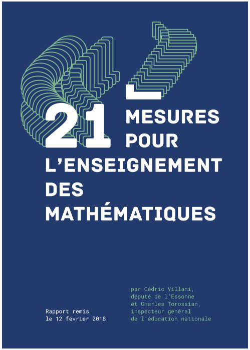
Mathématique et démonstration

Antoine Chambert-Loir

2 octobre 2019

Université Paris-Diderot

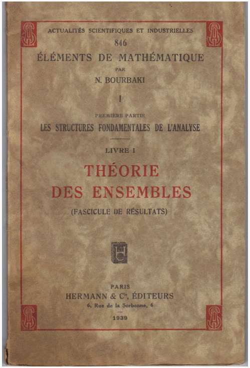
Cédric Villani et Charles Torossian



Il se trouve que l'on peut constater une quasi disparition des « démonstrations » des résultats proposés dans les manuels de collège, par exemple, et dans certaines pratiques de classe. Il serait souhaitable de rééquilibrer ces pratiques en redonnant une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours.

Cédric VILLANI, Charles TOROSSIAN,
21 mesures pour l'enseignement des mathématiques (2018),
p. 27

N. Bourbaki



Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux.

N. Bourbaki, *Théorie des ensembles* (1939), p. I.7

Des mathématiques

Les mathématiques sont une science comme les autres. Elles visent à décrire un certain nombre de phénomènes courants (nombres, formes, évolution, structures).

Sa particularité est de mettre en œuvre une **technique d'idéalisation créative.** Les objets qu'on y définit et étudie ont alors une espèce d'existence autonome ; les vérités qu'on y établit sont par nature intangibles.

« Depuis les Grecs, » le discours mathématique est souvent séparé en deux types d'énoncés :

- **axiomes et définitions,** acceptées a priori ;
- **théorèmes,** qu'il s'agit de justifier par une **démonstration.**

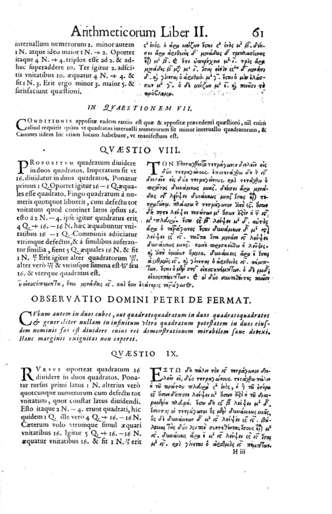
Qu’est-ce qu’une démonstration ?

La démonstration mathématique est le mode de communication qui permet à un ou une mathématicienne de convaincre d’autres de la vérité d’un fait mathématique.

Elle est toujours adaptée au contexte de son énonciation : ses moyens (écrit, oral, tableau,…), le temps et la place qui lui sont offerte, les connaissances des interlocuteurs, leur caractère (patience, attention, enthousiasme, inquiétude,…).

Les critères de valeur sont variés : nouveauté des résultats ou des concepts, correction, concision ou détail, élégance…

Pierre de Fermat / Pal Erdős



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

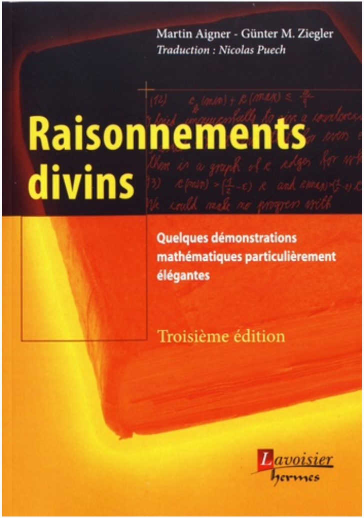
OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

H iii



Qu’est-ce encore qu’une démonstration ?

Notamment dans l’enseignement, on utilise aussi ce mot pour désigner un raisonnement plus ou moins élaboré qu’on présente aux élèves ou exige d’elles et d’eux.

À un niveau plus avancé, ce mot sous-entend que les arguments qui suivent sont complets, corrects — une démonstration ne peut alors pas être fausse.

Dans les deux cas, une démonstration est le résultat d’un processus de l’esprit humain — et donc une démonstration commence toujours par être fausse !

Ce qui la rend correcte, c’est le travail de relecture suspicieuse qu’on lui fait subir. (Et cela prend du temps !)

Preuve par l'exemple. — Expliquer le cas des triangles.

Preuve par intimidation. — « On voit bien que… »

Preuve par agitation vigoureuse des mains. — Très utile en classe ou en séminaire.

Preuve par omission. — « Les 253 autres cas sont analogues. »

Preuve par dessin. — Plus convaincante que la preuve par l'exemple ; se combine bien avec la preuve par omission.

Preuve par assertion véhémente. — Il est utile d'avoir quelque relation d'autorité.

d'après Dana Angluin, *How to prove it* (1983)

Kevin Buzzard

I’m suddenly concerned that all of published math is wrong because mathematicians are not checking the details, and I’ve seen them wrong before.

I think there is a non-zero chance that some of our great castles are built on sand. But I think it’s small.

Je suis soudain inquiet que toutes les maths publiées soient fausses parce que les mathématiciens ne vérifient pas les détails, et je les ai déjà vu se tromper. Je pense qu’il y a une probabilité non nulle que certains de nos grands châteaux soient bâtis sur du sable. Mais je pense qu’elle est faible.

Kevin BUZZARD, cité par Mordechai RORVIG (2019)

There remains but one course for the recovery of a sound and healthy condition — namely, that the entire work of the understanding be commenced afresh, and the mind itself be from the very outset not left to take its own course, but guided at every step; and the business be done as if by machinery.

Il ne reste qu'une possibilité pour retrouver un état raisonnable et sain — que tout le travail de compréhension soit repris à nouveau, et que l'esprit lui-même ne soit pas laissé à sa course propre, mais guidé à chaque pas ; que le processus soit effectué comme par une machine.

Francis BACON, *Novum Organum* (1620), cité par Tom HALES

Preuves assistées/certifiées par ordinateur

Utiliser les ordinateurs pour mécaniser la production et la vérification des démonstrations, de sorte à disposer de preuves absolument certaines.

De nombreux théorèmes ont été vérifiés par ordinateur :

- Coloriage d'un graphe planaire avec 4 couleurs ;
- Théorème de Jordan ;
- Optimalité des empilements de sphères ;
- Résolubilité des groupes d'ordre impair ;
- Indépendance de l'hypothèse du continu…

Fondations

La fin du XIX^e siècle a conduit les mathématiciens à refonder leur pratique (Heine, Hilbert…).

La compréhension de l’infini mathématique (après Cantor) a conduit à mettre en place un système d’axiomes pour la théorie des ensembles (ZFC, pour Zermelo, Fraenkel et *Choix*). Il a servi de fondements à l’essentiel des progrès mathématiques au XX^e siècle.

Au delà de son inévitable incomplétude (Gödel, 1931), ZFC offre deux limites sérieuses : les ensembles de ZFC sont **déstructurés** et **statiques**.

Nouvelles fondations

Les preuves par ordinateur requièrent de nouvelles fondations, **typées** et **dynamiques**, telles qu'elles ont été proposées par Russell (1908), Martin–Löf (1971), Coquand et Huet (1988), Voïevodski (2014)…

Les questions théoriques que posent ces fondations ne sont d'ailleurs pas encore toutes résolues.

Elles demandent aussi, pour être pratiquables, la mise en place d'une infrastructure logicielle complexe (« assistants de preuve »).

On peut aussi penser qu'elles serviront prochainement de méthode d'apprentissage de la démonstration mathématique.