Les mystères de la fonction zêta de Riemann

Antoine Chambert-Loir

Institut de recherche mathématique de Rennes
Université de Rennes 1
Institut universitaire de France

Bibliothèque nationale de France, 23 mars 2011

« Il y a certainement une difficulté toute spéciale à parler devant un grand public sur les choses mathématiques ou même seulement sur les relations générales qui confinent à ce domaine.

« La difficulté résulte de ceci : les conceptions dont nous nous occupons et dont nous étudions la connexion intime sont elles-mêmes le produit d'un travail prolongé de la pensée mathématique et sont très éloignées des pensées qui sont d'usage courant dans la vie.

« Cependant, je n'ai pas hésité à répondre à la mise en demeure dont j'ai eu l'honneur d'être l'objet de la part du Comité de votre Société, qui m'a prié de vous adresser aujourd'hui la parole dans ce discours d'ouverture de son Congrès. (…) »

Félix Klein, 27 septembre 1894

Bernhard Riemann (1826–1866)

- Surfaces de Riemann
- Géométrie riemannienne
- Intégrale de Riemann
- Fonction zêta de Riemann
- Hypothèse de Riemann...

Bernhard Riemann

Né en 1826 près de Hanovre (Allemagne).

Étudie avec Gauss à Göttingen de 1849 à 1851.

Dans sa thèse (1851), il développe l'**analyse complexe** (inventée par Cauchy) et invente les surfaces de Riemann.

En 1854, il crée la **géométrie riemannienne** qui est l'étude des « espaces courbes » ; elle permettra à Einstein de formuler la relativité générale (1916).

Novembre 1859 : **Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse**, Monatsberichte der Berliner Akademie.

Meurt de la tuberculose en 1866, en Italie.


GERMANY
Philad. Published by M. Carey & Son 1820
GERMAN OCEAN
OR
NORTH SEA
BALTIC OR EAST SEA
KING DOM OF PRUSSIA
KINGDOM OF POLAND
HOLSTEIN
LOWER SAXONY
MECKLENBURG
POMERANIA
UPPER SAXONY
BRANDENBURG
HANOVER
WESTPHALIA
MUNSTER
BERG
CASSEL
WETERAVIA
THURINGIA
MISNIA
SAXONY
SILESIA
VOIGTLAND
FRANCONIA
BOHEMIA
MORAVIA
BAVARIA
SWABIA
WIRTENBERG
LORRAINE
FRANCE
SWITZERLAND
PART of the K. of SARDINIA
ITALY
AUSTRIA
CARINTHIA
STYRIA
CARNIOLA
HUNGARY
GALLICIA
GERMAN STATES
ENGLAND
ZUYDER ZEE
AMSTERDAM
PRAGUE
DRESDEN
GULF OF VENICE
British Miles
Longitude East from London

Bericht

über die

zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuſs. Akademie der Wissenschaften zu Berlin

im Monat November 1859.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Encke.

3. Nov. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Steiner las über einige allgemeine Bestimmungsarten der Curven und Flächen zweiter Ordnung und daraus folgenden Sätzen.

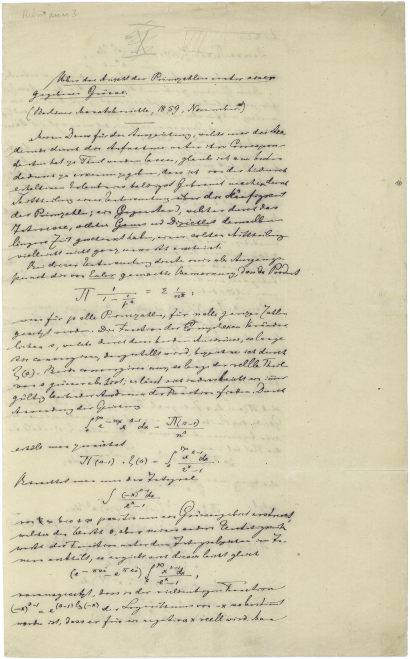
Hierauf trug Hr. Kummer folgende von Hrn. Riemann, Correspondenten der Akademie, mittelst eines an den Sekretar Hrn. Encke gerichteten Schreibens vom 19. October d. J eingesandte Mittheilung „über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröſse" vor:

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, daſs ich von der hiedurch erhaltenen Erlaubniſs baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, daſs das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

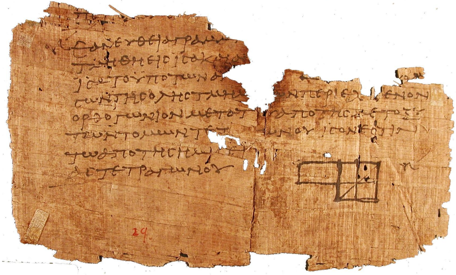
[1859.] 48



Acte I. Euclide

Les *Éléments* d'Euclide

Traité systématique de géométrie et d'arithmétique (300 av. J.-C.).



Papyrus d'Oxyrhynque (environ 100 ap. J.-C.)

Influence immense sur la science mathématique occidentale
Un des premiers livres imprimés (Venise, 1482).

Nombres premiers

Un nombre entier est appelé un ***nombre premier***
s'il est plus grand que 2
et si ses seuls diviseurs sont 1 *et lui-même.*

(*Éléments*, Livre VII, Définition 12)

Exemples :

- 2, 3, 5, 7, 11 sont des nombres premiers ;
- 4 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 2 ;
- par convention, 1 n'est pas un nombre premier.

Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2
se décompose en produit de nombres premiers,
d'une seule façon à l'ordre près des facteurs.

Exemples :

- $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$;
- $808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\ldots$
  $\ldots 757\,005\,754\,368\,000\,000\,000$
  $= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.

Ératosthène de Cyrène (3e s. av. J.-C.)

- Géographe ; calcule la circonférence de la Terre.
- Calcule aussi la distance de la Terre au Soleil, à la Lune.
- Le **crible d’Ératosthène** est un procédé efficace pour énumérer les nombres premiers.

Crible d'Ératosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 1 n'est pas premier ; on l'efface...

Crible d'Ératosthène

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 2 n'est pas divisible par un entier plus petit, donc est premier ; on l'écrit en rouge, et on va effacer tous ses multiples

Crible d'Ératosthène

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 2 est premier ; on efface maintenant tous ses multiples plus grands : 4, 6,...

Crible d'Ératosthène

	2	3	**4**	5	**6**	7	**8**	9	**10**
11	**12**	13	**14**	15	**16**	17	**18**	19	**20**
21	**22**	23	**24**	25	**26**	27	**28**	29	**30**
31	**32**	33	**34**	35	**36**	37	**38**	39	**40**
41	**42**	43	**44**	45	**46**	47	**48**	49	**50**
51	**52**	53	**54**	55	**56**	57	**58**	59	**60**
61	**62**	63	**64**	65	**66**	67	**68**	69	**70**
71	**72**	73	**74**	75	**76**	77	**78**	79	**80**
81	**82**	83	**84**	85	**86**	87	**88**	89	**90**
91	**92**	93	**94**	95	**96**	97	**98**	99	**100**

Le nombre 3 est alors le plus petit nombre pas effacé parmi ceux qui restent ; il est donc premier...

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

... et on efface ses multiples : 6, 9,... : observer que les multiples pairs étaient déjà effacés.

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	5	6	7	8	**9**	10
11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	**27**	28	29	30
31	32	**33**	34	35	36	37	38	**39**	40
41	42	43	44	**45**	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	**57**	58	59	60
61	62	**63**	64	65	66	67	68	**69**	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	**87**	88	89	90
91	92	**93**	94	95	96	97	98	**99**	100

Le nombre 5 est premier ;

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 5 est premier ; le premier multiple qui n'est pas encore effacé est $5^2 = 25$...

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	30
31	32	33	34	**35**	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	60
61	62	63	64	**65**	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	**85**	86	87	88	89	90
91	92	93	94	**95**	96	97	98	99	100

Le nombre 7 est premier ;

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 7 est premier ; le premier multiple qui n'est pas encore effacé est $7^2 = 49$, puis $7 \cdot 11 = 77$,...

Crible d’Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	**49**	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	**77**	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 11 est premier ; comme $11^2 = 121 > 100$, tous ses multiples plus petits que 100 sont effacés !

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 11 est premier ; comme $11^2 = 121 > 100$, tous ses multiples plus petits que 100 sont effacés !

Crible d’Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 13 est premier ; là encore, il n’y a plus rien à effacer.

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 17, et tous ceux qui restent sont premiers :

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre 17, et tous ceux qui restent sont premiers : 19,

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Le nombre 17, et tous ceux qui restent sont premiers : 19, 23, 29,...

Crible d'Ératosthène

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Les nombres en rouge sont les nombres premiers plus petits que 100 ; il y en a 25.

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Soit $N \geqslant 1$ un entier arbitraire, voyons comment démontrer qu'il existe un nombre premier plus grand que N.

On considère le le produit $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ de tous les entiers de 1 jusqu'à N, et on lui ajoute 1.

J'affirme que les facteurs premiers de ce nombre $Q = 1 + P$ sont tous strictement plus grands que N.

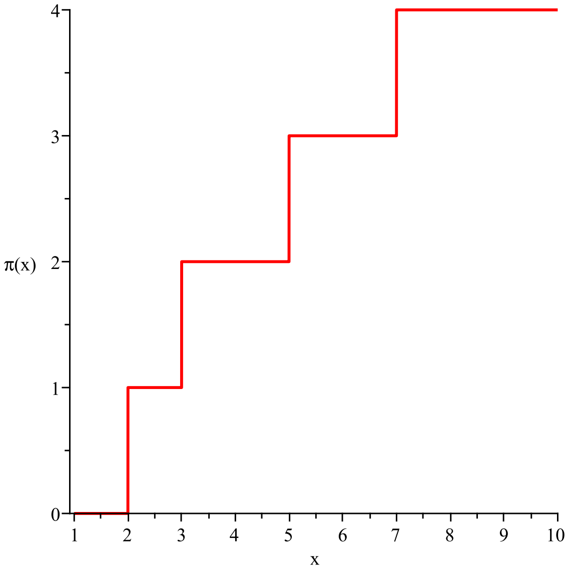
Par l'absurde, soit p un facteur premier de Q tel que $p \leqslant N$. Alors p apparaît dans le produit $P = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N$, donc p divise P ; si p divise aussi Q, p doit diviser la différence $Q - P = 1$, c'est absurde car $p > 1$.

Acte II. Gauss

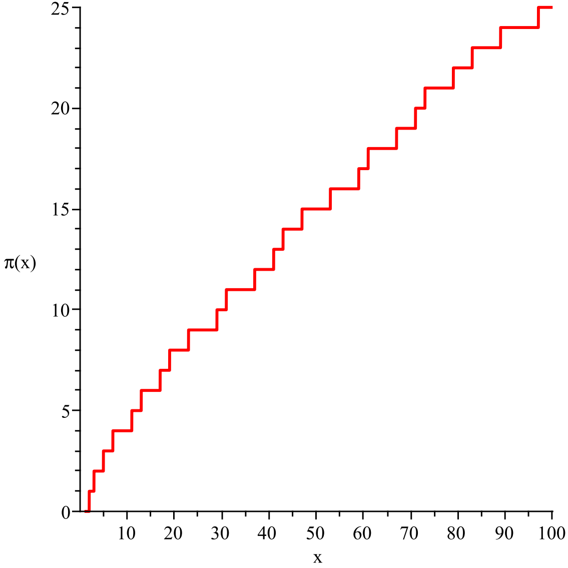
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

- Écrit les **Disquisitiones Arithmeticae** à l'âge de 21 ans
- Calculateur prodigieux
- Astronome : prédit, par des calculs, la position de l'astéroïde Ceres
- Physicien : avec Weber, découvre le magnétisme

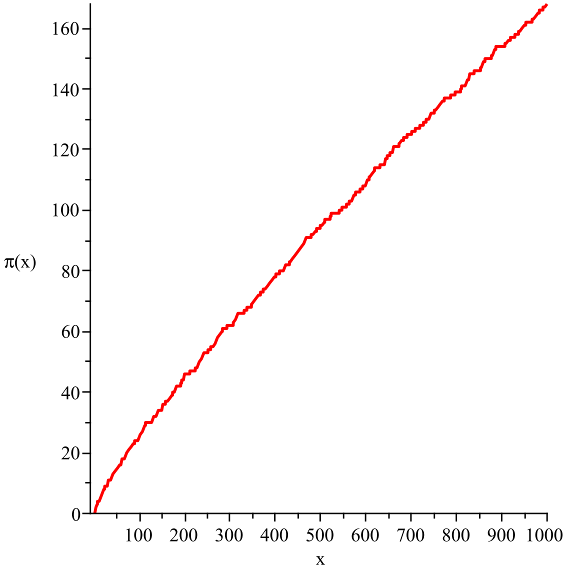
Stairway to heaven



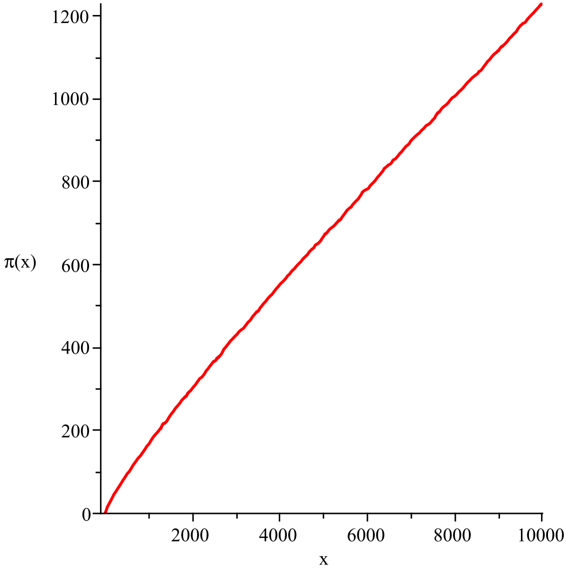
Stairway to heaven



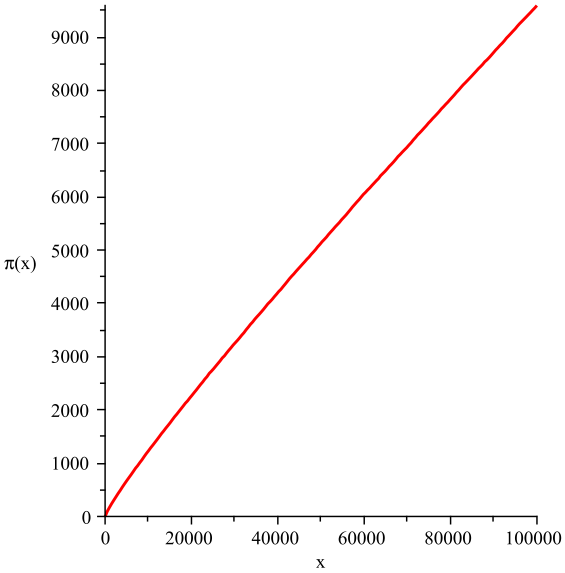
Stairway to heaven



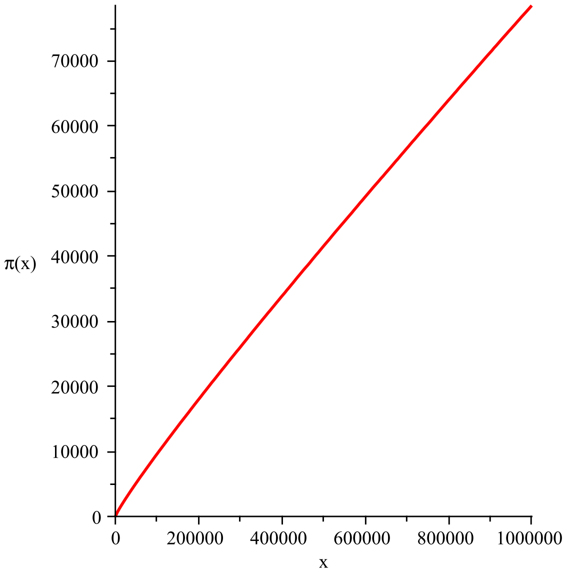
Stairway to heaven



Stairway to heaven



Stairway to heaven



Le théorème des nombres premiers

Gauss observe que la proportion de nombres premiers plus petits qu'un entier N est environ inversement proportionnelle au nombre de chiffres de N.

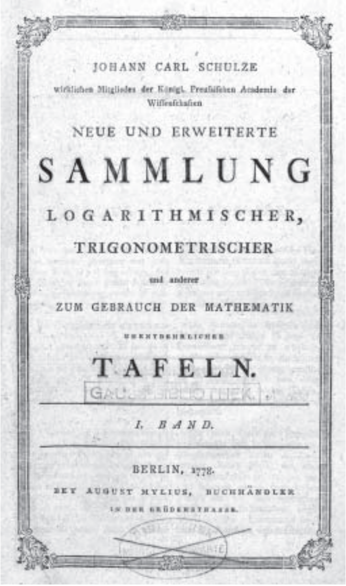
Autrement dit, il prédit la formule :

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\log(N)}$$

En fait, il prédit une formule bien plus précise :

$$\pi(N) \sim \mathrm{Li}(N) = \int_0^N \frac{\mathrm{d}x}{\log(x)}$$

Tables de logarithmes


JOHANN CARL SCHULZE

wirklichen Mitgliedes der Königl. Preußischen Academie der Wissenschaften

NEUE UND ERWEITERTE

SAMMLUNG

LOGARITHMISCHER,

TRIGONOMETRISCHER

und anderer

ZUM GEBRAUCH DER MATHEMATIK

UNENTBEHRLICHEN

TAFELN.

I. BAND.

BERLIN, 1778.

BEY AUGUST MYLIUS, BUCHHÄNDLER

IN DER BRÜDERSTRASSE.

La couverture d'une **table de logarithmes**, offerte par le Duc de Brunswick à Gauss, alors âgé de 14 ans.

Contient les logarithmes décimaux et naturels (avec 7 chiffres significatifs) :

- de tous les entiers jusqu'à 2200 ;
- de tous les nombres premiers jusqu'à 10 009.

Logarithmes

Il est facile et rapide d'additionner ;
une multiplication prend plus de temps.

Inventés par John Napier en 1614, **les logarithmes transforment la multiplication en addition !**

$$\log(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}; \qquad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

Pour multiplier deux nombres :

- déterminer leurs logarithmes en s'aidant de la table ;
- les additionner ;
- déterminer, de nouveau avec la table, de quel nombre cette somme est le logarithme.

Le théorème des nombres premiers

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

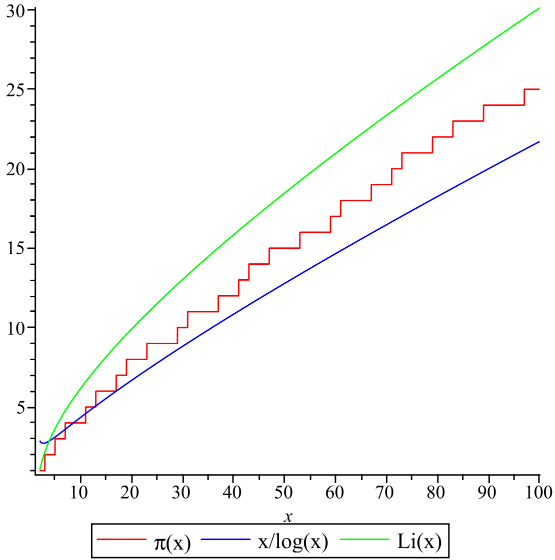
	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	
0	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
1	3	2	2	4	1	3	4	2	2	2	25
2	10	9	9	11	9	6	10	7	15	13	98
3	32	27	29	32	37	35	28	43	30	44	337
4	69	69	73	86	78	88	71	95	85	64	778
5	119	146	138	136	147	136	158	135	140	153	1408
6	197	183	179	176	193	194	195	195	179	187	1878
7	204	201	205	194	189	180	201	188	222	214	1998
8	157	168	168	158	151	170	142	145	132	134	1525
9	115	109	113	112	102	88	96	87	109	103	1034
10	63	52	44	55	58	58	53	67	53	58	561
11	21	18	30	28	23	24	22	24	18	15	223
12	8	9	10	7	7	13	17	9	8	11	99
13	2	4	—	1	5	6	1	2	5	1	27
14	—	3	—	—	—	—	1	—	2	—	6
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
	6874	6857	6849	6787	6766	6804	6762	6714	6744	6705	67862

$$\int_{2000000}^{3000000} \frac{dx}{\log x} = 67915,733$$

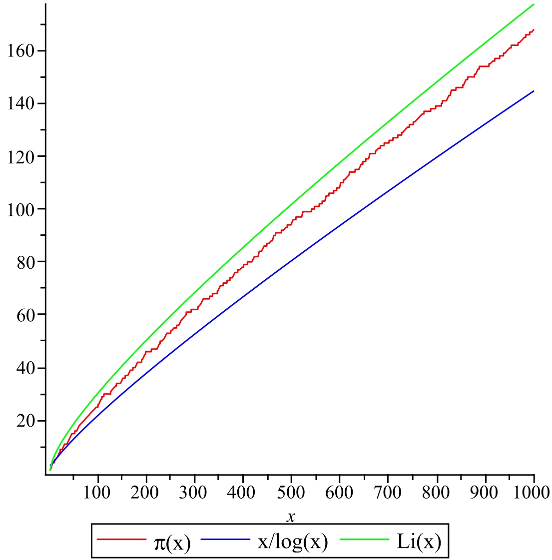
Die 26379te Centade enthält keine Primzahl

Die 27050te Centade enthält 17 Primzahlen.

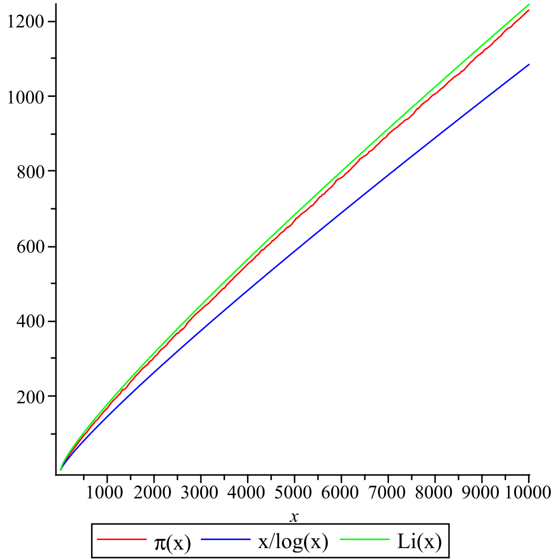
Le théorème des nombres premiers



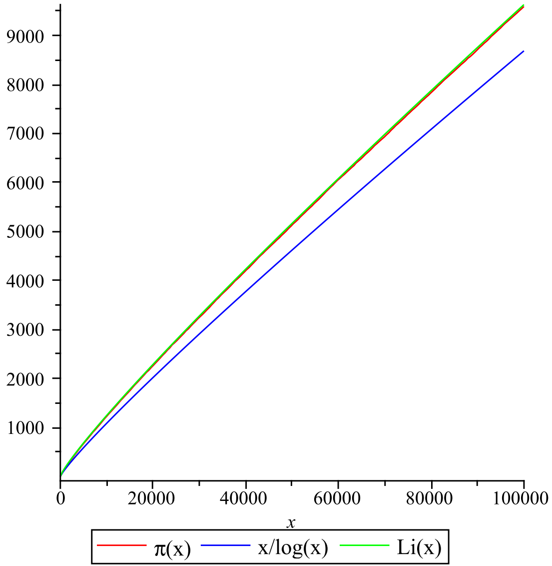
Le théorème des nombres premiers



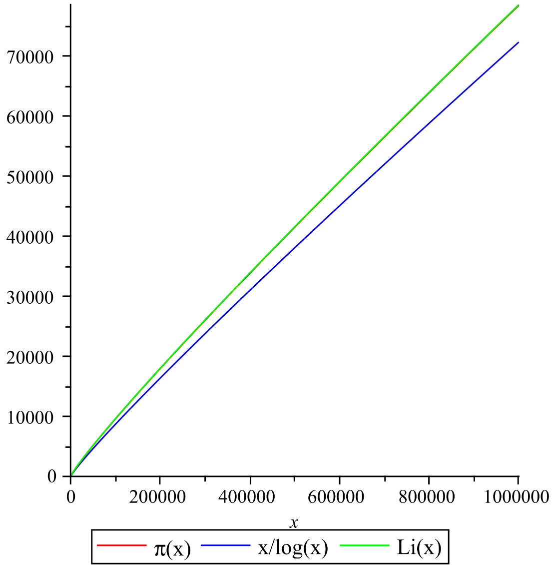
Le théorème des nombres premiers



Le théorème des nombres premiers



Le théorème des nombres premiers



Acte III. Euler

Leonhard Euler, 1707–1783

- Problème de Bâle (1735) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Théorie des nombres
- Théorie des graphes — problème des sept ponts de Königsberg
- Astronomie, optique

Problème de Bâle

Posé en 1644, il demandait de trouver une formule pour la somme **infinie** :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La notation au membre de droite est un raccourci pour « le nombre vers lequel se rapprochent les sommes obtenues en ajoutant de plus en plus de termes du membre de gauche ».

Sommes infinies

Une somme infinie désigne « le nombre vers lequel se rapprochent les sommes obtenues en ajoutant de plus en plus de termes » — quand ce nombre existe.

Par exemple : si x est un nombre réel tel que $|x| < 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

En effet, si on calcule la somme des n premiers termes, on trouve

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

et quand n devient très grand, x^n est aussi petit que l'on veut (car $|x| < 1$).

Problème de Bâle

En 1735, Euler résout ce problème en démontrant que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Plus tard, Euler calcule toutes les sommes

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

où k est un entier strictement positif.

Il calcule aussi, pour $k > 0$, $\zeta(-k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k$, mais la somme à droite n'a pas de sens précis, en tout cas pas au sens des sommes infinies.

ζ et les nombres premiers

Euler découvre aussi un rapport entre ces séries ζ et les nombres premiers : la série infinie $\zeta(k)$ se calcule aussi comme un **produit infini**

$$\begin{aligned}\zeta(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{1-2^{-k}} \times \frac{1}{1-3^{-k}} \times \frac{1}{1-5^{-k}} \cdots \\ &= \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-k}}.\end{aligned}$$

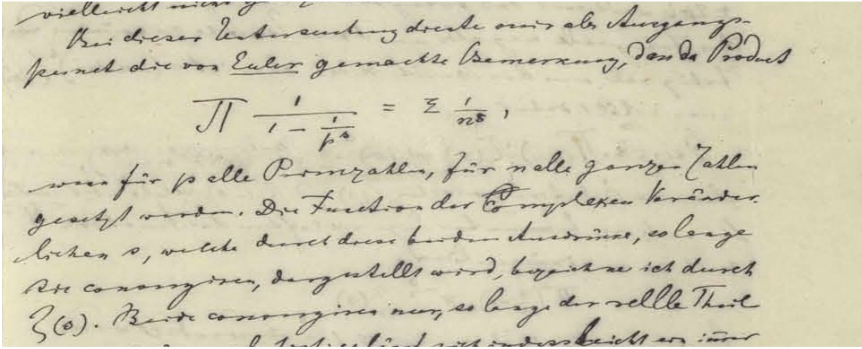
Pafnuty Tchebycheff (1821–1894)

- Premiers résultats dans la direction du théorème des nombres premiers
- Démontre le **postulat de Bertrand :** Pour tout entier $n > 1$, il y a au moins un nombre premier entre n et $2n$
- Utilise la série $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ pour un nombre réel $x > 1$, et plus seulement un nombre entier

La fonction zêta de Riemann

Riemann part de la fonction ζ introduite par Euler et de sa décomposition en produit ;

la variable s'appelle s.


Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil

La fonction zêta de Riemann : nombres complexes

La **première innovation** de Riemann est de considérer la variable s comme un **nombre complexe**.

C'est-à-dire un nombre de la forme

$$s = x + iy$$

où x et y sont des nombres réels, et $i = \sqrt{-1}$.

Formule trigonométrique :

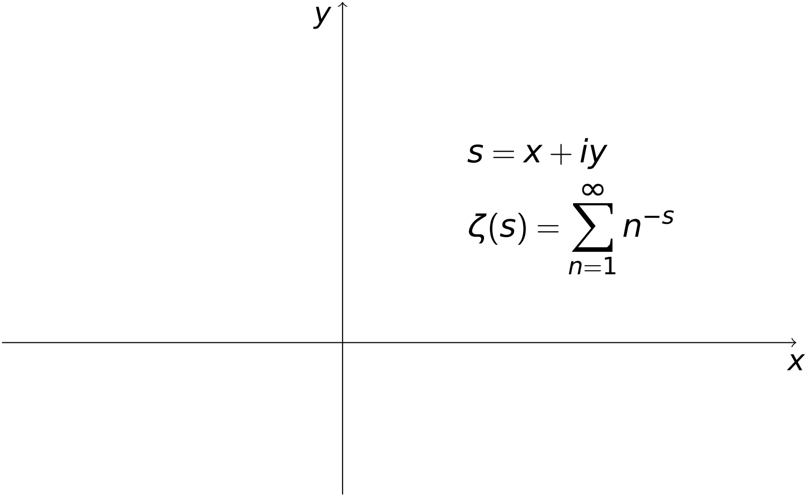
$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^x}\left(\cos(y \log n) - i \sin(y \log n)\right).$$

Les valeurs de $\zeta(s)$ sont donc aussi des nombres complexes.

La fonction zêta de Riemann : prolongement

Deuxième étape : Alors que la formule qui définit $\zeta(s)$ n'a un sens que pour $x > 1$, Riemann démontre que l'on peut définir « naturellement » $\zeta(s)$ pour **tout nombre complexe $s \neq 1$.**

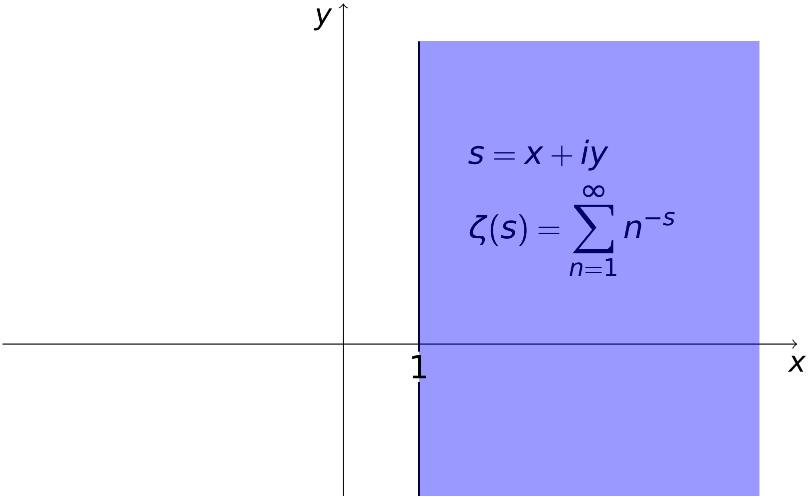
La fonction zêta de Riemann



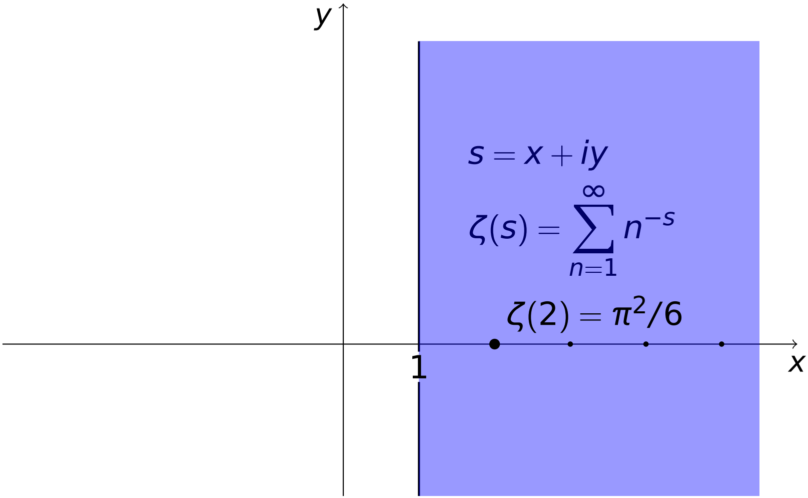
$$s = x + iy$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

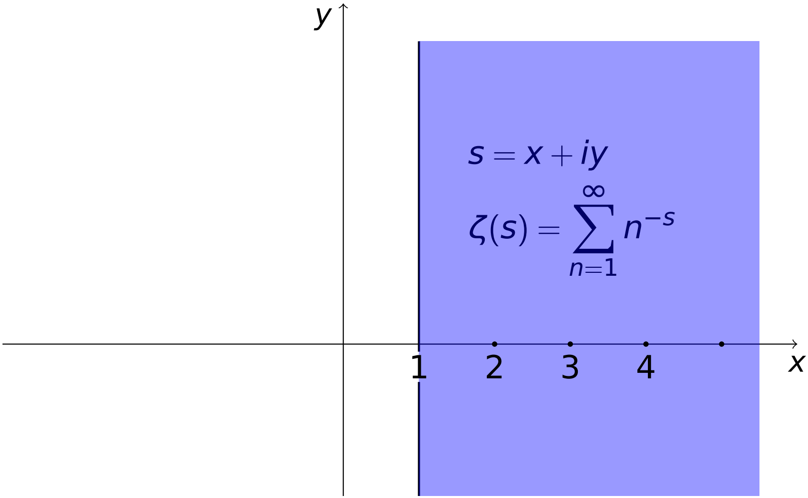
La fonction zêta de Riemann



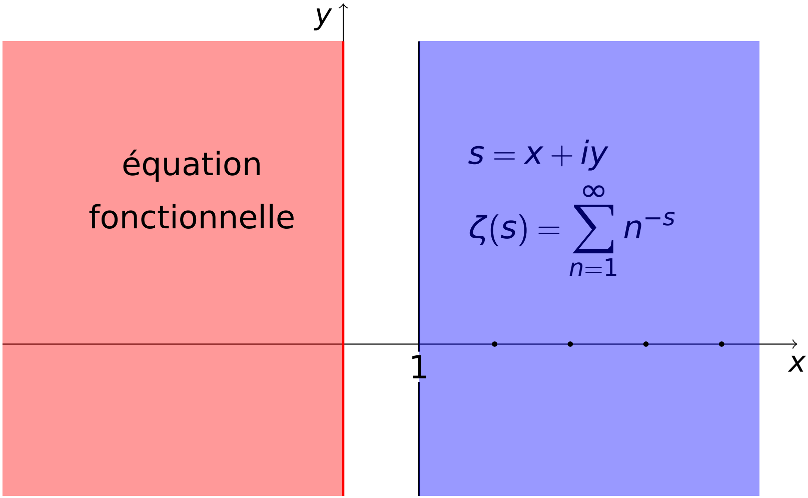
La fonction zêta de Riemann



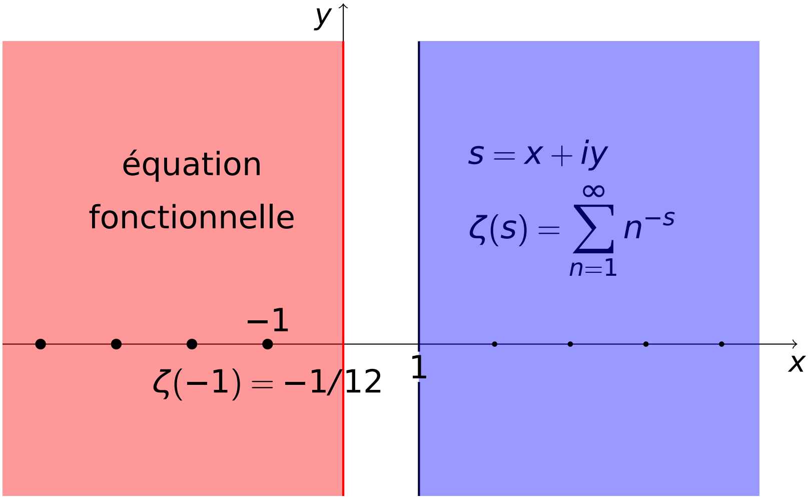
La fonction zêta de Riemann



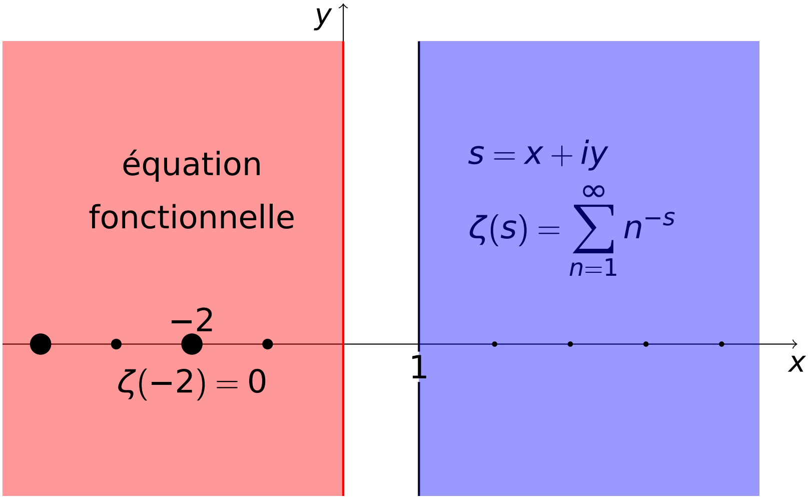
La fonction zêta de Riemann



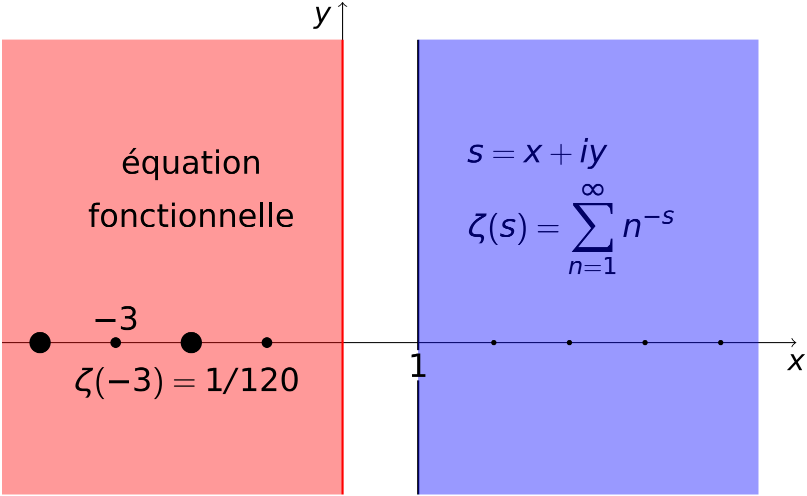
La fonction zêta de Riemann



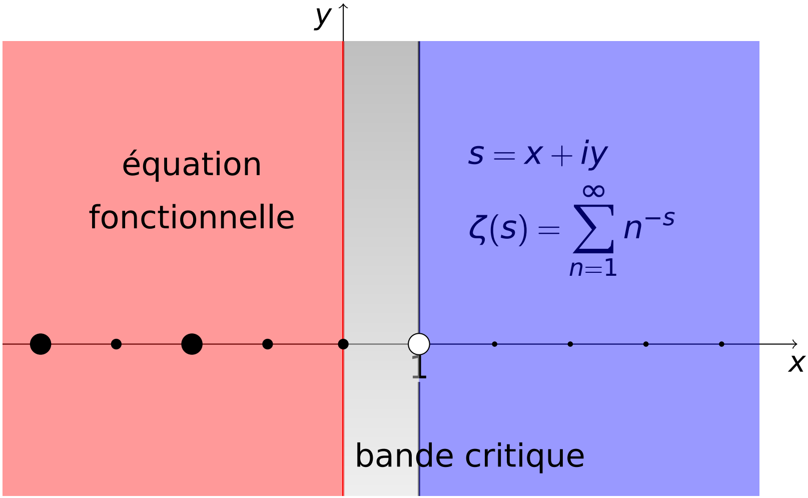
La fonction zêta de Riemann



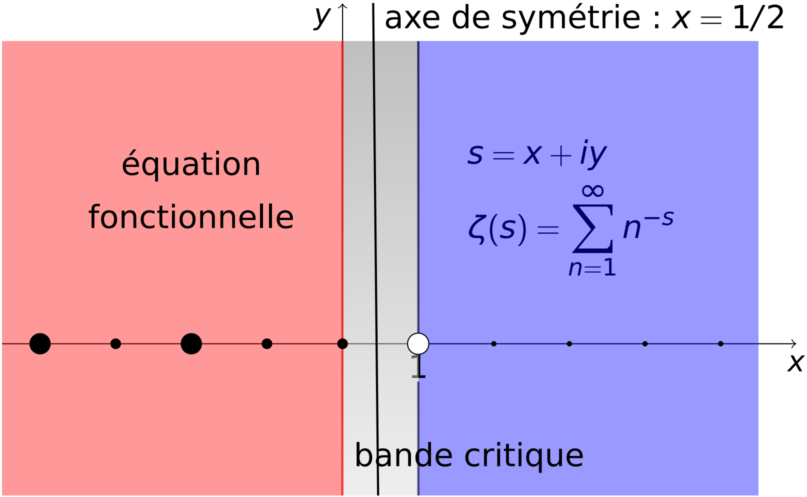
La fonction zêta de Riemann



La fonction zêta de Riemann



La fonction zêta de Riemann



La fonction zêta de Riemann : prolongement

Deuxième étape : Alors que la formule qui définit $\zeta(s)$ n'a un sens que pour $x > 1$, Riemann démontre que l'on peut définir « naturellement » $\zeta(s)$ pour **tout nombre complexe $s \neq 1$.**

Formule intégrale :

$$2\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) = i\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Propriété de **symétrie**, « équation fonctionnelle » :

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\Gamma(s/2)s(s-1)\pi^{-s/2}\,\zeta(s) = \xi(1-s).$$

Zêta et les nombres premiers

Ce lien est donné par la formule d'Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

qui traduit la décomposition en facteurs premiers.
Riemann la récrit

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \text{ premier}} \log \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Zêta et les nombres premiers

En utilisant la formule

$$\log \frac{1}{1-u} = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}u^n,$$

on peut alors écrire

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \text{ premier}} \log \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^s} + g(s),$$

où $g(s)$ est un « terme d'erreur » qui se comporte bien pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.

La fonction zêta de Riemann : zéros

Riemann démontre que la fonction ζ, ou plutôt la fonction ξ, se décompose en produit infini :

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où ρ parcourt l'ensemble des zéros de ξ.

Les zéros de ξ appartiennent à la « bande critique » $0 \leqslant x \leqslant 1$ et sont ceux de ζ dans cette bande.

Riemann énonce, sans preuve, que le nombre $N(T)$ de zéros $\rho = x + iy$ avec $0 \leqslant y \leqslant T$ vérifie

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e}.$$

La formule explicite de Riemann

Riemann reprend la formule pour $\log \zeta(s)$ et introduit la fonction

$$f(T) = \mathrm{Li}(T) - \sum_{\xi(\rho)=0} \mathrm{Li}(T^\rho) + \int_T^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)\log(u)} - \log 2.$$

Il observe que

$$f(T) = \pi(T) + \frac{\pi(T^{1/2})}{2} + \frac{\pi(T^{1/3})}{3} + \dots$$

et en déduit

$$\begin{aligned} \pi(T) &= f(T) - \frac{f(T^{1/2})}{2} - \frac{f(T^{1/3})}{3} - \frac{f(T^{1/5})}{5} + \frac{f(T^{1/6})}{6} + \dots \\ &= \sum_{m=1}^\infty \mu(m) \frac{1}{m} f(T^{1/m}). \end{aligned}$$

L'hypothèse de Riemann

Dans la formule

$$f(T) - \mathrm{Li}(T) = -\sum_{\xi(\rho)=0} \mathrm{Li}(T^{\rho}) + \ldots,$$

les termes $\rho = x + iy$ les plus grands sont ceux pour lesquels x est le plus grand possible.

Comme $0 \leqslant x \leqslant 1$ et que chaque zéro ρ arrive avec son compagnon $1 - \rho$, le terme d'erreur semble donc être au moins de l'ordre de $T^{1/2} \log(T)$.

Hypothèse de Riemann

Tous les zéros de ξ ont pour partie réelle 1/2, c'est-à-dire sont au centre de la bande critique.

Conséquences pour les nombres premiers

Hypothèse de Riemann

Tous les zéros de ξ ont pour partie réelle 1/2, c'est-à-dire sont au centre de la bande critique.

On sait démontrer aujourd'hui que **si** l'hypothèse de Riemann est vraie, alors

$$\pi(T) = \mathrm{Li}(T) + \mathrm{O}\Big(\sqrt{T}\log(T)\Big).$$

Plus généralement, si tous les zéros de ξ ont partie réelle au plus α, alors $\pi(T) = \mathrm{Li}(T) + \mathrm{O}\Big(T^{\alpha}\log(T)\Big)$. Cela ne résout pas la question de Gauss puisque on ne connaît aucun tel α qui vérifie $\alpha < 1$.

Acte V. Après Riemann

Le théorème des nombres premiers

C'est le résultat

$$\pi(T) \sim \frac{T}{\log(T)}, \qquad \text{pour } T \to \infty.$$

Démontré en 1896 par Jacques Hadamard et Charles-Louis de la Vallée Poussin qui prouvent que la fonction ζ n'a pas de zéro de partie réelle égale à 1.

Résultats en faveur de l'hypothèse de Riemann

- En 2004, Gourdon et Demichel ont calculé 10 mille milliards de zéros ; ils sont tous de partie réelle 1/2. Mais la fonction zêta n'oscille pas beaucoup dans le domaine exploré, donc les contre-exemples devraient être beaucoup plus loin.

Résultats en faveur de l'hypothèse de Riemann

- En 2004, Gourdon et Demichel ont calculé 10 mille milliards de zéros ; ils sont tous de partie réelle 1/2. Mais la fonction zêta n'oscille pas beaucoup dans le domaine exploré, donc les contre-exemples devraient être beaucoup plus loin.
- En 1989, Conrey (après Hardy, Selberg et Levinson) a démontré qu'au moins 40% des zéros sont de partie réelle 1/2.

Résultats en faveur de l'hypothèse de Riemann

- En 2004, Gourdon et Demichel ont calculé 10 mille milliards de zéros ; ils sont tous de partie réelle 1/2. Mais la fonction zêta n'oscille pas beaucoup dans le domaine exploré, donc les contre-exemples devraient être beaucoup plus loin.
- En 1989, Conrey (après Hardy, Selberg et Levinson) a démontré qu'au moins 40% des zéros sont de partie réelle 1/2.
- Suite à des observations très mystérieuses sur l'espacement des zéros de la fonction zêta (Montgomery), le physicien Dyson a suggéré un lien avec le spectre des **matrices aléatoires**.

Démontrer l’hypothèse de Riemann ?

- Par une « formule explicite »(qui généralise celle de Riemann), Weil a prouvé que l’hypothèse de Riemann équivaut à la négativité d’une certaine forme quadratique.

Démontrer l'hypothèse de Riemann ?

- Par une « formule explicite »(qui généralise celle de Riemann), Weil a prouvé que l'hypothèse de Riemann équivaut à la négativité d'une certaine forme quadratique.
- Entre 1930 et 1975, Hasse, Weil, Grothendieck, Deligne ont démontré un résultat « analogue » dans un contexte voisin. Cela suggère des pistes d'attaque.

Démontrer l'hypothèse de Riemann ?

- Par une « formule explicite »(qui généralise celle de Riemann), Weil a prouvé que l'hypothèse de Riemann équivaut à la négativité d'une certaine forme quadratique.
- Entre 1930 et 1975, Hasse, Weil, Grothendieck, Deligne ont démontré un résultat « analogue » dans un contexte voisin. Cela suggère des pistes d'attaque.
- Depuis les années 70, Alain Connes a développé une **géométrie non commutative**. Si l'on savait démontrer une « formule des traces »dans ce contexte on en déduirait l'hypothèse de Riemann en l'appliquant à certains « systèmes dynamiques non commutatifs ».

Croire en l’hypothèse de Riemann ?

L’hypothèse de Riemann est extrêmement utile en théorie des nombres : grâce à elle, de nombreux objets mathématiques se comportent de façon aussi régulière que possible.

Jusqu’à présent, aucune des tentatives pour la démontrer n’a abouti.

Pour certains mathématiciens, la meilleure raison d’y croire est que le monde mathématique sera plus harmonieux avec que sans.

Pour en savoir plus

1. **Internet** : on peut trouver de nombreux sites web grâce à Google. Mais attention :

Pour en savoir plus

1. **Internet** : on peut trouver de nombreux sites web grâce à Google. Mais attention :

Pour en savoir plus

1. **Internet** : on peut trouver de nombreux sites web grâce à Google.
2. **Livres en français**

Pour en savoir plus

1. **Internet** : on peut trouver de nombreux sites web grâce à Google.
2. **Livres en français**
   - M. du Sautoy, **La symphonie des nombres premiers**, Points Sciences (2007)
   - J. Derbyshire, **Dans la jungle des nombres premiers**, Dunod (2007)
   - M. Mendès-France, G. Tenenbaum, **Les nombres premiers**, Que Sais-Je ? (2000)
   - G. H. Hardy, E. M. Wright, **Introduction à la théorie des nombres**, Vuibert (2006)
   - N. Berline, C. Sabbah (éditeurs), **La fonction zêta**, Éditions de l'École polytechnique (2000)

Pour en savoir plus

1. **Internet** : on peut trouver de nombreux sites web grâce à Google.
2. **Livres en français**
3. **Livres en anglais**

Pour en savoir plus

1. **Internet** : on peut trouver de nombreux sites web grâce à Google.
2. **Livres en français**
3. **Livres en anglais**
   - E. C. Titschmarsh, D. R. Heath-Brown, **The Theory of the Riemann Zeta-Function**, Oxford University Press, 1987 (422 p.)
   - H. M. Edwards, **Riemann's Zeta Function**, Dover, 2003 (330 p.)
   - A. Ivić, **The Riemann Zeta-function : Theory and Applications**, Dover, 2003 (562 p.)