Évariste Galois, révolutionnaire et géomètre

Antoine Chambert-Loir

Institut de recherche mathématique de Rennes
Université de Rennes 1
Institut universitaire de France

Festival des sciences, Les Champs-Libres
11 octobre 2011

Lettre à Auguste Chevalier.

Paris, le 29 Mai 1832.

8

Mon cher Ami,

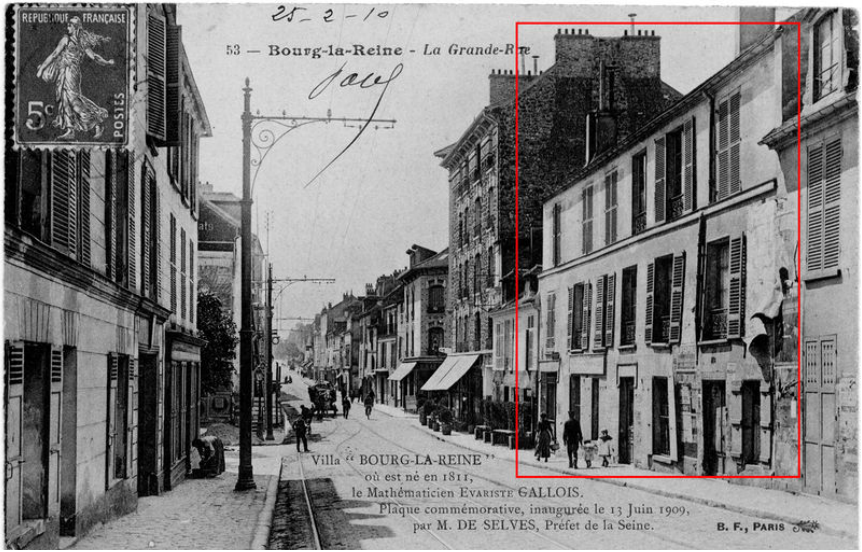
J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la théorie des Équations, les autres les fonctions Intégrales.

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux : ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les ~~transformations~~ possibles sur une équation lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

~~Je commençais de [illegible] que [illegible] [illegible] [illegible] appeler.~~

On pourra faire avec tout cela trois mémoires.


25-2-10
53 — Bourg-la-Reine - La Grande-Rue
REPUBLIQUE FRANÇAISE
5c
POSTES
Villa " BOURG-LA-REINE "
où est né en 1811,
le Mathématicien EVARISTE GALLOIS.
Plaque commémorative, inaugurée le 13 Juin 1909,
par M. DE SELVES, Préfet de la Seine.
B. F., PARIS

Évariste Galois, à l’âge de quinze ans, dessiné par sa sœur


PARIS — Lycée Louis Legrand.
lartnouveau.com


REPUBLIQUE FRANÇAISE
POSTES
8F
DECARIS
1736 LAGRANGE 1813


C.F.GAUSS *1777 †1855
DEUTSCHE
BUNDESPOST
10
H.EIDENBENZ
L.SCHNELL


AUGUSTIN
CAUCHY
1789-1857
REPUBLIQUE FRANÇAISE
$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$
$y = x^2$
LA POSTE 1989
3,60
SAINSON
RAJEWICZ

Une **équation algébrique** est une relation que doit vérifier un nombre x qu'on appelle l'**inconnue**, et ses puissances $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, etc.

La plus grande puissance qui apparaît est appelée le **degré de l'équation**.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses **racines**, c'est-à-dire les valeurs possibles de l'inconnue.

degré 1 :

$$3x = 6$$

degré 2 :

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

degré 5 :

$$x^5 - 2 = 0$$

$$x^5 - 5x + 1 = 0$$

$$3x = 6$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3} 3x = \frac{1}{3} 6$$

$$x = 2$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3}3x = \frac{1}{3}6$$

$$x = 2$$

Équation générale :

$$ax = b$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3}3x = \frac{1}{3}6$$

$$x = 2$$

Équation générale :

$$ax = b$$

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}b$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3} 3x = \frac{1}{3} 6$$

$$x = 2$$

Équation générale :

$$ax = b$$

$$\frac{1}{a} ax = \frac{1}{a} b$$

$$x = b/a$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}$$

Équation générale :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

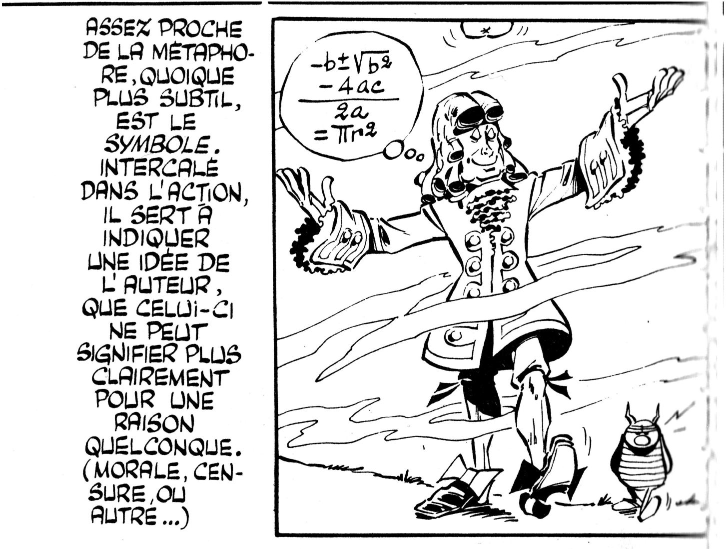
$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}$$

Équation générale :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Marcel Gotlib, *Langage cinématographique,*
Rubrique-à-Brac, tome 3.

Niccolò Fontana, *dit* Tartaglia et Girolamo Cardano

$$x^3 + px + q = 0$$

On introduit une équation auxiliaire, la **résolvante de Lagrange :**

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

et on en calcule une racine :

$$t = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p^3/27}}{2}$$

Alors, les trois racines de l'équation initiale sont

$$x = \sqrt[3]{t} - \frac{p}{3\sqrt[3]{t}},$$

pour les trois racines cubiques possibles de t.

Reprenons une autre équation de degré 2 :

$$x^2 + 1 = 0$$

Reprenons une autre équation de degré 2 :

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Reprenons une autre équation de degré 2 :

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

mais les carrés sont tous positifs, donc il n’y a pas de solution !

Reprenons une autre équation de degré 2 :

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

mais les carrés sont tous positifs, donc il n'y a pas de solution !

On introduit un nombre « imaginaire » qu'on note i est qui est une racine carrée de -1.

Alors, l'équation $x^2 + 1 = 0$ a pour solutions

$$x = i \quad \text{ou} \quad x = -i.$$

Les nombres imaginaires sont fondamentaux pour résoudre les équations algébriques.

Les nombres imaginaires sont fondamentaux pour résoudre les équations algébriques.

Pour résoudre une équation de degré 3 par les formules de Cardan, on est forcé de les utiliser.

Les nombres imaginaires sont fondamentaux pour résoudre les équations algébriques.

Pour résoudre une équation de degré 3 par les formules de Cardan, on est forcé de les utiliser.

Théorème de d'Alembert–Gauss

Une équation algébrique a autant de racines que son degré, à condition de prendre en compte les racines imaginaires.

1826 : Niels Henrik Abel démontre qu'il n'y a pas de formule pour résoudre toutes les équations de degré 5 et plus.

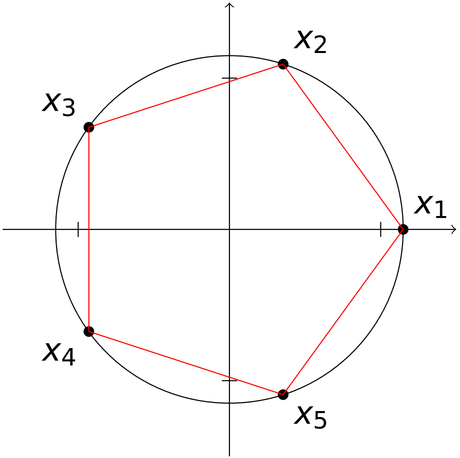
1826 : Niels Henrik Abel démontre qu'il n'y a pas de formule pour résoudre toutes les équations de degré 5 et plus.

Il s'agit de formules ne faisant intervenir que les quatre opérations ($+$, $-$, $\times$, $\div$) et les racines carrées, cubiques, etc. : on parle de **résolution par radicaux**.

Certaines équations sont résolubles par radicaux ; par exemple, les racines de l'équation $x^5 = 2$ sont :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[5]{2} \\
x_2 &= \frac{1}{4}\sqrt[5]{2}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \\
x_3 &= \frac{1}{4}\sqrt[5]{2}\left(-1-\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \\
x_4 &= \frac{1}{4}\sqrt[5]{2}\left(-1-\sqrt{5}-\mathrm{i}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \\
x_5 &= \frac{1}{4}\sqrt[5]{2}\left(-1+\sqrt{5}-\mathrm{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

Ces racines sont les cinq sommets d'un pentagone régulier :



Les **symétries algébriques** de ces racines expliquent que l'on ait pu résoudre l'équation par radicaux.

Eugène Delacroix. *La liberté guidant le peuple* (1830)


ATGET ph. Août 1898
Acq. 6100


Galois
1848
AG.


J.COMBET
REPUBLIQUE
FRANÇAISE
Evariste Galois
1811-1832
postes 1984
révolutionnaire et géomètre
2,10+0,40

Tu [redacted] prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion. E. Galois. Le 29 Mai 1832.