliptic curves », *Compos. Math.,* **73**, 1990, pp. 107–119.

[13] G. Faltings, G. Wüstholz, « Einbettungen kommutativer algebraischer Gruppen und einige ihrer Eigenschaften », *J. reine u. ang. Math.,* 1986, pp. 175–205.

[14] ———, *Rational points,* Séminaire Bonn 1983/1984, Vieweg, 1985.

[15] J.-M. Fontaine, « Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux », *Inv. Math.* **65**, 1982, pp. 379–409.

[16] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* Wiley-Interscience, 1978.

[17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer.

[18] L. Illusie, « Déformations des groupes de Barsotti–Tate, d'après Grothendieck », in *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell,* Astérisque **127**, 1985, pp. 29–87.

[19] O. Jacquinot, K. A. Ribet, « Deficient points on extensions of Abelian varieties by $\mathbf{G}_m$ », *Journal of number theory,* **25**, 1987, pp. 133–151.

[20] S. Lang, *Fundamentals of diophantine geometry,* Springer, 1983.

[21] M. Laurent, « Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques », *J. reine u. ang. Math.,* **316**, 1980, pp. 122–139.

[22] D. A. Marcus, *Number Fields,* Universitext, Springer, 1977.

[23] B. Mazur, W. Messing, *Universal Extensions and One Dimensional Crystalline Cohomology,* Lecture Notes in Mathematics **370**, Springer, 1976.

[24] W. Messing, *The Crystals associated to Barsotti-Tate groups: with Applications to Abelian Schemes,* Lecture Notes in Mathematics **345**, Springer, 1976.

[25] J.S. Milne, *Étale Cohomology,* Princeton University Press, **33**, 1980.

[26] L. Moret-Bailly, « Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbf{P}^1$, I. Descente des polarisations », in *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux,* L. Szpiro *ed.,* Astérisque **86**, 1981, pp. 109–124.

[27] ———, « Métriques permises », in *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell,* Astérisque **127**, 1985, pp. 29–87.

[28] ———, *Pinceaux de variétés abéliennes,* Astérisque **129**, 1985.

[29] F. Oort, J. Tate, « Group schemes of prime order », *Ann. Sci. E.N.S.,* **3,** 1970, pp. 1–21.

[30] M. Raynaud, « Exposé VII », in *Schémas abéliens,* Séminaire Orsay 1967/1968.

[31] ———, « Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ », *Bull. S.M.F.,* **102**, 1974, pp. 241–280.

[32] ———, « Hauteurs et isogénies », in *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell,* Astérisque **127**, 1985, pp. 199–234.

[33] J-P. Serre, *Corps locaux,* Hermann, 1968.

[34] ———, « Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs », in *Nombres transcendants et groupes algébriques,* M. Waldschmidt, Astérisque **69–70**, 1979, pp. 191–202.

[35] ———, *Lectures on the Mordell–Weil theorem,* Aspects of mathematics, **15**, Vieweg, 1990.

[36] L. Szpiro, « Degrés, intersections, hauteurs », in *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell,* Astérisque **127**, 1985, pp. 11–28.

[37] J. Tate, « p-divisible groups », in *Proceedings of a Conference on Local Fields,* Driebergen, 1967, pp. 158–183.

[38] S. Zhang, « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc.,* **8**, 1995, pp. 187–221.

[39] ———, « Small points and adelic metrics », *J. Algebraic Geometry,* **4**, 1995, pp. 281–300.

EXTENSIONS VECTORIELLES, PÉRIODES ET HAUTEURS

Antoine CHAMBERT-LOIR

Résumé. — Cette thèse a pour objet l'étude des hauteurs sur certains groupes algébriques commutatifs définis sur des corps de nombres.

Dans un premier chapitre, nous détaillons le cas des extensions de variétés abéliennes par le groupe multiplicatif. Nous construisons, via la théorie d'Arakelov, les hauteurs canoniques attachées à certains diviseurs relativement aux morphismes de multiplication par des entiers. Nous donnons enfin une description des points de hauteur relative nulle.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux extensions vectorielles de variétés abéliennes. Selon la même méthode, nous construisons une hauteur privilégiée sur l'extension. Nous relions enfin les hauteurs des points de torsion au calcul de certaines valuations de périodes p-adiques pour prouver que les points d'ordre premier d'une extension vectorielle non triviale d'une variété abélienne ont des hauteurs non bornées.

Ces valuations sont étudiées au chapitre 4 par deux méthodes différentes : la première utilise la presque-décomposition de Hodge-Tate des schémas en groupes finis et plats établie par Fontaine ; la seconde utilise la théorie des schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ introduite par Raynaud, ainsi que des dévissages.

Abstract. — This thesis is concerned by the height functions on certain commutative algebraic groups defined over number fields.

In a first chapter, we detail the case of an extension of an abelian variety by the multiplicative group. We construct, using Arakelov theory, the canonical heights attached to certain line bundles and to the morphisms of multiplication by an integer. We then give a description of the points whose relative height is zero.

The second and third chapters are devoted to the vectorial extensions of abelian varieties. We construct, along the same lines, some privileged height on such an extension. We then link the heights of torsion points to the valuations of certain p-adic periods to prove that the heights of the points of prime order in a non trivial vectorial extension are not bounded.

These valuations are studied in chapter 4 by two different methods : the first one uses the Hodge-Tate decomposition of finite flat group schemes, established by Fontaine : the second approach uses the $(p, \dots, p)$-type group schemes introduced by Raynaud and some « dévissages ».

Mots clefs. — théorie d'Arakelov — hauteurs — extension universelle — variété abélienne — points de torsion — groupes p-divisibles — périodes — schémas en groupes finis