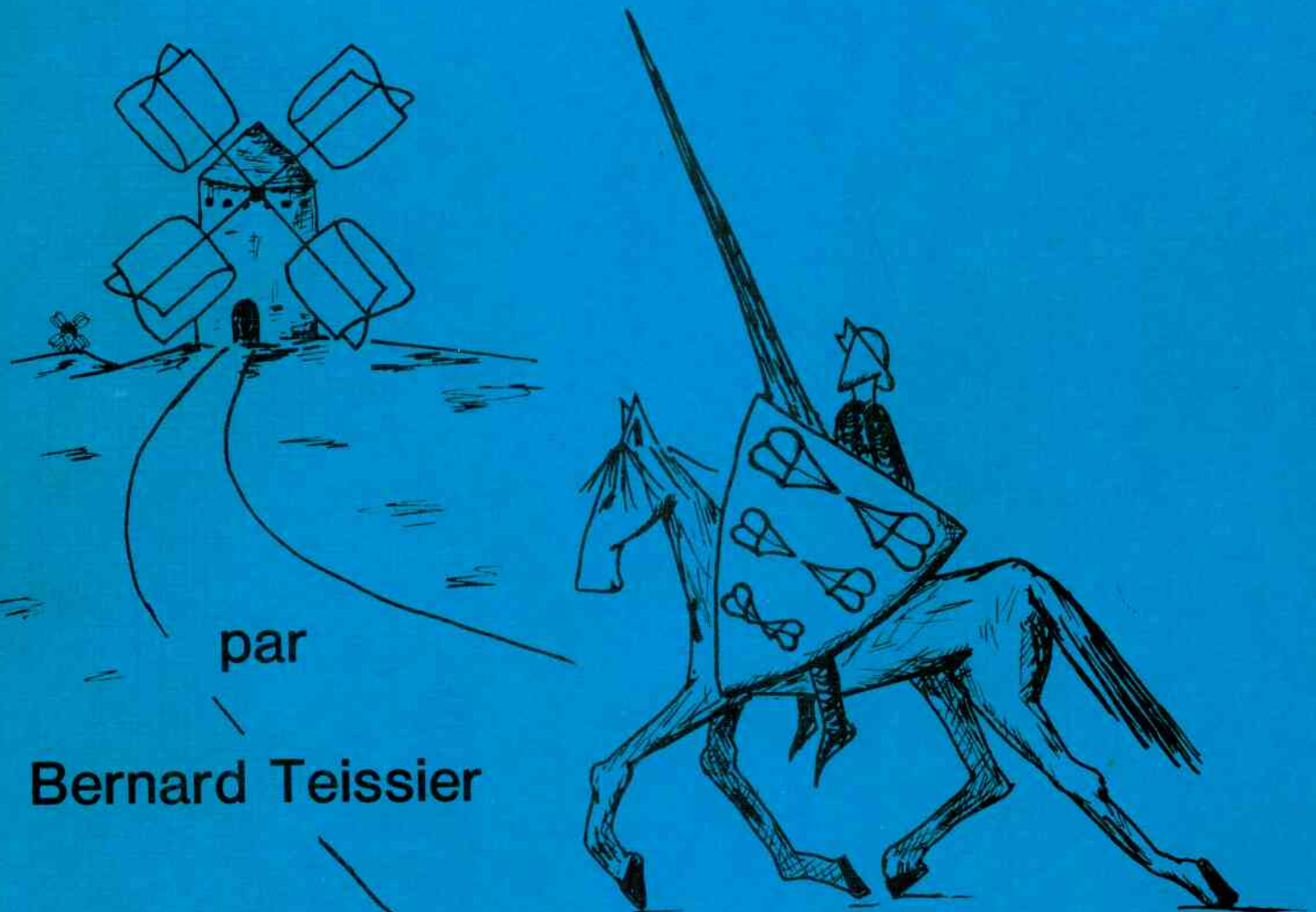


ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES

VARIETES POLAIRES II

multiplicités polaires, sections planes,

et conditions de Whitney



par

Bernard Teissier

Cours à l'Universidad Complutense de Madrid

(Septembre 1980)

(Version provisoire)

MULTIPLICITES POLAIRES, SECTIONS PLANES, ET CONDITIONS DE WHITNEY

Bernard TEISSIER

S U M M A R Y

To each reduced equidimensional analytic algebra $\mathcal{O}_{X,x}$, one can associate a sequence of d integers, where $d = \dim \mathcal{O}_{X,x}$:

$$M_{X,x}^* = \{m_x(X), m_x(P_1(X)), \dots, m_x(P_{d-1}(X))\}$$

where for $0 \leq k \leq d-1$, $P_k(X)$ is a general local polar variety of codimension k of X , as defined by Lê D.T. and myself, and m_x denotes the multiplicity at x .

One can visualize $P_k(X)$ as follows : Pick an embedding $X \subset \mathbb{C}^N$ of a representative of (X,x) and take a general linear projection $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$. The closure in X of the critical locus of the restriction $p|_{X^0}$ of p to the non-singular part X^0 of X is purely of codimension k or empty, its multiplicity at x is independent of the choice of the general linear projection p and of the embedding. It is denoted by $m_x(P_k(X))$. Note that $P_0(X) = X$. I prove here the

Theorem : Let X be a reduced purely d -dimensional complex-analytic space, and Y a non-singular subspace of X . Given a point $0 \in Y$, the following conditions are equivalent :

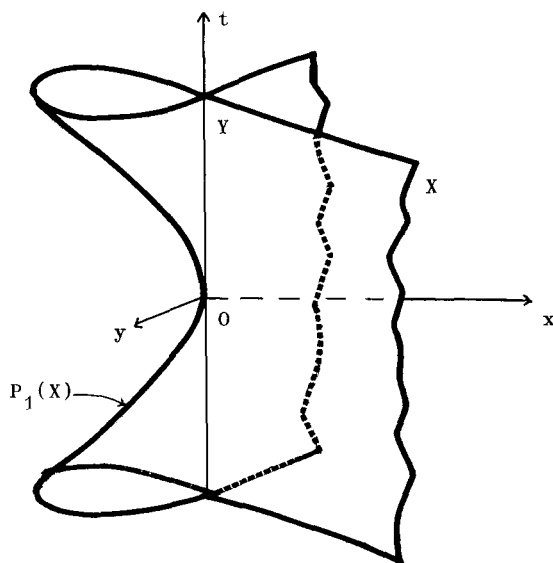
i) The pair (X^0, Y) satisfies the Whitney conditions at 0 .

ii) The map from Y to \mathbb{N}^d given by $y \mapsto M_{X,y}^*$ is constant in a neighbourhood of 0 in Y .

Equivalently, (X^0, Y) does not satisfy the Whitney conditions at 0 if and only if one of the general local polar varieties $P_k(X)$ is not equimultiple along Y at 0 .

So the following picture already shows the general phenomenon : here X is the surface in \mathbb{C}^3 defined by $y^2 - x^3 - t^2x^2 = 0$, Y is the t -axis, and p is the projection onto the (x,t) -plane : the curve defined by $x + t^2 = 0$, $y = 0$ is a

general polar curve for X , it is not equimultiple along Y so (X^0, Y) does not satisfy the Whitney conditions at 0 , which is obvious from the definition (see Chap. III)



An important feature of the sequence $M_{X,x}^*$ is that it is an analytic invariant of the germ (X,x) which can be computed topologically, just like the multiplicity can be computed by counting the number of points of intersection with X of a general $(N-d)$ -plane in \mathbb{C}^N near x (see Chap. IV and VI).

C O N T E N U

Chapitre 0 - INTRODUCTION.....	318
Chapitre I - DEPENDANCE INTEGRALE SUR LES IDEAUX.....	324
§ 0. Introduction.....	324
§ 1. Critères de dépendance intégrale.....	325
§ 2. Un exemple : les idéaux engendrés par des monômes.....	336
§ 3. Dépendance intégrale et inégalités de Łojasiewicz.....	338
§ 4. Clôture intégrale d'idéaux et multiplicités.....	339
§ 5. Le principe de spécialisation de la dépendance intégrale.....	343
§ 6. Saturation lipschitzienne.....	349
Chapitre II - IDEAL JACOBIEEN, MODIFICATION DE NASH ET THEOREME DE BERTINI	
IDEALISTE.....	362
§ 0. Introduction.....	362
§ 1. Idéal jacobien relatif.....	362
§ 2. Théorème de Bertini idéaliste.....	371
§ 3. Idéal jacobien et transversalité.....	377
§ 4. Espace conormal d'un espace analytique plongé.....	378
Chapitre III - STRATIFICATIONS.....	382
§ 0. Introduction.....	382
§ 1. Conditions d'incidence.....	383
§ 2. Conditions de Whitney.....	387
§ 3. Stratifications définies par des conditions numériques.....	401
§ 4. Stratifications et transversalité.....	402
§ 5. Stratifications, transversalité et éclatements.....	411

Chapitre IV - VARIETES POLAIRES.....	416
§ 0. Introduction.....	416
§ 1. Définitions des variétés polaires.....	417
§ 2. Exemples.....	423
§ 3. Multiplicités des variétés polaires.....	425
§ 4. Variétés polaires et espace conormal.....	431
§ 5. Transversalité des variétés polaires.....	433
§ 6. Mini-formulaire pour les variétés polaires.....	450
Chapitre V - LE THEOREME PRINCIPAL.....	454
§ 0. Introduction.....	454
§ 1. La démonstration.....	454
§ 2. Version relative.....	470
Chapitre VI - CONSEQUENCES.....	474
§ 0. Introduction.....	474
§ 1. Exemples.....	474
§ 2. Réponse à une question de Zariski.....	476
§ 3. La stratification de Whitney canonique d'un espace analytique	478
§ 4. La réciproque du théorème de Thom-Mather.....	480
§ 5. Rapport avec le cas des hypersurfaces.....	484
§ 6. Sur l'équisingularité à la Zariski.....	484

I N T R O D U C T I O N

§ 1.

"Tu n'es qu'un mortel, aussi ton esprit doit-il nourrir deux pensées à la fois."

Bacchylide

Tout ce texte est consacré à la démonstration d'un seul résultat, qui est la réalisation de la partie algèbro-géométrique du programme consécutif à [Te 1]. Rappelons ce programme, qui s'inscrit à l'intérieur d'un effort pour comprendre le lien entre la structure algébrique d'un ensemble algébrique ou analytique, et sa structure topologique.

A) Partie algèbro-géométrique : Associer à chaque algèbre analytique complexe réduite $\mathcal{O}_{X,x}$ purement de dimension d un élément $M_{X,x}$ d'un ensemble discret (une multiplicité généralisée) de telle façon que, étant donné un espace analytique complexe réduit purement de dimension d , un sous-espace analytique Y de X et un point non-singulier $0 \in Y$, on ait équivalence entre :

- i) L'application $y \mapsto M_{X,y}$ est constante sur Y au voisinage de 0 .
- ii) Le couple (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney au voisinage 0 .

Remarque : Les conditions de Whitney sont des conditions différentielles (pour une définition précise, voir (Chap. III, 2.2.1)), qui d'une part sont impliquées par des conditions algèbro-géométriques (cf. Chap. III, 2.3.1) et d'autre part impliquent des résultats de trivialité topologique (Chapitre VI, 4.3.1). Elles ont été introduites par Whitney dans [W] et étudiées par Thom [Th], Mather [Ma], Łojasiewicz et Hironaka [H 1], [H 3].

B) Partie topologique : Donner une interprétation de $M_{X,x}$ en termes de la topologie de l'ensemble analytique X au voisinage de x .

Les résultats de [Te 1] réalisaient ce programme dans le cas particulier où X est une hypersurface de \mathbb{C}^{d+1} dont le lieu singulier Y est non-singulier, le rôle de la multiplicité $M_{X,x}$, pour $x \in Y$, étant tenu par la suite μ^* des nombres de Milnor des sections de X par des plans généraux de \mathbb{C}^{d+1} passant par x et de codimension supérieure ou égale à la dimension de Y .

Pour un énoncé précis du résultat principal de ce travail, voir le Chapitre V, et pour des renseignements sur la partie topologique, voir le Chapitre VI, § 4.

§ 2.

Cette généralisation a été permise par l'introduction dans [Lê-Te] des variétés polaires locales générales associées à un germe d'espace analytique $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$, réduit et purement de dimension d . On peut décrire informellement une variété polaire locale générale de codimension k de X comme ceci : Soit $X \subset \mathbb{C}^N$ un représentant du germe $(X,0)$, et soit $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ une projection linéaire générale. Une variété polaire $P_k(X,0)$ est l'adhérence dans X du lieu critique de la restriction de p à la partie non-singulière X^0 de X . La multiplicité généralisée cherchée est la suite $\{m_0(P_k(X,0); 0 \leq k \leq d-1\} \in \mathbb{N}^d$ des multiplicités en 0 des variétés polaires générales de toutes les codimensions k , $0 \leq k \leq d-1$. On montre au Chapitre IV que cette suite d'entiers ne dépend en fait que de l'algèbre analytique $\mathcal{O}_{X,0}$.

Par ailleurs la démonstration est substantiellement plus simple que celle de [Te 1], puisque l'on peut raisonner par récurrence sur $\dim X - \dim Y$ à l'aide de résultats de transversalité. On peut d'ailleurs résumer les moyens techniques employés en disant qu'il s'agit du début d'une théorie systématique de la transversalité des espaces singuliers, si l'on comprend un espace singulier comme ensemble stratifié, muni en outre en chaque point des variétés polaires locales générales des adhérences des strates. Les principaux résultats techniques sont des résultats de transversalité : transversalité d'une

variété polaire locale générale au noyau de la projection servant à la définir (cf. Chap. IV) transversalité, sous certaines conditions, d'une hypersurface non-singulière de \mathbb{C}^N générale parmi celles qui contiennent Y à toutes les limites en 0 d'espaces tangents à X^0 , etc. La démonstration du théorème principal (Chap. V) paraîtra d'ailleurs beaucoup plus simple le jour où l'on disposera pour parler de transversalité d'espaces singuliers d'un langage aussi souple et puissant, et sans doute aussi vidé de géométrie, que la topologie algébrique.

§ 3.

"Si le langage était parfait, l'homme cesserait de penser."

Paul Valéry

Provenant d'un cours, ce texte ne va pas droit au but, mais suit un itinéraire que j'aimerais que l'on puisse qualifier de touristique. De plus je me suis efforcé de créer les premiers rudiments d'un langage algébro-géométrique permettant de parler de la transversalité des espaces singuliers, le langage géométrique étant parfois peu commode. Par ailleurs, il me semble possible, et très intéressant, de déformer la rédaction, en respectant sa structure globale, en chacun des deux extrêmes entre lesquels elle se trouve : d'une part une rédaction complètement algébrique, sur un corps de caractéristique zéro algébriquement clos, et d'autre part, mutatis mutandis, une rédaction en géométrie sous-analytique réelle démontrant un analogue du théorème principal.

§ 4.

Les principales sources de ce travail sont d'une part la construction de (Chap. III, 2.3.1) qui d'après une idée de Hironaka permet d'énoncer une condition d'équidimensionnalité des fibres d'un certain morphisme suffisante pour impliquer les conditions de Whitney, et d'autre part la recherche systématique d'invariants de la géométrie d'un espace X au voisinage d'un point x

dans la géométrie et la topologie des sections planes générales de X passant par x ou un peu à côté, de toutes les dimensions. La jonction est précisément faite par la théorie des variétés polaires comme le montrent (Chap. IV, 6.1.1 et Chap. VI, 4.2). Cette théorie des variétés polaires elle-même doit beaucoup à la foi communicative de Thom et Zariski en l'utilité des méthodes de contour apparent et de discriminant pour obtenir des informations de nature topologique et algébrique sur les singularités.

Par ailleurs, J.P. Brasselet et M.H. Schwartz ([B-S], Corollaire 10.2) ont prouvé que l'obstruction d'Euler locale $Eu_x(X)$ de MacPherson est constante sur chaque strate d'une stratification de Whitney de X . Puisque Lê D.T. et l'auteur ont prouvé ([Lê-Te]) la formule $Eu_x(X) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k m_x(P_k(X,x))$, la somme alternée des multiplicités des variétés polaires de X est constante sur chaque strate, comme l'est la multiplicité de X d'après Hironaka [H 1]. Il faut remarquer cependant que la preuve assez topologique de [B-S] ne permet pas de tirer un résultat de la seule hypothèse que (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en un point $0 \in Y$. Il faut pour utiliser cette hypothèse a priori bien plus faible une méthode utilisant de l'algèbre, comme le Lemme-clé du Chapitre V, Lemme qui m'a été suggéré par un résultat de Briçonnet et Henry (cf. [B-H]) concernant les surfaces dans \mathbb{C}^3 .

§ 5.

Ce texte est la rédaction, fidèle pour les grandes lignes, d'un cours donné à l'Universidad Complutense de Madrid en Septembre 1980, développant une courte note ([Te 5]). Je veux remercier le Professeur Abellanas de m'avoir invité à donner ce cours, l'équipe vivante et sympathique des auditeurs, et particulièrement Maria-Emilia Alonso-Garcia et Ignacio Luengo qui ont rédigé les notes d'une grande partie du cours et ont fait de nombreuses observations pertinentes sur le contenu. Je veux aussi remercier les organisateurs de la Conférence de La Rabida, où j'ai présenté un résumé des résultats, pour l'accueil chaleureux et efficace que tous les participants ont pu apprécier. Pendant la

rédaction j'ai bénéficié des conseils éclairés de Lê Dũng Tráng, Michel Merle, J.P.G. Henry et C. Sabbah. En particulier je suis très reconnaissant à Merle et Henry d'avoir tiré la théorie d'une ornière en découvrant qu'il fallait remplacer la modification de Nash par le morphisme conormal dans la démonstration.

Marie-Jo Lécuyer a assuré la frappe avec sa compétence et son amabilité coutumières, et a réalisé les dessins avec talent et imagination.

L'énoncé et les idées principales de la preuve sont nés au cours de séjours à la Fondation des Treilles en 1979-80, et la plus grande partie de la rédaction finale y a été faite. Je remercie Annette Gruner-Schlumberger d'avoir créé un lieu de travail aussi exceptionnel.

* * *

QUELQUES CONVENTIONS ET NOTATIONS

1) On se permettra souvent de considérer sans le dire explicitement un représentant "assez petit" X d'un germe $(X, 0)$ (et de même pour un morphisme). Le sens de "assez petit" sera toujours clair d'après le contexte.

2) Etant donné un morphisme $f: X \rightarrow Y$ et un faisceau d'idéaux I de \mathcal{O}_Y on notera souvent $I\mathcal{O}_X$ ou $I \cdot \mathcal{O}_X$ l'idéal de \mathcal{O}_X image de l'homomorphisme canonique $f^*I \rightarrow f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$. De même, étant donné un homomorphisme d'anneaux $\rho: A \rightarrow B$ et un idéal I de A , on notera IB ou $I \cdot B$ l'idéal de B engendré par $\rho(I)$.

3) Etant donné un morphisme $f: X \rightarrow S$, un fermé analytique rare $F \subset S$ et un sous-ensemble analytique fermé H de S , on appellera transformé strict de H par f (relativement à F) l'adhérence $\overline{f^{-1}(H) \cap (X - f^{-1}(F))}$ dans X de $f^{-1}(H) \cap (X - f^{-1}(F))$. Nous nous servirons de ceci dans trois cas : celui où f est surjectif et $F \subset S$ est l'ensemble des points $s \in S$ où la dimension de la fibre $f^{-1}(s)$ est strictement supérieure à $\dim X - \dim S$ (cf. Chap. III, § 5), celui où f est un plongement fermé et F rare dans X , le résultat étant alors noté $H \hat{\cap} X$ et appelé intersection stricte, (cf. Chap. IV, 5.4.2) et enfin celui où f apparaît dans un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times S & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow f & & \downarrow f_0 \\ S & \xrightarrow{e} & S_0 \end{array}$$

où e est un éclatement et $F \subset S$ est l'ensemble exceptionnel de l'éclatement.

Le morphisme $f'_0: X \rightarrow S$ de l'espace X transformé strict de S par f dans S induit par f est appelé transformé strict de f_0 par e .

(Ceci est utilisé dans le Chapitre V).

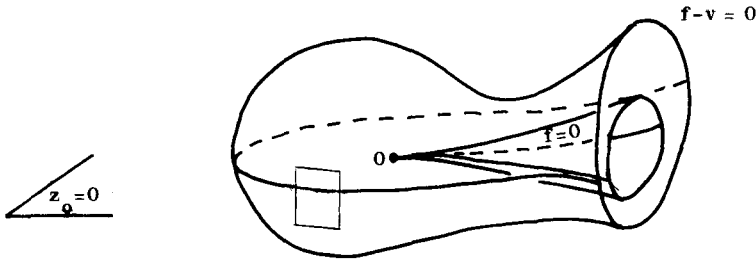
Dans le cas où f_0 est un plongement fermé, on parlera du transformé strict de X par e .

DEPENDANCE INTEGRALE SUR LES IDEAUX

Introduction. Dans ce chapitre, on étudie la situation suivante : soient X un espace analytique complexe réduit et I un faisceau cohérent d'idéaux sur X , définissant un sous-espace analytique fermé $Y \subset X$, que l'on suppose rare dans X . Etant donnée une fonction holomorphe h sur X , on sait que le théorème des zéros de Hilbert permet d'exprimer algébriquement le fait que h s'annule sur $|Y|$, ensemble sous-jacent à Y , par l'inclusion $h \in \sqrt{I}$, où \sqrt{I} est le faisceau racine de I , vérifiant $(\sqrt{I})_x = \sqrt{I}_x$ pour tout $x \in X$, et ce qui nous intéresse ici est la possibilité d'exprimer algébriquement de différentes façons le fait que non seulement h s'annule sur $|Y|$, mais que de plus pour tout choix d'un système de générateurs g_1, \dots, g_p de I au voisinage d'un point $y \in Y$, on a une inégalité $|h(x)| \leq C \text{Sup}_j (|g_j(x)|)$ pour tout x appartenant à un voisinage U assez petit de y , où $C \in \mathbf{R}_+$.

Voici un exemple typique des applications que je ferai de ce type de conditions : soit $f(z_0, \dots, z_d) = 0$ une équation pour une hypersurface complexe dans un ouvert $U \subset \mathbf{C}^{d+1}$. Supposons savoir que $\frac{\partial f}{\partial z_0}(0, z_1, \dots, z_d)$ tend vers 0 au moins aussi vite que les $\frac{\partial f}{\partial z_i}(0, z_1, \dots, z_d)$ ($1 \leq i \leq d$) ; ceci signifie que l'hyperplan $z_0 = 0$ n'est pas direction limite d'espaces tangents aux hypersurfaces de niveau $f(0, z_1, \dots, z_d) = v$ de la restriction de f à l'hyperplan $z_0 = 0$. Et de même, le fait qu'en restriction à l'hypersurface X définie par $f = 0$, on ait au voisinage de 0 l'inégalité $|\frac{\partial f}{\partial z_0}(x)| \leq C \text{Sup}_{i>0} |\frac{\partial f}{\partial z_i}(x)|$ ($x \in X$) équivaut à ce que $z_0 = 0$ ne soit pas direction limite d'hyperplans tangents à X en ses points non-singuliers. La possibilité d'exprimer algébriquement des conditions géométriques de cette espèce est un bon outil permettant en particulier d'énoncer al-

briquement, et de démontrer, des résultats de transversalité fins.
Le dessin suivant aidera peut-être le lecteur :



Les ingrédients sont essentiellement l'existence des éclatements et de la normalisation en géométrie analytique complexe et le théorème des singularités inexistantes : sur un espace normal, toute fonction méromorphe et localement bornée est holomorphe.

Bien que ce ne soit pas nécessaire pour la suite, j'ai insisté au § 3 sur l'aspect numérique de la clôture intégrale. Une application qui nous sera utile au chapitre V, la traduction algébrique du concept de fonction méromorphe lipschitzienne, est donnée au § 6.

§ 1. Critères de dépendance intégrale.

1.1 Définition : Soit I un idéal d'un anneau A ; un élément h de A est dit entier sur I si il satisfait une relation de dépendance intégrale de la forme

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad \text{avec } a_i \in I^i.$$

On peut se ramener à la dépendance intégrale sur les anneaux au moyen de l'observation suivante :

l'élément h est entier sur I si et seulement si l'élément $h \cdot T \in A[T]$ est entier sur le sous-anneau $P(I) = \sum_{i \geq 0} I^i T^i$ de $A[T]$.

Le fait (cf. [Bbk 1], § 1.1) que l'ensemble des éléments de $A[T]$ entiers

sur $P(I)$ est un sous-anneau de $A[T]$, implique que l'ensemble des éléments de A entiers sur I est un idéal de A ; cet idéal sera noté \bar{I} et appelé clôture intégrale de l'idéal I . Si $\bar{I} = I$, on dira que I est intégralement clos. Il résulte de (Loc. cit.) que \bar{I} est intégralement clos.

1.2 Remarques : 1) On a les inclusions $I \subseteq \bar{I} \subseteq \sqrt{I}$, $I \subseteq J$ implique $\bar{I} \subseteq \bar{J}$, et \bar{I} est donc le plus petit idéal intégralement clos de A contenant I , et donc on a l'inclusion $\bar{I} \cdot \bar{J} \subseteq \overline{I \cdot J}$ pour des idéaux I, J de A .

2) Supposons A normal (i.e., réduit et intégralement clos dans son anneau total de fractions), et I inversible, c'est-à-dire principal, engendré par un élément g non-diviseur de 0. Alors $I = \bar{I}$, et réciproquement, si tout idéal inversible d'un anneau réduit A est intégralement clos, A est normal.

Preuve : Puisque I est principal, l'équation $h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0$ s'écrit aussi $h^k + \alpha_1 g h^{k-1} + \dots + \alpha_k g^k$ avec $\alpha_i \in A$ et donc, puisque g est non-diviseur de 0 : $\left(\frac{h}{g}\right)^k + \alpha_1 \left(\frac{h}{g}\right)^{k-1} + \dots + \alpha_k = 0$, qui est une relation de dépendance intégrale sur A pour l'élément $\frac{h}{g}$ de $\text{Tot}(A)$; d'où $\frac{h}{g} \in A$ puisque A est normal, et donc $\bar{I} \subseteq I$. La réciproque se vérifie en lisant à l'envers ce qui précède.

En particulier, dans $\mathbb{C}\{t\}$ ou $\mathbb{R}\{t\}$, on a $h \in (\bar{g})$ si et seulement si l'ordre en t de h est au moins égal à celui de g .

1.3 Soient maintenant X un espace analytique complexe réduit et I un faisceau cohérent d'idéaux sur X définissant un sous-espace Y de X rare dans X .

1.3.1 Proposition 1 : A) Etant donnée une fonction holomorphe h sur X , on a l'inclusion $h_y \in \bar{I}_y$ en un point $y \in X$ si et seulement si pour tout système de générateurs (g_1, \dots, g_p) de I_y , il existe un voisinage ouvert U de y , dans lequel les g_i convergent, et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que l'on ait l'inégalité :

$$|h(x)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq p} (|g_i(x)|) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

B) Il existe un unique faisceau cohérent d'idéaux \overline{I} sur X tel que, pour tout $x \in X$ on ait $(\overline{I})_x = \overline{I}_x$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Démonstration : Soit $\pi: \overline{X}' \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de l'idéal I dans X , c'est-à-dire le composé de l'éclatement de I et de la normalisation de l'espace obtenu, qui est réduit puisque X l'est. Le morphisme π est propre et bimorphisme puisque Y est rare, et donc surjectif car c'est un morphisme fermé d'image dense. Le faisceau d'idéaux $I \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}'}$, engendré dans $\mathcal{O}_{\overline{X}'}$, par les composés avec π des sections de I est donc un faisceau inversible d'idéaux sur un espace normal.

Soit $h \in \overline{I}_y$; on a par hypothèse une relation de dépendance intégrale $h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0$, avec $a_i \in \overline{I}_y^i$, qui s'étend en une relation de dépendance intégrale pour un représentant, encore noté h , du germe h , c'est-à-dire il existe un voisinage ouvert U de y dans X tel que l'on ait

$$h \in \overline{H^0(U, I)} \subset H^0(U, \mathcal{O}_X) .$$

Ceci implique que $(h \circ \pi)_x$, est entier sur $(I\mathcal{O}_{\overline{X}'})_x$, pour tout $x' \in \pi^{-1}(U)$, et l'on déduit de la remarque 2) que $(h \circ \pi)_x \in (I\mathcal{O}_{\overline{X}'})_x$, pour tout $x' \in \pi^{-1}(U)$. Ceci montre d'une part que $h \in H^0(U, \pi_*(I\mathcal{O}_{\overline{X}'}) \cap \mathcal{O}_X)$ et d'autre part que tout point $x' \in \pi^{-1}(U)$ possède un voisinage ouvert $V_{x'}$, tel qu'il existe $C_{x'} \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $w' \in V_{x'}$, on ait $|h \circ \pi(w')| \leq C_{x'} \sup_{1 \leq i \leq p} |g_i \circ \pi(w')|$. Le morphisme

π étant propre et surjectif, on peut recouvrir $\pi^{-1}(x)$ par un nombre fini d'ouverts $V_{y'_i}$, $y'_i \in \pi^{-1}(y)$, de telle façon que $\cup V_{y'_i} \supset \pi^{-1}(V)$ pour un voisinage V de x dans U . Prenant $C = \sup_i C_{y'_i}$, on en déduit bien l'inégalité $|h(x)| \leq C \sup |g_i(x)|$ pour tout $x \in V$. Réciproquement, supposons une telle inégalité vérifiée, disons pour tout $x' \in V$; la même inégalité est valable pour $h \circ \pi$ et les $g_i \circ \pi$ sur $\pi^{-1}(V)$, mais là, nous savons que $I\mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)}$ est inversible et d'après le lemme de Nakayama, si (g_1, \dots, g_p) est un système de générateurs de l'idéal $I_y \subset \mathcal{O}_{X,y}$, chaque point $y' \in \pi^{-1}(y)$ possède un voisinage ouvert $V_{y'}$, tel que $I\mathcal{O}_{\overline{X}', w'} = (g_i \circ \pi)_{w'} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}', w'}$, (pour un certain i , $1 \leq i \leq p$). Dire que $(h \circ \pi)_{w'}$,

est bornée par les éléments de $\mathcal{O}_{X',w'}$, équivaut donc à dire que la fonction méromorphe $\frac{h \circ \pi}{g_i \circ \pi}$ est bornée au voisinage de y' , ce qui signifie puisque X' est normal qu'elle est holomorphe, donc que $(h \circ \pi)_{\mathcal{O}_{X',w'}} \in \mathcal{O}_{X',w'}$.

On a donc bien équivalence entre

$$1.3.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } h_y \in \overline{\Gamma}_y \\ \text{ii) } |h(x)| \leq C \sup_i (g_i(x)) \quad (g_1, \dots, g_p)_{\mathcal{O}_{X,y}} = I_y, \text{ et } C \in \mathbb{R}_+ \\ \text{comme ci-dessus.} \\ \text{iii) } h_y \in (\pi_*(\mathcal{O}_{X'}) \cap \mathcal{O}_X)_y. \end{array} \right.$$

Pour achever la preuve de la proposition, il suffit de remarquer que puisque $\mathcal{O}_{X'} \subset \mathcal{O}_X$, on a $\pi_* \mathcal{O}_{X'} \subset \pi_* \mathcal{O}_X = \overline{\mathcal{O}_X}$, faisceau des fonctions méromorphes bornées sur X , qui est un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -modules d'après un théorème d'Oka (ou le théorème des images directes de Grauert). Le faisceau $\pi_* \mathcal{O}_{X'}$ est cohérent d'après le théorème de Grauert, et donc le faisceau $\overline{\Gamma} = \pi_*(\mathcal{O}_{X'}) \cap \mathcal{O}_X$, intersection de deux sous-faisceaux cohérents d'un faisceau cohérent, est un faisceau cohérent d'idéaux. ■

1.3.3 Corollaire 1 : Etant donnés deux faisceaux cohérents d'idéaux I, J , l'ensemble des points $x \in X$ tels que $J_x \subseteq \overline{\Gamma}_x$ est le complémentaire d'un fermé analytique de X .

En effet, le faisceau $\overline{\Gamma} + J/\overline{\Gamma}$ est cohérent puisque $\overline{\Gamma}$ l'est, et son support est le fermé cherché.

1.3.4 Corollaire 2 (Critère valuatif de dépendance intégrale) : Pour que l'on ait $h_y \in \overline{\Gamma}$, il faut et il suffit que pour tout morphisme analytique complexe (resp. analytique réel) $\varphi : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, y)$ (resp. $\varphi : (\Pi, 0) \rightarrow (X, y)$) où \mathbb{D} (resp. Π) désigne le disque unité de \mathbb{C} (resp. l'intervalle $]-1, +1[$ de \mathbb{R}) on ait, en notant $\varphi^* : \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ (resp. $\varphi^* : \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{O}_{\Pi,0}$) le morphisme d'algèbres analytiques complexes (resp. réelles) associé, l'inclusion :

$\varphi^*(h) \subset \varphi^*(I) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ (resp. $\varphi^*(h) \subset \varphi^*(I) \cdot \mathcal{O}_{\Pi,0}$, où $\mathcal{O}_{I,0}$ est l'algèbre des germes en 0 de fonctions analytiques réelles sur Π). Ceci signifie que $v(\varphi(h)) \geq v(\varphi(I))$, où v est "l'ordre d'annulation en 0".

La condition est évidemment nécessaire, puisque l'image par un homomorphisme d'anneaux d'une relation de dépendance intégrale est une relation de dépendance intégrale, et que $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ et $\mathcal{O}_{\Pi,0}$ sont des anneaux locaux normaux et principaux. Pour montrer que la condition est suffisante, on utilise le critère valuatif de propreté pour le morphisme π , qui affirme qu'il existe $r : (\mathbb{D},0) \rightarrow (\mathbb{D},0)$ (resp. $(\Pi,0) \rightarrow (\Pi,0)$) et $\varphi' : (\mathbb{D},0) \rightarrow (\bar{X}',y')$ (resp. $(\Pi,0) \rightarrow (\bar{X}',y')$) tels que $\pi \circ \varphi' = \varphi \circ r$. Il suffit donc de prouver le résultat pour $h \circ \pi$ et $I \mathcal{O}_{\bar{X}'}$, en tout point $y' \in \pi^{-1}(y)$. Puisque $I \mathcal{O}_{\bar{X}'}$ est un faisceau d'idéaux inversible sur un espace normal, on est donc ramené à prouver que si une fonction méromorphe $\frac{h}{g}$ sur un espace normal n'est pas holomorphe en un point, il existe un arc analytique complexe (resp. réel) $\varphi : (\mathbb{D},0) \rightarrow (\bar{X}',y')$ (resp. $\varphi : (\Pi,0) \rightarrow (\bar{X}',y')$) le long duquel la limite de $\frac{h}{g}$ est infinie. Cela est un résultat bien classique dans le cas où \bar{X}' est non-singulier en y' , conséquence facile de la factorialité des anneaux locaux réguliers (cf. [Se], IV-39) et l'on se ramène à ce cas en utilisant l'existence de systèmes de paramètres (morphisms finis) $(\bar{X}',y') \xrightarrow{p} (\mathbb{C}^d,0)$ ($d = \dim_{y'} \bar{X}'$) et le fait que toute fonction méromorphe sur \bar{X}' est algébrique sur le corps des fonctions méromorphes sur $(\mathbb{C}^d,0)$: si une telle fonction $\frac{h}{g}$ n'est pas bornée au voisinage de y' , un des coefficients de l'équation unitaire qu'elle satisfait est une fonction méromorphe sur \mathbb{C}^d non bornée au voisinage de 0, donc il existe un arc analytique à valeurs dans $(\mathbb{C}^d,0)$ le long duquel elle tend vers $+\infty$ en module. La propreté de p permet de remonter, après ramification, cet arc en un arc analytique à valeurs dans (\bar{X}',y') , le long duquel on vérifie aussitôt que $|\frac{h}{g}|$ tend vers $+\infty$. ■

1.3.5 Remarque : L'avatar de ce corollaire en algèbre commutative est l'énoncé suivant : soient A un anneau local noëtherien réduit et I un idéal

de A . Pour tout anneau de valuation V contenu dans l'anneau total de fractions de A et contenant A , notons I_V l'idéal de V engendré par I ; on a l'égalité

$$\bar{I} = \bigcap_{A \subset V \subset \text{Tot}(A)} I_V$$

(comparer à [Bbk 2], § 1 n° 3).

On a aussi les variantes suivantes : l'élément h appartient à \bar{I} si et seulement si, pour tout homomorphisme $\varphi : h : A \rightarrow V$, où V est un anneau de valuation discrète, on a $\varphi(h) \in \varphi(I)$, ou, ce qui est équivalent, $v(h) \geq v(I)$ où v désigne la fonction d'ordre sur A obtenue en composant avec φ la valuation de V . Soient A un anneau noëthérien réduit, I un idéal de A et \bar{A} la fermeture intégrale de A dans son anneau total de fractions. Soit $Z \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme propre et birationnel tel que Z soit normal et \mathcal{O}_Z inversible. On a $\bar{I} = H^0(Z, \mathcal{O}_Z) \cap A$ où $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) \subset H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \bar{A}$.

1.3.6 Corollaire 3 : Avec I et $h \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ comme ci-dessus, on a l'inclusion $h_y \in \bar{I}_y$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert U de y dans X et un morphisme propre et surjectif $\pi : Z \rightarrow U$ tel que $h \circ \pi \in \mathcal{O}_Z$.

Le fait que la condition soit nécessaire résulte aussitôt de la Proposition, et le fait qu'elle soit suffisante résulte de ce que $h \circ \pi \in \mathcal{O}_Z$ implique localement sur Z des inégalités comme dans la Proposition, qui se redescendent en inégalités sur U parce que π est propre et surjectif.

En particulier, étant donnés deux faisceaux cohérents d'idéaux I et J sur X , on a l'égalité $\bar{I} = \bar{J}$ si et seulement si il existe un morphisme $\pi : Z \rightarrow X$ propre et surjectif tel que $I \cdot \mathcal{O}_Z = J \cdot \mathcal{O}_Z$, et si $\bar{I} = \bar{J}$, ils ont même éclatement normalisé.

1.4 Proposition 2 : Soit I un faisceau cohérent d'idéaux sur X , définissant un sous-espace rare $Y \subset X$; soit $\pi : Z \rightarrow X$ un morphisme propre et surjectif tel que Z soit normal et \mathcal{O}_Z inversible (par exemple l'éclatement normalisé de I vu plus haut). Soit $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ la décomposition en composantes irréductibles du sous-espace $D \subset Z$ de codimension 1, diviseur de Cartier dans Z défini par \mathcal{O}_Z .

A) Chaque D_i contient un ouvert analytique dense (= complémentaire d'un fermé analytique rare) U_i en tout point z duquel Z et D_{red} sont non-singuliers, $(D, z) = (D_i, z)$ et il existe un système de coordonnées locales w_1, \dots, w_d pour Z en z tel que $\mathcal{O}_{Z, z} = w_1^{v_i} \mathcal{O}_{Z, z}$ avec $v_i \in \mathbb{N} - \{0\}$.

B) Etant donné $h \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$, il existe sur chaque composante D_i un ouvert analytique dense V_i en tout point z duquel $(h \circ \pi)_z \cdot \mathcal{O}_{Z, z} = w_1^{w_i} \mathcal{O}_{Z, z}$ ($w_i \geq 0$).

C) On a $h_y \in \overline{I}_y$ si et seulement si, pour chaque indice i tel que $D_i \cap \pi^{-1}(y) \neq \emptyset$, on a l'inégalité $w_i \geq v_i$.

Démonstration : Les points A) et B) résultent aussitôt de ce que Z étant normal, le lieu singulier de Z est de codimension au moins 2, et du fait que, D_i étant irréductible, les entiers v_i et w_i , qui sont clairement localement constants hors d'un fermé rare de D_i sont constants parce que le complémentaire de ce fermé est connexe. Le point C) résulte de ce que \mathcal{O}_Z étant inversible, et Z normal, pour vérifier que $h \circ \pi \in \mathcal{O}_Z$ dans un voisinage de $\pi^{-1}(y)$, ce qui d'après la Proposition 1 équivaut à l'inclusion $h_y \in \overline{I}_y$, il suffit de vérifier que pour tout $z' \in \pi^{-1}(y)$, $(\frac{h \circ \pi}{g'})_{z'}$, où g' est un générateur local de \mathcal{O}_Z en z' , est holomorphe. Sur un espace normal, le lieu polaire d'une fonction méromorphe est soit de codimension 1, soit vide, comme le montre un argument analogue à celui utilisé dans la preuve du Corollaire 1. Or, le lieu polaire de $\frac{h \circ \pi}{g'}$ qui est clairement contenu dans $D \cap U'$, U' étant un voisinage ouvert de z' où g' engendre \mathcal{O}_Z et assez petit, contient $D_i \cap U'$ si et seulement si $z' \in D_i$ et $w_i < v_i$, comme on le voit aussitôt. Ainsi, dire que $w_i \geq v_i$ pour tout i , tel que $D_i \cap \pi^{-1}(y) \neq \emptyset$ équivaut à dire que pour tout $z' \in \pi^{-1}(y)$, et tout U' comme ci-dessus, le lieu polaire de $\frac{h \circ \pi}{g'}$ ne contient aucun $D_i \cap U'$, au voisinage de z' donc que ce lieu polaire n'a aucune composante de codimension 1 au voisinage de $\pi^{-1}(y)$ et donc qu'il est vide, c'est-à-dire que $(h \circ \pi)_z \in \mathcal{O}_{Z, z}$ pour tout $z' \in \pi^{-1}(y)$, ou encore d'après la Proposition 1, que $h_y \in \overline{I}_y$. ■

1.4 Remarques : Dans un cas particulier, on peut voir très simplement le rapport entre la Proposition 2 et le critère valuatif de dépendance intégrale,

et surtout en tirer un critère valuatif "effectif". (Voir [Te 9] et [Le-T 1], § 5) :

1.4.1 Soit I un idéal primaire pour l'idéal maximal, dans une algèbre analytique réduite $\mathcal{O}_{X,x}$. Supposons que I soit entier sur un idéal I_1 engendré par une suite régulière (c'est-à-dire $\mathcal{O}_{X,x}$ Cohen-Macaulay). On peut alors concevoir l'espace obtenu en éclatant I_1 dans X comme une famille de courbes paramétrée par \mathbb{P}^{d-1} , où $d = \dim \mathcal{O}$ et munie d'une section σ . En effet si $I_1 = (f_1, \dots, f_d) \mathcal{O}_{X,x}$, l'éclatement de I_1 dans X est le sous-espace X_1 de $X \times \mathbb{P}^{d-1}$ défini par l'idéal engendré par $(f_i T_{i+1} - f_{i+1} T_i ; 1 \leq i \leq d-1)$ où $(T_1 : \dots : T_d)$ est un système de coordonnées homogènes sur \mathbb{P}^{d-1} . D'après les résultats généraux sur la normalisation simultanée (cf. [Te 2], I), il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset \mathbb{P}^{d-1}$ au-dessus duquel on a une normalisation simultanée c'est-à-dire que le morphisme composé $\bar{X}_1 \xrightarrow{n} X_1 \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{P}^{d-1}$ a la propriété que pour tout $t \in U$, $(\text{pr}_2 \circ n)^{-1}(t)$ est plat au voisinage de tout point de $(\text{pr}_2 \circ n)^{-1}(t)$ et que de plus le morphisme induit $\bar{X}_1(t) \rightarrow X_1(t)$ sur les fibres est la normalisation. Par conséquent la courbe $\bar{X}_1(t)$ est réunion de germes de courbes non-singuliers, transverses au diviseur exceptionnel ensembliste $D_{\text{red}} = (n^{-1}(\{x\} \times \mathbb{P}^{d-1}))_{\text{red}}$ qui est lui-même non-singulier en tout point de $(\text{pr}_2 \circ n)^{-1}(t)$. On voit que si l'on considère la décomposition en composantes irréductibles $X_1(t) = \bigcup_{j \in J} C_j$, d'une part, et d'autre part la décomposition $D_{\text{red}} = \bigcup_{i \in I} D_i$, pour chaque fonction $h \in \mathcal{O}_{X,x}$, il existe un ouvert de Zariski dense $V = V(h)$ de \mathbb{P}^{d-1} tel que, pour $t \in V$, si l'on considère l'application surjective naturelle $\alpha : J \rightarrow I$ qui à $j \in J$ associe la composante D_i de D que rencontre la normalisée de la branche C_j de $X_1(t)$, on a, en notant $\tilde{w}_j(h)$ la valuation de l'image de h dans \mathcal{O}_{C_j} , l'égalité (notations de la Proposition 2)

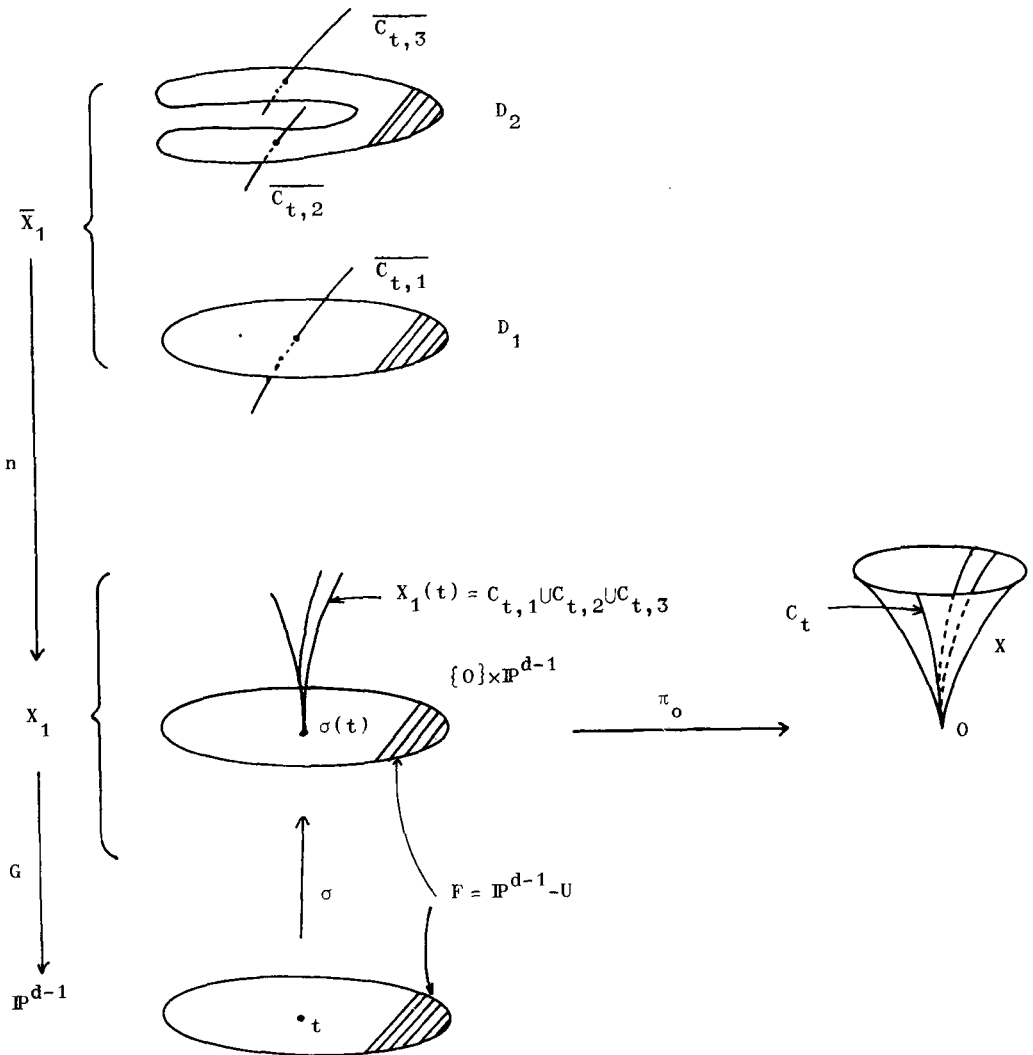
$$w_{\alpha(j)} = \tilde{w}_j(h) \quad ,$$

et l'on a aussi, dans $U \cap V(h)$, l'égalité $v_{\alpha(j)} = \tilde{w}_j(I \cdot \mathcal{O}_{X(t)})$. Par conséquent, pour $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ donné, il existe un ouvert de Zariski dense $U_h \subset \mathbb{P}^{d-1}$ tel que, si l'on considère pour $t \in U_h$ la courbe C_t contenue dans X définie par l'idéal

de $\mathcal{O}_{X,x}$ engendré par $(T_i f_{i+1} - T_{i+1} f_i ; 1 \leq i \leq d-1)$ où $t = (T_1 : \dots : T_d) \in U_h$ on a, en remarquant que $\pi_o : X_1(t) - C_t$ est un isomorphisme : $h \in \bar{I}$ si et seulement si pour chaque branche $C_{t,j}$ de C on a, en notant v_j la fonction d'ordre sur $\mathcal{O}_{X,x}$ obtenue en composant les morphismes $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{C_{t,j},0} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_{C_{t,j},0}} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}$ où v est la valuation naturelle, les inégalités

$$v_j(h) \geq v_j(I) .$$

Le schéma suivant aidera peut-être le lecteur.



1.4.2 Un avatar algébrique de la Proposition 2 est l'énoncé suivant :

Soient A un anneau local nœtherien et $\pi : Z \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme propre et surjectif de schémas tel que Z soit normal et \mathcal{O}_Z inversible. Soit $Z = \cup V_i$ un recouvrement affine de Z , avec $V_i = \text{Spec } B_i$; soient $p_{i,j}$ les idéaux premiers associés à IB_i ; d'après le hauptsatz (cf. [Z-S], Ch. VII, § 7, Th. 23), les $p_{i,j}$ sont de hauteur 1 dans l'anneau normal B_i , et donc (cf. [Z-S], ch. VI, § 14, Th. 33) les localisés $(B_i)_{p_{i,j}}$ sont des anneaux de valuation discrète. Soient $v_{i,j}$ les fonctions d'ordre sur A obtenues en composant la valuation de $(B_i)_{p_{i,j}}$ avec l'homomorphisme $A \rightarrow (B_i)_{p_{i,j}}$ induit par π . Un élément $h \in A$ est entier sur I si et seulement si $v_{i,j}(h) \geq v_{i,j}(I)$ pour tous les couples (i,j) .

1.4.3 Gardant l'hypothèse que l'espace X est réduit, la Proposition 1 et ses corollaires restent essentiellement valables sans l'hypothèse que le sous-espace défini par l'idéal I soit rare dans X , sous la forme suivante : soit X_1 la réunion de celles des composantes irréductibles de X sur lesquelles l'idéal I induit un fermé rare, et soit X_2 la réunion des autres. Notant $\bar{X}'_1 \rightarrow X_1$ l'éclatement normalisé de I dans X_1 , et $\bar{X}_2 \rightarrow X_2$ la normalisation de X_2 , on a un morphisme naturel $\pi : \bar{X}'_1 \amalg \bar{X}_2 \rightarrow X$ qui est propre et biméromorphe, et tel que l'on ait encore : $h \in \bar{I}_X$ si et seulement si $(h \circ \pi) \in I \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}'_1 \amalg \bar{X}_2, z}$ pour tout point $z \in \pi^{-1}(x)$.

Conclusion : Sous l'hypothèse que X est réduit, $h \in \bar{I}_X$ si et seulement si pour tout morphisme propre et surjectif $p : Z \rightarrow X$ tel que \mathcal{O}_Z soit localement principal et Z normal, on a $(h \circ p)_z \in \left(I \cdot \mathcal{O}_Z \right)_z$ pour tout $z \in p^{-1}(x)$.

1.4.4 Le critère valuatif de dépendance intégrale et la Proposition 2 sont les principaux outils que l'on utilisera ici pour montrer des relations de dépendance intégrale. La Proposition 2 a des conséquences du type suivant : soit $\pi : Z \rightarrow X$ un morphisme propre et biméromorphe tel que \mathcal{O}_Z soit un faisceau d'idéaux inversibles, et Z normal. Soit Y le sous-espace défini par X , et soit $h \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Si chacune des composantes irréductibles de $D = \pi^{-1}(Y)$ s'envoie

surjectivement, par π , sur Y , et si $h_x \in \bar{I}_x$ pour tout x hors d'un fermé analytique rare F de Y , alors $h \in \bar{I}_x$ pour tout $x \in Y$, i.e. $h \in H^0(X, \bar{I})$. En effet, $\pi^{-1}(Y - F)$ contiendra, d'après l'hypothèse, un ouvert analytique dense de chaque composante irréductible D_i de D , et l'inclusion $h_x \in \bar{I}_x$ pour $x \in Y - F$ impliquera donc les inégalités $w_i \geq v_i$ de la Proposition 2. (Voir aussi le § 5 ci-dessous).

1.4.5 Exercice (corrigé dans [Te 6]) : Soient F_1, \dots, F_c et G des éléments de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{N+1} \cong \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_N\}$. Soient I l'idéal de \mathcal{O}_{N+1} engendré par F_1, \dots, F_c , $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{0, \dots, N\}$ un ensemble d'indices et J l'idéal de \mathcal{O}_{N+1} engendré par les éléments $z_j \frac{\partial(F_1, \dots, F_c, G)}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_c}, z_j)}$, $j \in \{0, \dots, N\}$. On a

l'inclusion :

$$G \cdot \frac{\partial(F_1, \dots, F_c)}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_c})} \cdot \mathcal{O}_{N+1}/I \in \overline{J \cdot \mathcal{O}_{N+1}/I} .$$

1.5 Autres propriétés utiles de la clôture intégrale des idéaux

Lemme de Nakayama intégral : Soient I, I' et J trois idéaux d'un anneau local noëtherien A , tel que $I \subset I'$ et $J \subset \mathfrak{M}$ où \mathfrak{M} est l'idéal maximal de A . Si l'on a $\overline{I + JI'} = \bar{I}'$, alors $\bar{I} = \bar{I}'$.

Pour prouver ce résultat nous aurons besoin de

1.5.1 Proposition : Soient A un anneau noëtherien et I un idéal de A . Pour un élément $h \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $h \in \bar{I}$
- ii) il existe un A -module de type fini fidèle tel que l'on ait $hM \subset IM$.

i) \Rightarrow ii). Soit $h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0$ avec $a_i \in I^i$ une équation de dépendance intégrale pour h ; on en déduit que : $h^k \in I \cdot (I + hA)^{k-1}$ d'où $h(I + hA)^{k-1} \subset I \cdot (I + hA)^{k-1}$ et le résultat en prenant pour M l'idéal $(I + hA)^{k-1}$.

ii) \Rightarrow i). Soit e_1, \dots, e_p un système de générateurs du A -module M . D'après l'hypothèse, on a des égalités $h \cdot e_i = \sum \lambda_{ij} e_j$ avec $\lambda_{ij} \in I$, d'où,

d'après la règle de Cramer : $\det(h \cdot \text{Id} - \Lambda) \cdot M = 0$ où $\Lambda = (\lambda_{ij})$. Puisque M est un A -module fidèle, ceci implique $\det(h \cdot \text{Id} - \Lambda) = 0$ ce qui est clairement une relation de dépendance intégrale pour h sur I .

Pour prouver le lemme de Nakayama intégral, remarquons que ce que nous avons à prouver est l'inclusion $\bar{I}' \subset I$. Or l'hypothèse nous donne, d'après la Proposition, l'existence d'un A -module de type fini M tel que l'on ait l'inclusion : $I' \cdot M \subset IM + J \cdot I' M$. Puisque $J \subset \mathfrak{M}$, on en déduit, d'après le Lemme de Nakayama, l'inclusion $I' M \subset IM$, d'où le résultat en appliquant la Proposition.

Remarque : D'après ce qui précède, on peut aussi motiver l'introduction de la clôture intégrale des idéaux par le problème de la "simplification" dans les produits d'idéaux : l'égalité $IJ = I'J$ n'implique pas $I = I'$, mais implique $\bar{I} = \bar{I}'$. (Voir [Sa]).

§ 2. Un exemple : les idéaux engendrés par des monômes.

Considérons le cas particulier d'un idéal I de l'anneau $A = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\}$ engendré par des monômes $z_1^{a_1^{(i)}} \dots z_d^{a_d^{(i)}} \quad (1 \leq i \leq p)$. D'après le Corollaire 2 du § 1, pour qu'un élément $h \in A$, soit entier sur I il faut et il suffit que, pour tout homomorphisme $\varphi^* : \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\} \rightarrow \mathbb{C}\{t\}$, posant $v_i = v(\varphi^*(z_i)) =$ ordre en t de $\varphi^*(z_i)$, on ait l'inégalité

$$v(\varphi^*(h)) \geq \inf (a_1^{(1)} v_1 + \dots + a_d^{(1)} v_d, \dots, a_1^{(p)} v_1 + \dots + a_d^{(p)} v_d)$$

ce qui implique que toute forme linéaire à coefficients (v_1, \dots, v_d) prend, sur les exposants des monômes apparaissant dans la série h , une valeur au moins égale au minimum des valeurs qu'elle prend sur les exposants des monômes engendrant I . (On laisse le lecteur vérifier que les annulations possibles par sommes de monômes de h peuvent être évitées par un choix "générique" des coefficients des séries $\varphi^*(z_i) \in \mathbb{C}\{t\}$). Par conséquent, si $h \in \bar{I}$, tous les monômes $z_1^{b_1} \dots z_d^{b_d}$ apparaissant dans h sont tels que le point $(b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ appartient à l'enveloppe convexe $N(I)$ dans \mathbb{R}^d de l'ensemble

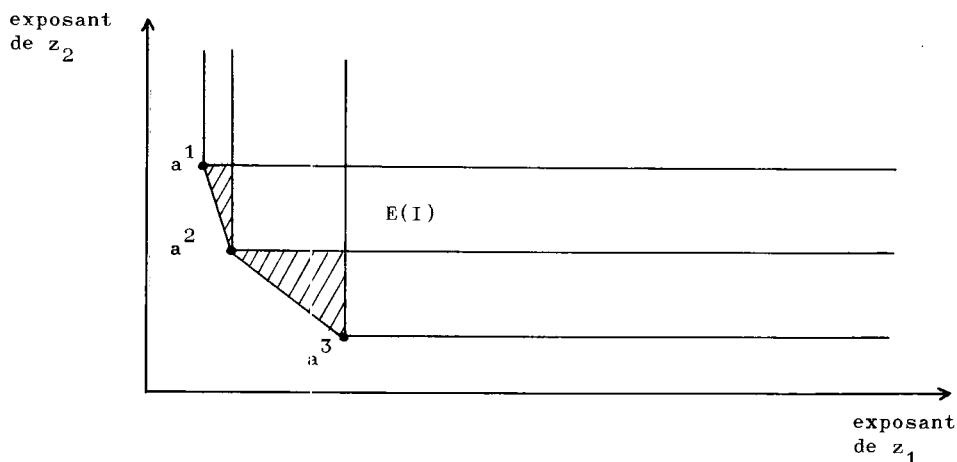
$$E(I) = \bigcup_{i=1}^p (a^{(i)} + \mathbf{R}_+^d) \quad \text{où } a^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_d^{(i)}).$$

Inversement, si l'exposant (b_1, \dots, b_d) se trouve dans cette enveloppe convexe, le monôme $z_1^{b_1} \dots z_d^{b_d}$ est entier sur l'idéal I (exercice : écrire la relation de dépendance intégrale).

Par conséquent :

L'idéal \bar{I} est engendré par les monômes dont les points représentatifs sont situés dans l'enveloppe convexe $N(I)$ de l'ensemble $E(I) = \bigcup_{i=1}^p (a^{(i)} + \mathbf{R}_+^d)$ des points représentant les monômes qui appartiennent à I .

Exemple : $d = 2, k = 3$. La partie hachurée est $N(I) - E(I)$.



Ainsi, la différence entre I et \bar{I} , pour un idéal I engendré par des monômes dans $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\}$, est visualisée par les points entiers de $N(I)$ qui ne sont pas dans $E(I)$. Il faut contraster ceci avec le fait que \sqrt{I} est engendré par les monômes $z_1^{b_1} \dots z_d^{b_d}$ tels que $(\nu b_1, \dots, \nu b_d) \in E(I)$ pour un certain $\nu \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire appartenant à l'intérieur du cône de sommet 0 sur $E(I)$.

Si l'on observe que pour des idéaux I et J engendrés par des monômes, on a l'égalité $E(I \cdot J) = E(I) + E(J)$, la description classique de l'enveloppe convexe comme ensemble des barycentres implique que, étant donnés d points $b^{(1)}, \dots, b^{(d)}$ dans $N(I)$, leur somme $b^{(1)} + \dots + b^{(d)}$ appartient à $E(I)$, ce qui

se traduit en termes d'idéaux par l'inclusion

$$(\bar{I})^d \subset I .$$

Il se trouve que cette inclusion est vraie pour tous les idéaux dans les anneaux de séries convergentes, et en fait dans tout anneau local régulier A , avec $d = \dim A$ (cf. [B-S], [Li-T] et [Li-S]).

§ 3. Dépendance intégrale et inégalité de Łojasiewicz.

Les résultats qui suivent sont des conséquences assez faciles de la Proposition 2 du § 1, et sont prouvés en détail dans ([Le-T 1]).

Définition 1 : Soient I un idéal d'un anneau A . On appelle fonction d'ordre associée à I , et l'on note v_I l'application $v_I : A \rightarrow \mathbb{N}$ qui à $h \in A$ associe $\text{Sup}\{v \mid h \in I^v\}$.

On a : $v_I(h + h') \geq \inf(v_I(h), v_I(h'))$, $v_I(h \cdot h') \geq v_I(h) + v_I(h')$, et en particulier $v_I(h^k) \geq k \cdot v_I(h)$, avec égalité si et seulement si la classe $\text{in}_I(h)$ de h dans $I^{v_I(h)} / I^{v_I(h)+1}$ n'est pas nilpotente dans $\text{gr}_I A = \bigoplus_{v \geq 0} I^v / I^{v+1}$.

Définition 2 : On appelle "nu barre" de h , et l'on note $\bar{v}_I(h)$ la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{v_I(h^k)}{k} \in \mathbb{R}$. (Exercice : montrer que cette limite existe.)

On a : $\bar{v}_I(h + h') \geq \inf(\bar{v}_I(h), \bar{v}_I(h'))$ et maintenant : $\bar{v}_I(h^k) = k \cdot \bar{v}_I(h)$.

Théorème (Samuel-Nagata-Lejeune-Teissier, cf. [Sa], [Na], [Le-T 1]) : Soit I un idéal dans une algèbre analytique A .

- Pour tout $h \in A$, $\bar{v}_I(h)$ est un nombre rationnel, ou $+\infty$.
- Si $A = \mathcal{O}_{X,y}$ et $I = I_y$, $h = h_y$ pour un espace analytique réduit X , un faisceau cohérent d'idéaux I sur X , comme dans la Proposition 2 du § 1, et $h \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$, $y \in Y$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\bar{v}_I(h) \geq \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$).

ii) Il existe un voisinage U de y dans X et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que l'on ait l'inégalité de Łojasiewicz

$$|h(x)|^{b/a} \leq C \sup_i |g_i(x)| \quad (x \in U)$$

(pour un système de générateurs g_1, \dots, g_p de $H^0(U, I)$ dans $H^0(U, \mathcal{O}_X)$ fixé).

c) Pour tout rationnel a/b , il existe un unique faisceau cohérent d'idéaux intégralement clos $\overline{I^{a/b}}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait

$$(\overline{I^{a/b}})_x = \{h \in \mathcal{O}_{X,x} / \bar{v}_I(h) \geq a/b\} .$$

Remarques : 1) L'énoncé a) est vrai plus généralement dès que A est un anneau local noëtherien pseudo-géométrique au sens de Nagata.

2) Un corollaire du Théorème est : $h \in \bar{I}$ si et seulement si $\bar{v}_I(h) \geq 1$.

3) Si l'idéal I est engendré par des monômes dans $\mathbb{E}\{z_1, \dots, z_d\}$, et si h est un monôme, on voit que $(\bar{v}_I(h))^{-1}$ est le plus petit nombre réel r tel que $(r b_1, \dots, r b_d)$ appartienne à $N(I)$.

4) On a l'égalité $\bar{v}_I(h) = \bar{v}_{\bar{I}}(h)$.

§ 4. Clôture intégrale d'idéaux et multiplicités.

L'exemple précédent a montré que le passage de I à \bar{I} perd beaucoup moins d'information que le passage de I à \sqrt{I} . Dans le cas particulier des idéaux primaires pour l'idéal maximal dans un anneau local A , on peut exprimer numériquement de façon précise l'information qui est conservée dans le passage de I à \bar{I} .

Proposition-Définition ([Se], chap. II et chap. V, No 2), [Bbk 3], § 4) :

Soient A un anneau, noëtherien et I un idéal de A tel que $\ell_{g_A} A/I < +\infty$. Alors, pour tout entier $v \geq 1$, $\ell_{g_A} A/I^v$ est finie, et il existe v_0 et un polynôme $p(v)$ de degré $d = \dim A$ à coefficients tel que $\ell_{g_A} A/I^v = p(v)$ pour $v \geq v_0$. De plus $p(v)$ peut être écrit $\frac{e(I)}{d!} v^d +$ termes de degré $< v$ où $e(I)$ est un entier appelé

multiplicité de l'idéal I dans A .

4.1 Théorème (Rees [Re]) : On a l'égalité $e(I) = e(\bar{I})$, (deux idéaux ayant même fermeture intégrale ont donc même multiplicité) et réciproquement, si I et J sont deux idéaux de colongueur finie de A tels que $I \subseteq J$ et $e(I) = e(J)$ on a : $\bar{I} = \bar{J}$, dès que le complété \hat{A} de A est équidimensionnel.

Exemple : Supposons (cf. § 2) l'idéal I engendré par des monômes dans $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\}$. La longueur sur A de A/I est égale à $\dim_{\mathbb{C}} A/I$ puisque A est une \mathbb{C} -algèbre, et est très clairement égale au nombre de points à coordonnées entières de $\mathbb{R}_+^d - E(I)$. Nous supposons donc ce nombre fini, ce qui dans le cas $d = 2$ revient à supposer que $E(I)$ rencontre les deux axes de coordonnées, ou que I contient un monôme $z_1^{a_1}$ et un monôme $z_2^{a_2}$. On a donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\}/I^{\nu} = \#\{\mathbb{N}^d - E(I^{\nu})\}$ et par ailleurs on a, par la description de l'enveloppe convexe comme ensemble de barycentres :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\nu} \cdot E(I^{\nu}) \right) = N(I)$$

et par conséquent, puisque le calcul classique des volumes donne :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathbb{N}^d - E(I^{\nu})\}}{\nu^d} = \text{Vol.}(\mathbb{R}_+^d - N(I))$$

(où le terme de droite est appelé covolume de $N(I)$, et noté $\text{Covol.}N(I)$) on a l'égalité :

$$e(I) = d! \cdot \text{Covol.}N(I)$$

L'essentiel du théorème de Rees, dans ce cas particulier, revient donc à l'assertion que puisque $I \subseteq J$ (idéaux engendrés par des monômes) implique $N(I) \subseteq N(J)$, l'égalité $\text{Covol.}N(I) = \text{Covol.}N(J)$ implique $N(I) = N(J)$, c'est-à-dire $\bar{I} = \bar{J}$.

en gros l'énoncé revient donc à : si $A \subseteq B$ sont des polytopes convexes et si $\text{Vol.}(A) = \text{Vol.}(B)$, on a $A = B$.]

Le Théorème ci-dessous donne un énoncé numérique bien meilleur, en ce qu'il ne suppose pas que l'on a a priori $I \subseteq J$; citons d'abord la :

Proposition : Soient I_1 et I_2 deux idéaux de A , tels que $\ell_{g_A} A/I_1$ et $\ell_{g_1} A/I_2$ soient finis. Il existe des entiers e_i , $0 \leq i \leq d = \dim A$ tels que l'on ait, pour v_1, v_2 entiers positifs : $e(I_1^{v_1} \cdot I_2^{v_2}) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} e_i v_1^i v_2^{d-i}$. Les e_i sont appelés multiplicités mixtes de I_1 et I_2 , et interprétés dans ([Te 1], ch. I, § 2). Ils ne dépendent que de \bar{I}_1 et \bar{I}_2 , on note que $e_0 = e(I_2)$, $e_d = e(I_1)$.

Dans le cas des idéaux engendrés par des monômes dans $\mathbb{F}\{z_1, \dots, z_d\}$, ceci correspond au résultat suivant, facile à prouver par récurrence sur d :

Etant données deux régions convexes polygonales à sommets entiers $N(I_1)$ et $N(I_2)$ de covolume fini dans \mathbb{R}_+^d , il existe des rationnels $w_i \in \mathbb{Q}_+$, $0 \leq i \leq d$, tels que l'on ait, pour $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$\text{Covol.}(v_1 \cdot N(I_1) + v_2 \cdot N(I_2)) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} w_i v_1^i v_2^{d-i}.$$

Il est facile dans ce cas de vérifier que

$$e_i = d! w_i \quad (0 \leq i \leq d).$$

Les w_i sont appelés covolumes mixtes de $N(I_1)$ et $N(I_2)$; on note que $w_0 = \text{Covol.}(N(I_2))$, $w_d = \text{Covol.}(N(I_1))$.

Dans ([Te 7], [Te 8], [R-S]) on trouve la preuve de :

4.2 Théorème : Soient A un anneau local nœtherien, I_1 et I_2 deux idéaux de A primaires pour l'idéal maximal. On a les inégalités

$$e_{i-1}^2 \leq e_i \cdot e_{i-2} \quad (2 \leq i \leq d).$$

Si l'on suppose de plus A normal et son complété A^\wedge équidimensionnel on a les

égalités $e_0 = e_1 = \dots = e_d$ si et seulement si l'on a $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$.

Remarques : Ces inégalités impliquent les inégalités analogues $w_{i-1}^2 \leq w_i \cdot w_{i-2}$ entre les covolumes mixtes, qui sont à rapprocher (cf. [Te 7]) des inégalités de Aleksandrov-Fenchel entre les volumes mixtes de convexes dans \mathbf{R}^d que voici : soient K_1 et K_2 deux convexes compacts dans \mathbf{R}^d . On peut montrer que l'on a une expression polynomiale pour le volume du convexe $v_1 \cdot K_1 + v_2 \cdot K_2$ ($v_1, v_2 \in \mathbf{R}_+$) :

$$\text{Vol.}(v_1 K_1 + v_2 K_2) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} v_i v_1^i v_2^{d-i}$$

($v_0 = \text{Vol.}(K_2)$, $v_d = \text{Vol.}(K_1)$),

et l'on a entre les volumes mixtes v_i et K_1 et K_2 les inégalités de Aleksandrov-Fenchel, qui sont une généralisation des inégalités isopérimétriques :

$$v_{i-1}^2 \geq v_i \cdot v_{i-2} \quad (2 \leq i \leq d)$$

avec l'égalité $v_0 = v_1 = \dots = v_d$ si et seulement si $K_1 = K_2$ à translation près (cf. [Al.], [Te 9], [Te 10]).

Ainsi, tandis que l'analogue du théorème de Rees dans la théorie des convexes est : $K_1 \subseteq K_2$ et $\text{Vol.}(K_1) = \text{Vol.}(K_2)$ implique $K_1 = K_2$, l'analogue du Théorème ci-dessus est le résultat d'Aleksandrov-Fenchel. Il faut remarquer que le théorème ci-dessus implique le théorème de Rees puisque l'on vérifie facilement que l'inclusion $I_1 \subseteq I_2$ implique les inégalités : $e(I_1) \geq e_i \geq e(I_2)$.

4.3 Rappelons enfin le résultat suivant, d'une nature plus élémentaire que les précédents (cf. [Bbk 3], § 7) :

Soient \mathcal{O} un anneau local nœtherien réduit, \mathcal{O}' un sous-anneau (semi-local) de l'anneau total des fractions de \mathcal{O} , contenant \mathcal{O} et entier sur \mathcal{O} . Pour tout idéal I de \mathcal{O} primaire pour l'idéal maximal, si l'on note m'_1, \dots, m'_r les idéaux maximaux de \mathcal{O}' , et m l'idéal maximal de \mathcal{O} , on a l'égalité :

$$e(I) = \sum_{i=1}^r e(I\mathcal{O}'_{m'_i}) \cdot \dim_{\mathcal{O}/m} \mathcal{O}'/m'_i$$

On écrira aussi $e(I\mathcal{O}')$ pour la somme de droite.

Nous retiendrons que si $\pi: X' \rightarrow X$ est un morphisme fini biméromorphe d'espaces analytiques, et $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ un idéal primaire pour l'idéal maximal, $I\mathcal{O}_X$ se décompose dans $\mathcal{O}_{X',\pi^{-1}(x)} = \prod_{x' \in \pi^{-1}(x)} \mathcal{O}_{X',x'}$ en idéaux primaires $I'_{x'}$, et l'on a l'égalité :

$$e(I) = \sum_{x' \in \pi^{-1}(x)} e(I'_{x'}) = e(I\mathcal{O}_{X',\pi^{-1}(x)}).$$

§ 5. Le principe de spécialisation de la dépendance intégrale.

Je rappelle ici, sans démonstration, un résultat qui nous servira dans le prochain paragraphe, mais dont nous pourrions nous passer au prix d'une référence à la théorie de la saturation de Zariski. Ce même résultat jouait un rôle crucial dans la démonstration du théorème " μ^* constant implique les conditions de Whitney" (cf. [Te 1], chap. II, § 3) que le résultat principal de ce travail ci généralise. Il est intéressant de noter que dans la preuve que nous verrons au Chapitre V, il est remplacé par un argument de récurrence, reposant essentiellement sur la transversalité et sur un résultat apparenté au théorème de Bertini idéaliste. Le paragraphe se termine pas une caractérisation géométrique de l'équimultiplicité qui sera très utile au Chapitre V.

5.1 Proposition ([Te 2], Appendice I, [Te 1], Chap. II, § 3, Prop. 3.1) :
Soit $F: (X,x) \rightarrow (S,s)$ un germe de morphisme plat entre espaces analytiques réduits, et soit I un \mathcal{O}_X -idéal cohérent de support X , tel que la restriction de F au sous-espace Y de X défini par I soit un morphisme fini $F: Y \rightarrow S$, et tel que pour tout représentant assez petit $F: X \rightarrow S$ de F , la multiplicité $e(I\mathcal{O}_{X(s')})$ soit indépendante de $s' \in S$ ($e(I\mathcal{O}_{X(s')})$ désigne la somme des multiplicités des idéaux primaires induits par I dans chacun des anneaux locaux $\mathcal{O}_{X(s'),x_i}$, $x_i \in Y(s')$). Soit $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de l'idéal I , et soit D le diviseur exceptionnel, défini par l'idéal inversible $I\mathcal{O}_{\bar{X}}$, ; alors la fibre $D(s)$ au-dessus de $s \in S$ du morphisme composé $D \xrightarrow{\pi/D} X \rightarrow S$ est de dimension $\dim X - \dim S - 1$.

Corollaire (Principe de spécialisation de la dépendance intégrale) : La restriction $\pi : D_i \rightarrow Y$ de π à chaque composante irréductible D_i de D est surjective, et par conséquent, pour un élément $h \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ les conditions suivantes sont équivalentes

- i) Il existe un fermé analytique rare F de S tel que, pour tout $s' \in S - F$, on ait l'inclusion $h \mathcal{O}_{X(s')} \subset \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X(s')}} \cdot$
- ii) On a l'inclusion : $h \in H^0(X, \overline{I})$, et donc en particulier $h \mathcal{O}_{X(s)} \subset \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X(s)}} \cdot$

5.1.1 Remarques : 1) Le point fondamental est que l'équimultiplicité empêche l'existence de "composantes verticales" dans le diviseur exceptionnel de l'éclatement de I dans \mathcal{O}_X (la normalisation n'est là que pour que nous n'ayons pas à surveiller les composantes immergées). Le corollaire s'en déduit facilement au vu du fait que, grâce cette fois à la normalité, le lieu polaire de la "fonction méromorphe" $I^{-1}h$ est soit de codimension 1 (et est alors union de composantes de D) soit vide, et que la surjectivité des morphismes $\pi : D_i \rightarrow Y$, (conséquence immédiate du Théorème) jointe à i) implique que ce lieu polaire ne peut contenir de composante de D .

2) Pour une algébrisation et extension de ces résultats, lire [Li].

3) On peut préciser le point 1) sur l'existence de composantes verticales comme ceci : soit $p : X' \rightarrow X$ l'éclatement de I , et soit $D = p^{-1}(Y) \simeq \text{Proj}_{\mathcal{O}_Y}(\bigoplus_{v \geq 0} I^v / I^{v+1})$ le diviseur exceptionnel, muni du faisceau inversible $\mathcal{O}_D(1)$ qui est ample par rapport à p et provient du X -plongement local $X' \subset X \times \mathbb{P}^M$, où $M+1$ est le nombre des générateurs de I . On appelle i -ème classe de Segré covariante de Y dans X le cycle $s^i(Y, X) = p_*(c_1(\mathcal{O}_D(1))^{d-1-i})$ où $d = \dim X$, cycle appartenant au groupe $A_i(X)$ des cycles de dimension i de X . On appelle classe de Segre de Y dans X , la somme $s(Y, X) = \sum_{i=0}^{\dim X} s^i(Y, X)$, et en particulier, d'après un résultat prouvé par C.P. Ramanujam ([Ra], voir aussi [Kl 2]) si $|Y|$ est un point $x \in X$, on a $s(Y, X) = e(I \cdot \mathcal{O}_{X, x}) \cdot [x]$, et donc $e(I \cdot \mathcal{O}_{X, x}) = \deg_D(\mathcal{O}_D(1)) = \int (c_1(\mathcal{O}_D(1))^{d-1})$. Le lecteur est prié, en utilisant ce résultat et le théorème de Bezout (plus précisément les propriétés élémentaires

du degré des faisceaux inversibles) de vérifier l'égalité très utile que voici, qui précise ([Te 1], Chap. II, § 3, Prop. 3.1),

Soient $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ un morphisme d'espaces réduits, I un idéal de \mathcal{O}_X définissant un sous-espace $Y \subset X$ tel que $f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{D}$ soit fini, $p : X' \rightarrow X$ l'éclatement de Y , $D_{\text{vert.}}$ la réunion des composantes du diviseur exceptionnel D (non nécessairement réduites) dont l'image ensembliste par p est 0 ,

$\deg D_{\text{vert.}} = \deg(\mathcal{O}_{D_{\text{vert.}}}^{\vee}(1))$. Pour tout représentant suffisamment petit du germe de f en 0 , on a l'égalité

$$\deg D_{\text{vert.}} = e(I \cdot \mathcal{O}_{X(0)}) - e(I \cdot \mathcal{O}_{X(s)}) \quad (\text{pour } s \neq 0) \quad .$$

En particulier, on a " $e(I \cdot \mathcal{O}_{X(s)})$ est indépendant de $s \in \mathbb{D}$ " si et seulement si $\dim p^{-1}(0) = \dim X - 2$.

5.2 Application : Utilisons ce résultat pour donner l'interprétation géométrique de la multiplicité d'un espace analytique complexe X en un de ses points, c'est-à-dire la multiplicité dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{X,x}$: d'abord un lemme explicitant ([Li], § 1), et conséquence facile de 1.1 et de Nakayama :

Soient \mathcal{O} une algèbre analytique de dimension d , et soit $\mathfrak{m} = (z_1, \dots, z_N)$ son idéal maximal ; pour une suite (y_1, \dots, y_d) de d éléments de \mathfrak{m} linéairement indépendants modulo \mathfrak{m}^2 , les conditions suivantes sont équivalentes

- i) L'idéal \mathfrak{m} est entier sur l'idéal $(y_1, \dots, y_d)\mathcal{O}$.
- ii) Posant $\mathcal{O}_1 = \mathbb{C}\{y_1, \dots, y_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}$, et $\mathfrak{m}_1 = (y_1, \dots, y_d)\mathcal{O}_1$, le morphisme naturel d'algèbres graduées

$$\bigoplus_{v \geq 0} \mathfrak{m}_1^v / \mathfrak{m}_1^{v+1} = \text{gr}_{\mathfrak{m}_1} \mathcal{O}_1 \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}} \mathcal{O} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathfrak{m}^v / \mathfrak{m}^{v+1}$$

est fini.

Remarquons tout de suite que la condition ii) est équivalente à la condition géométrique suivante : soit $(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$ le plongement du germe $(X, 0)$ correspondant à l'algèbre \mathcal{O} , et soit $\pi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^d$ la projection linéaire définie

par $(\text{in}_{\mathfrak{M}} y_1, \dots, \text{in}_{\mathfrak{M}} y_d)$, où $\text{in}_{\mathfrak{M}} y_i \in \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ désigne la forme initiale (classe de y_i modulo \mathfrak{M}^2), et soit $C_{X,x} \subset \mathbb{C}^N$ le cône tangent $\text{Spec gr}_{\mathfrak{M}} \mathcal{O}$ à X en 0 . Alors $|\text{Ker } \pi \cap C_{X,x}| = \{0\}$, c'est-à-dire que $\text{Ker } \pi$ est transverse à X en 0 . On dit aussi que π est une projection transversale. Considérons maintenant le sous-espace Y de X défini par l'idéal I engendré par $d-1$ éléments (y_1, \dots, y_{d-1}) , et munissons X de la projection $F: X \rightarrow \mathbb{C}^d$ définie par y_d . On suppose que (y_1, \dots, y_d) est un idéal primaire de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Soit $p: X' \rightarrow X$ l'éclatement de Y dans X ; on a $X' \subset X \times \mathbb{P}^{d-2}$, donc $\dim p^{-1}(0) = d-2$, et d'après le résultat précédent, pour tout représentant assez petit de X on a donc $e(I \cdot \mathcal{O}_{X(0)}) = e(I \cdot \mathcal{O}_X(\eta_d))$, pour tout $\eta_d \in \mathbb{C}^d$ assez petit. En particulier si (y_1, \dots, y_d) définissent une projection transversale $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^d$, et si la droite de \mathbb{C}^d définie par $y_1 = \dots = y_{d-1} = 0$ n'est pas contenue dans le discriminant de π , on a $e(I \cdot \mathcal{O}_{X(0)}) = m_0(X)$, multiplicité de X en 0 , puisque \mathfrak{M} est entier sur $(y_1, \dots, y_d)\mathcal{O}_X$, (cf. § 4) et pour $\eta_d \neq 0$, le sous-espace de \mathbb{C}^N défini par $y_1 = \dots = y_{d-1} = 0$, $y_d = \eta_d$, coupe X en des points non-singuliers de X , et transversalement; en chacun de ces points, disons $x_i(\eta_d)$ on a $e(I \cdot \mathcal{O}_{X(\eta_d), x_i}) = 1$, et ces points sont donc au nombre de $m_0(X)$. On a ainsi vérifié en particulier :

5.3 La multiplicité $m_0(X)$ de $X \subset \mathbb{C}^N$ est le nombre des points en lesquels un sous-espace linéaire H_{η_d} de dimension $N-d$, voisin de 0 et parallèle à une direction transverse à X en 0 , coupe X , (et qui tendent vers 0 , quand $\eta_d \rightarrow 0$).
C'est aussi le degré local en x d'une projection transversale $\pi: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$, c'est-à-dire la multiplicité dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de l'idéal engendré par les composées avec π des fonctions coordonnées sur $(\mathbb{C}^d, 0)$.

5.4 Corollaire : Etant donné $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, pour chaque entier k , $0 \leq \dim X$, il existe un ouvert de Zariski dense U de la grassmannienne des plans de codimension k dans \mathbb{C}^N tel que pour tout sous-espace non-singulier de codimension k $(L, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ tel que $T_{L,0} \in U$, on ait l'égalité $m_0(L \cap X) = m_0(X)$.

C'est pourquoi nous n'aurons aucun mal, dans la preuve ci-dessous, à

choisir des rétractions locales $\rho: \mathbb{C}^N \rightarrow Y$, $Y \subset X$ sous-espace non-singulier, telles que $m_y(\rho^{-1}(y) \cap X) = m_y(X)$, pour $y \in Y$.

Remarque : L'avatar algébrique, plus précis, du résultat ci-dessus est l'existence d'éléments superficiels (cf. [Bbk 3], § 7).

5.5 Corollaire ("nonséparation", cf. [Te 11], 2.8.5 et Th. 5, [Li 1], 4.3) : Soient X un espace analytique complexe, $Y \subset X$ un sous-espace non-singulier, et $0 \in Y$. Pour tout plongement local $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, considérons les sous-espaces non-singuliers $(H, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ contenant Y , de dimension $N - \dim X + \dim Y$ et tels que $\dim(X \cap H) = \dim Y$.

a) Si l'application $Y \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $y \mapsto m_y(X)$ est localement constante sur Y au voisinage de 0 , c'est-à-dire si X est équimultiple le long de Y en 0 , pour tout sous-espace non-singulier $H \subset \mathbb{C}^N$ contenant Y et tel que

$$|T_{H,0} \cap C_{X,0}| = T_{Y,0}, \text{ on a l'égalité}$$

$$|H \cap X| = Y$$

au voisinage de x , et de plus on a $|T_{H,y} \cap C_{X,y}| = T_{Y,y}$ pour tout $y \in Y$ voisin de 0 .

b) Inversement, si il existe un ouvert de Zariski dense U dans la grassmannienne des sous-espaces linéaires de \mathbb{C}^N de dimension $N - \dim X + \dim Y$ tel que, pour tout sous-espace non-singulier $(H, 0)$ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ de dimension $N - \dim X + \dim Y$, contenant Y , et tel que $T_{H,0} \in U$, on ait l'égalité $|H \cap X| = Y$, alors X est équimultiple le long de Y en 0 .

Prouvons a) : On a $\dim C_{H \cap X, 0} = \dim Y$ puisque $C_{H \cap X, 0} \subseteq T_{H,0} \cap C_{X,0}$; puisque $(H \cap X, 0)$ se spécialise platement sur son cône tangent, on a donc aussi $\dim(H \cap X) = \dim Y$. Nous pouvons donc choisir une rétraction locale $\rho: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$ telle que $\rho^{-1}(0)$ soit transverse à X , c'est-à-dire $m_0(\rho^{-1}(0) \cap X) = m_0(X)$ et que le morphisme $H \cap X \rightarrow Y$ induit par ρ soit fini. L'hypothèse implique que $\rho^{-1}(0) \cap H$ est transverse à $\rho^{-1}(0) \cap X$ dans $\rho^{-1}(0)$,

car $|\mathbb{T}^{-1}(0) \cap \mathbb{H}, 0 \cap \mathbb{C}^{-1}(0) \cap X, 0| = \{0\}$. Il suffit alors de contempler le diagramme (où on a noté $X(y)$ pour $\rho^{-1}(y) \cap X$)

$$\begin{array}{ccc}
 e(I \cdot \mathcal{O}_{X(0),0}) & \geq & e(I \cdot \mathcal{O}_{X(y),y}) + \sum_{x_i \in \rho^{-1}(y) \cap \mathbb{H} \cap X - Y} e(I \cdot \mathcal{O}_{X(y),x_i}) \\
 \parallel & & \vee \\
 m_0(X) & = & m_y(X) \quad ,
 \end{array}$$

où la première inégalité vient de la semi-continuité de la multiplicité, conséquence directe du résultat précédent. (En fait, dans ce cas-ci, on a même égalité), et l'égalité verticale vient de l'hypothèse de transversalité. Puisque par ailleurs $e(I \cdot \mathcal{O}_{X(y),y}) \geq m_y(X)$, on en conclut $\rho^{-1}(t) \cap \mathbb{H} \cap X - Y = \emptyset$ donc $|\rho^{-1}(y) \cap \mathbb{H} \cap X| = \{y\}$ pour tout $y \in Y$, c'est-à-dire $|\mathbb{H} \cap X| = Y$, et la transversalité.

Prouvons b) : Par semi-continuité de la multiplicité, si X n'était pas équimultiple le long de Y , on pourrait trouver une courbe non-singulière $(C,0) \subset (Y,0)$ telle que, pour une rétraction locale $\rho: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y,0)$, vérifiant $m_y(\rho^{-1}(y) \cap X) = m_y(X)$, $y \in C - \{0\}$, l'espace $X \cap \rho^{-1}(C)$ ne soit pas équimultiple le long de C . On se ramène ainsi à vérifier l'énoncé dans le cas où Y est une courbe. Dans ce cas, $\mathbb{H} \cap X$ est défini par $\dim X - 1$ équations dans X , donc la fibre de son éclatement dans X est de dimension $\dim X - 2$. Par ailleurs, quitte à rétrécir l'ouvert U , on peut supposer que $\rho^{-1}(y) \cap \mathbb{H}$ est transverse à $\rho^{-1}(y) \cap X$ en y pour tout $y \in Y - \{0\}$ (il suffit d'imposer que les transformés stricts H' et X' de \mathbb{H} et X par l'éclatement de Y dans \mathbb{C}^N soient disjoints au-dessus de $Y - \{0\}$ ce qui est clairement impliqué par une condition ouverte sur $T_{\mathbb{H},0}$). Puisque pour $T_{\mathbb{H},0} \in U$, on a $|\mathbb{H} \cap X| = Y$ par hypothèse, le fait que la fibre au-dessus de 0 de l'éclatement de $\mathbb{H} \cap X$ dans X soit de dimension $d - 2$ et la transversalité nous donnent pour $y \in Y$, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 e(I \cdot \mathcal{O}_{X(0),0}) & = & e(I \cdot \mathcal{O}_{X(y),y}) \\
 \vee & & \parallel \\
 m_0(X) & \geq & m_y(X)
 \end{array}$$

d'où $m_o(X) = m_y(X)$, et le résultat cherché. ■

Remarque : On pourrait aussi bien prouver ce résultat en considérant une projection générale $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ où $d = \dim X$; par les techniques exposées au Chapitre IV, on se ramène alors à prouver le résultat pour l'hypersurface $X_1 = p(X)$, et un calcul direct suffit alors.

§ 6. Saturation lipschitzienne.

Je rappelle ici les traits de la théorie, inspirée à F. Pham et moi par la théorie de la saturation de Zariski, qui nous seront utiles plus loin (cf. [P-T], [P], aussi [Li 2], [Bo]), et je signale une erreur d'un travail précédent qui m'a été signalée par Mr. E. Bøger.

6.1 Soit X un espace analytique complexe réduit, et notons $n: \bar{X} \rightarrow X$ sa normalisation. Considérons l'immersion naturelle $i: \bar{X} \times_{\bar{X}} \bar{X} \rightarrow \bar{X} \times_{\bar{X}} \bar{X}$ du produit fibré dans le produit. Si l'espace X est séparé, ce que nous pouvons supposer pour simplifier puisque nous ne nous intéresserons qu'à des problèmes de nature locale, l'immersion i est une immersion fermée définie par un faisceau cohérent d'idéaux I . Considérons le sous-faisceau \mathcal{O}_X^S du faisceau $\bar{\mathcal{O}}_X$ [des germes de fonctions méromorphes "faiblement holomorphes" c'est-à-dire localement bornées sur X] associé au préfaisceau défini par $U \rightarrow \{h \in \bar{\mathcal{O}}_X(U) / h \otimes 1 - 1 \otimes h \in I(U)\}$ pour tout ouvert U de X , où $h \otimes 1 - 1 \otimes h$ désigne la différence des composés de h avec les deux projections $\bar{X} \times_{\bar{X}} \bar{X} \xrightarrow[p_2]{p_1} X$, c'est-à-dire $h \circ p_1 - h \circ p_2$, et \bar{I} désigne la fermeture intégrale de l'idéal I .

Lemme : La \mathcal{O}_X -algèbre \mathcal{O}_X^S est un \mathcal{O}_X -module cohérent.

Notons $\mathcal{O}_{\bar{X}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\bar{X}} = \mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}}$ le produit tensoriel analytique; alors le \mathcal{O}_X -module \mathcal{O}_X^S est le noyau du morphisme de \mathcal{O}_X -modules

$$\bar{\mathcal{O}}_X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}} / \bar{I}$$

défini par $\varphi(f) = \text{image de } f \otimes 1 - 1 \otimes f$. Or le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}} / \overline{I}$ est quotient de $\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}} / I$ par un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}} / I \simeq \mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}}^s$ (puisque l'idéal \overline{I} est cohérent) et la \mathcal{O}_X -algèbre $\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}}^s$ est un \mathcal{O}_X -module cohérent puisque le produit fibré $\overline{X} \times_{\overline{X}} \overline{X}$ est fini au-dessus de X ([Ca], exp. 19, No 5). Ceci prouve que \mathcal{O}_X^s est le conoyau d'un homomorphisme de \mathcal{O}_X -modules cohérents, d'où le résultat.

Définition : Le morphisme fini $s : X^s \rightarrow X$, où $X^s = \text{Specan}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^s$ est appelé saturation lipschitzienne de l'espace analytique complexe réduit X .

Remarques : X^s est dominé par la normalisation de X , donc s est biméromorphe et par construction du Specan ([Ca], exp. 19) on a un isomorphisme de \mathcal{O}_X -modules $s_* \mathcal{O}_{X^s} \simeq \mathcal{O}_X^s$.

La terminologie est justifiée par :

6.1.1 Proposition : L'algèbre \mathcal{O}_X^s est le faiceau des germes de fonctions méromorphes localement lipschitziennes sur X .

Démonstration : Soit x un point de X , et soit $(X, x) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$ un plongement local. Il suffit de prouver que si $h \in (\mathcal{O}_X^s)_x$, on peut trouver un représentant du germe (X, x) sur lequel h s'étend en une fonction méromorphe localement lipschitzienne. Puisque en particulier $h \in \overline{\mathcal{O}_{X, x}}$, on peut étendre h en une fonction méromorphe localement bornée sur X . Nous voulons montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout couple $(x_1, x_2) \in X \times X$ on ait $|h(x_1) - h(x_2)| \leq C \|x_1 - x_2\|$. Notons z_1, \dots, z_N les fonctions coordonnées sur \mathbb{C}^N , et de même leur restriction à X . Au-dessus d'un voisinage de $X \times X$, l'idéal I dans $\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}}$ est engendré par les différences $z_i' - z_i''$, où $z_i' = z_i \circ \overline{p}_1$, $z_i'' = z_i \circ \overline{p}_2$, et $\overline{p}_i : \overline{X} \times \overline{X} \rightarrow \overline{X} \rightarrow X$. Par définition, et le critère transcendantal de dépendance intégrale, dire que $h \in (s_* \mathcal{O}_{X^s})_x$ équivaut à l'existence d'un représentant (X, x) tel que, pour $w \in \overline{X} \times \overline{X}$ on ait :

$$\begin{aligned} |h \circ \bar{p}_1(w) - h \circ \bar{p}_2(w)| &< C \sup_i |z_i'(w) - z_i''(w)| = C \sup_i |z_i'(\bar{p}_1(w)) - z_i'(\bar{p}_2(w))| \\ &= C \cdot \|\bar{p}_1(w) - \bar{p}_2(w)\| . \end{aligned}$$

Puisque le morphisme $\bar{X} \times \bar{X} \rightarrow X \times X$ est fini et surjectif, on en déduit aussitôt que h est bien localement lipschitzienne, et qu'inversement, en lisant cette preuve à l'envers, si h est méromorphe et localement lipschitzienne, le germe $(h)_X$ appartient à $(s_* \mathcal{O}_{X^S})_X$.

Exercices : 1) Démontrer de deux façons différentes (l'une fonctorielle et l'autre transcendante) qu'étant donné un morphisme $f: X \rightarrow Y$ entre espaces analytiques réduits qui se prolonge en un morphisme $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ entre les normalisés, il se prolonge en un morphisme $f^S: X^S \rightarrow Y^S$ entre les saturés lipschitziens.

2) Montrer que, pour tout $x \in X$, l'anneau $(\mathcal{O}_X^S)_x = \mathcal{O}_{X,x}^S$ est une algèbre analytique, donc en particulier local.

Exemple : Soit $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ un germe de courbe analytique réduite. Soit $X = \bigcup_i C_i$ sa décomposition en composantes irréductibles, et décrivons $(C_i,0)$ par une représentation paramétrique, c'est-à-dire comme image réduite d'un morphisme $(\mathbb{C},0) \rightarrow (\mathbb{C}^N,0)$ décrit par N fonctions $z_k(t_i) \in \mathbb{C}\{t_i\}$. Alors $\bar{X} = \bigsqcup_i (\mathbb{C},0)$ et l'algèbre de \bar{X} le long de l'ensemble fini $n^{-1}(0)$ est $\mathcal{O}_{\bar{X},n^{-1}(0)} \cong \prod_i \mathbb{C}\{t_i\}$. Par conséquent, l'algèbre $\mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}, n^{-1}(0) \times n^{-1}(0)}$ est isomorphe à $\prod_{i,j} \mathbb{C}\{t_i, t_j'\}$, l'idéal I définissant le germe de $\bar{X} \times \bar{X}$ le long de $n^{-1}(0) \times n^{-1}(0)$ est déterminée par la collection de ses images $I_{i,j}$ dans chacune des algèbres $\mathbb{C}\{t_i, t_j'\}$ et l'on a $I_{i,j} = (\{z_k(t_i) - z_k(t_j') ; 1 \leq k \leq N\})\mathbb{C}\{t_i, t_j'\}$ (ici $(\{ \})$ désigne l'idéal engendré par les éléments de l'ensemble $\{ \}$). Si l'on considère $h \in \prod_i \mathbb{C}\{t_i\} \simeq \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)}$, on a donc $h \in \mathcal{O}_X^S$ si et seulement si, pour tout couple (i,j) , on a l'inclusion : $h(t_i) - h(t_j') \in \overline{I_{i,j}}$.

6.2 Soit maintenant $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ un germe d'espace réduit. Pour étudier la saturation lipschitzienne de X , on est amené à étudier l'éclatement normalisé

dans $\overline{X} \times \overline{X}$ de l'idéal I définissant $\overline{X} \times \overline{X}$ (cf. I, § 1, Prop. 1). Or, c'est aussi l'éclatement normalisé dans $X \times X$ de l'idéal définissant la diagonale $\Delta_X \subset X \times X$, et cet éclatement-ci peut être décrit comme ceci : choisissons des coordonnées locales z_1, \dots, z_N sur \mathbb{C}^N , et considérons le morphisme $\text{dir.} : X \times X - \Delta_X \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ qui à $(x, x') \in X \times X - \Delta_X$ associe la direction de la sécante joignant x à x' dans \mathbb{C}^N ; l'éclatement E_X cherché est isomorphe à l'adhérence dans $X \times X \times \mathbb{P}^{N-1}$ du graphe du morphisme dir. , on a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_X & \xrightarrow{\text{dir.}} & \mathbb{P}^{N-1} \\ \downarrow b & & \\ X \times X & & \end{array}$$

avec $\dim E_X = 2d$, où $d = \dim X$.

L'ensemble des directions limites en 0 de sécantes peut être identifié au sous-ensemble algébrique $|b^{-1}(0 \times 0)| \subset \mathbb{P}^{N-1}$ et l'on a l'inégalité $\dim b^{-1}(0 \times 0) \leq 2d-1$ puisque cet ensemble est contenu dans le diviseur exceptionnel. Pour tout ceci, dans le contexte de la saturation lipschitzienne, voir ([P-T]). On a alors :

6.2.1 Proposition : Soit $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ un germe de courbe réduite et soit $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$ une projection linéaire. Notons $X_1 = p_* X$ l'image de X dans \mathbb{C}^2 (définie par le 0-ième idéal de Fitting $F_0(p_* \mathcal{O}_X)$, (cf. [Te 3]). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) La courbe X_1 est réduite, le morphisme $p|_X = \pi : X \rightarrow X_1$ est fini biméromorphe, et l'extension naturelle $\pi^S : X^S \rightarrow X_1^S$ aux saturés est un isomorphisme.
- 2) Aucune direction limite en 0 de sécantes à X n'est contenue dans le noyau de la projection p .

Prouvons 1) \Rightarrow 2) : Puisque π est fini et biméromorphe, le morphisme π s'étend naturellement en un isomorphisme $\overline{\pi} : \overline{X} \xrightarrow{\sim} \overline{X}_1$ des normalisations. Choisissons des coordonnées locales (z_1, \dots, z_N) sur \mathbb{C}^N telles que la projection p soit

définie par $(z_1, \dots, z_N) \mapsto (z_1, z_2)$. Soit I l'idéal de $\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}}$ engendré par les différences $(z_1 - z'_1, \dots, z_N - z'_N)$, idéal qui définit $\overline{X} \times \overline{X}$, et soit I_1 l'idéal engendré par $(z_1 - z'_1, z_2 - z'_2)$, idéal qui définit $\overline{X} \times_{X_1} \overline{X}$. Dire que l'extension π^S est un isomorphisme équivaut donc, au vu de la définition et du fait que l'on peut identifier \overline{X} et \overline{X}_1 , à dire que l'on a l'égalité de clôtures intégrales $\overline{I} = \overline{I}_1$. Ceci peut se traduire par le critère valuatif (1.3.4), ou comme ceci : il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute suite $(p_n, p'_n) \in X \times X - \Delta_X$ de couples de points, tendant vers $(0, 0)$, on ait, pour n assez grand, les inégalités

$$|z_k(p_n) - z_k(p'_n)| \leq C \cdot \text{Sup}\{|z_1(p_n) - z_1(p'_n)|, |z_2(p_n) - z_2(p'_n)|\}$$

pour $3 \leq k \leq N$.

Ceci implique que les points de \mathbb{P}^{N-1} représentant les directions des sécantes $\overline{p_n p'_n}$, qui ont pour coordonnées projectives

$$(z_1(p_n) - z_1(p'_n) : z_2(p_n) - z_2(p'_n) : \dots : z_N(p_n) - z_N(p'_n))$$

ne peuvent tendre vers une limite ayant pour coordonnées projectives

$$(0 : 0 : c_3 : \dots : c_N)$$

c'est-à-dire ne peuvent tendre vers une limite contenue dans le noyau de p .

Prouvons 2) \Rightarrow 1) : D'après l'hypothèse 2), tous les couples de points suffisamment voisins de 0 et distincts de 0×0 ont des images distinctes dans \mathbb{C}^2 par p , donc π induit un isomorphisme sur un ouvert dense de chaque composante de X , et est en particulier un morphisme fini puisque X est de dimension 1. Par conséquent π est un morphisme fini, son image est réduite puisque c'est une courbe plane qui ne peut avoir de composante immergée parce que X est de Cohen-Macaulay (cf. [Te 3], § 3) et que la définition par idéal de Fitting implique que si une composante irréductible de X_1 n'était pas réduite, au-dessus d'un point général de cette composante il y aurait au moins deux points de X (cf. Loc. cit.). Par conséquent, X_1 est réduite, π est fini et biméromorphe et donc induit un isomorphisme $\overline{\pi} : \overline{X} \xrightarrow{\sim} \overline{X}_1$ des normalisations. Il nous reste à montrer

l'égalité $\bar{I}_1 = \bar{I}$ qui impliquera l'isomorphisme des saturations : si cette égalité n'avait pas lieu, d'après le critère valuatif, il existerait un morphisme analytique $(\mathbb{D}, 0) \xrightarrow{h} \bar{X} \times \bar{X} \xrightarrow{n} X \times X$ tel que $n \circ h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset X \times X - \Delta_X$ et que notant $z_i(u)$ et $z'_i(u)$ les éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}, 0} = \mathbb{C}\{u\}$ donnés par $z_i \circ p_1 \circ n \circ h$ et $z_i \circ p_2 \circ n \circ h$ respectivement, on ait, pour au moins un entier k , $3 \leq k \leq N$ l'inégalité de valuations u-adiques

$$v(z_k(u) - z'_k(u)) < \inf\{v(z_1(u) - z'_1(u)), v(z_2(u) - z'_2(u))\}$$

en divisant $(z_1(u) - z'_1(u) : z_2(u) - z'_2(u) : \dots : z_N(u) - z'_N(u))$ par la plus grande puissance de u qui divise toutes les coordonnées, on voit que la limite dans \mathbb{P}^{N-1} , qui correspond à la direction limite des sécantes $\overline{z(u)z'(u)}$ est de la forme $(0 : 0 : c_3 : \dots : c_N)$, donc appartient au noyau de p , d'où la contradiction cherchée. ■

Définition : Etant donnée une courbe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, une projection linéaire $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$ est dite générale pour X si elle satisfait les conditions équivalentes de la Proposition. Une projection $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$ (i.e., submersion en 0) est dite générale pour une courbe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ si elle est conjuguée à une projection linéaire générale pour X par des changements de coordonnées sur \mathbb{C}^N et \mathbb{C}^2 tangents à l'identité en 0.

Cette définition est justifiée par le fait que la réunion des limites en 0 de sécantes à X , qui est le cône sur $|b^{-1}(0 \times 0)| \subset \mathbb{P}^{N-1}$ avec les notations introduites plus haut, est de dimension au plus 2, car $\dim b^{-1}(0 \times 0) \leq 1$ et donc pour une projection linéaire p générale, le noyau de p qui est de codimension 2 ne rencontre ce cône qu'en 0.

Remarque : On peut paraphraser une partie de ce qui précède en disant que pour une courbe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, une projection générale $\pi : X \rightarrow X_1 \subset \mathbb{C}^2$ non seulement est un homéomorphisme, mais est un homéomorphisme lipschitzien, c'est-à-dire que le morphisme analytique π admet un inverse lipschitzien. De plus, le

morphisme $s: X^S \rightarrow X$ est maximal pour la relation de domination parmi ceux qui factorisent la normalisation et qui sont des projections générales.

6.3 Algèbres analytiques saturées de dimension 1.

Nous allons rappeler ici sans démonstration complète, d'après Zariski ([G-T-S I et II] et Pham-Teissier (cf. [BGG] Appendice), la structure des algèbres analytiques saturées de dimension 1. D'après ce qui précède, toute algèbre analytique saturée de dimension 1 est la saturation de l'algèbre d'un germe de courbe plane réduite.

Soit donc $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,0}$ l'algèbre d'un germe de courbe plane réduite, d'équation $f(z_1, z_2) = 0$, où $f = f_1 \dots f_r$, chaque f_i étant une série convergente irréductible. Alors la fermeture intégrale de \mathcal{O} dans son anneau total de fractions est isomorphe à un produit direct $\prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$, et l'on peut choisir les uniformisantes locales t_i de telle façon que l'élément de $\mathcal{O}_{X,0} \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$ image de z_1 ait pour décomposition $(t_1^{n_1}, t_2^{n_2}, \dots, t_r^{n_r})$ dans $\overline{\mathcal{O}_{X,0}}$, où n_i est la multiplicité en 0 de la i -ème branche (c'est-à-dire composante irréductible) de X en 0, qui est définie par $f_i(z_1, z_2) = 0$. Soit $(z_2(t_1), z_2(t_2), \dots, z_2(t_r))$ la décomposition de l'élément correspondant à l'image de z_2 dans $\mathcal{O}_{X,0}$.

Alors, comme nous l'avons vu plus haut, l'idéal I de $\prod \mathbb{C}\{t_i, t'_j\}$ définissant $\overline{X} \times_{\overline{X}} \overline{X}$ dans $\overline{X} \times \overline{X}$ est déterminé par les idéaux

$$I_{i,j} = (t_i^{n_i} - t'_j{}^{n_j}, z_2(t_i) - z_2(t'_j)) \subset \mathbb{C}\{t_i, t'_j\} \quad .$$

Soit p le p.p.c.m. des multiplicités n_i , et pour chaque i , $1 \leq i \leq r$, soit $(n_i, \beta_1^{(i)}, \dots, \beta_{g_i}^{(i)})$ la suite des exposants caractéristiques de Puiseux du germe de courbe plane irréductible X_i défini par $f_i(z_1, z_2) = 0$. Soit $e_k^{(i)}$ le p.g.c.d. de $(n_i, \beta_1^{(i)}, \dots, \beta_k^{(i)})$ ($e_0^{(i)} = n_i$, $e_{g_i}^{(i)} = 1$) et soit $\tilde{E}_i \subset \mathbb{N}$ le sous-ensemble

$$(n_i, 2n_i, 3n_i, \dots, \beta_1^{(i)}, \beta_1^{(i)} + e_1^{(i)}, \beta_1^{(i)} + 2e_1^{(i)}, \dots, \beta_2^{(i)}, \beta_2^{(i)} + e_2^{(i)}, \beta_2^{(i)} + 2e_2^{(i)}, \dots, \beta_3^{(i)}, \dots, \beta_{g_i}^{(i)}, \beta_{g_i}^{(i)} + 1, \dots)$$

où chaque symbole "... " désigne une suite a priori infinie. En fait notre sous-ensemble contient tous les entiers à partir de $\beta_{g_i}^{(i)}$. Il faut aussi remarquer que c'est un semi-groupe.

D'autre part, pour chaque racine p-ième de l'unité ω et chaque élément

$h = (h_1, \dots, h_r) \in \overline{\mathcal{O}_{X,0}}$, on associe à chaque couple i, j l'entier

$m_{i,j,\omega}(h) = v(h_i(\tau^{p/n_i}) - h_j((\omega\tau)^{p/n_j}))$ où v désigne la valuation τ -adique et $h_i(\tau^{p/n_i})$ désigne la série en τ obtenue en substituant τ^{p/n_i} à t_i .

On note $m_{i,j,\omega}$ le nombre $\inf_{h \in \overline{\mathcal{O}_{X,0}}} (m_{i,j,\omega}(h))$.

6.3.1 Théorème (Zariski ([G-T-S II], Th. 3.1), Pham-Teissier (voir [B-G-G],

Appendice) : Etant donnée l'algèbre $\mathcal{O}_{X,0}$ d'un germe de courbe plane réduite, une présentation $\overline{\mathcal{O}_{X,0}} = \prod_i \mathbb{C}\{t_i\}$ où l'image de z_1 dans $\overline{\mathcal{O}_{X,0}}$ est $(t_1^{n_1}, \dots, t_r^{n_r})$,

n_i étant la multiplicité de la i -ième composante irréductible de X , on a :

un élément $h = (h_1, \dots, h_r) \in \overline{\mathcal{O}_{X,0}}$, $h_i = \sum h_{i,a} t_i^a$ ($h_{i,a} \in \mathbb{C}$) appartient au saturé $\mathcal{O}_{X,0}^s$ de $\mathcal{O}_{X,0}$ si et seulement si :

a) Pour chaque i , on a $h_{i,a} = 0$ si $a \notin \tilde{E}_i$.

b) Pour chaque racine p-ième de l'unité ω et chaque couple (i, j) , $i \neq j$,

on a l'inégalité

$$m_{i,j,\omega}(h) \geq m_{i,j,\omega}.$$

Voici l'esquisse d'une démonstration : puisque chacun des idéaux

$I_{i,j} = (t_i^{n_i} - t_j^{n_j}, z_2(t_i) - z_2(t_j))$ est engendré par une suite régulière,

d'après la Remarque suivant la Proposition 2 du § 1, (1.4) pour vérifier que

l'élément $(h \otimes 1 - 1 \otimes h') \in \mathbb{C}\{t_i, t_j\}$ est entier sur $I_{i,j}$, il suffit de le vérifier

en restriction à une courbe $\lambda(t_i^{n_i} - t_j^{n_j}) + \mu(z_2(t_i) - z_2(t_j))$ où $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ est

assez général. Or on vérifie facilement que cette famille de courbes paramétrée

par \mathbb{P}^1 (qui n'est autre que l'espace total de l'éclaté de $I_{i,j}$ dans \mathbb{C}^2) est

équisingulière au voisinage de $\lambda = 0$ et que le point $\lambda = 0$ est contenu dans

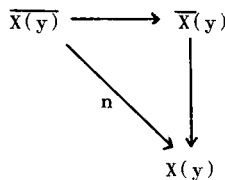
l'ouvert $V(h \otimes 1 - 1 \otimes h')$. On est donc ramené à décider si en restriction à la

courbe $t_i^{n_i} - t_j^{n_j} = 0$ de l'élément $(h \otimes 1 - 1 \otimes h')_{i,j}$ est entière sur $I_{i,j}$ (pour tout (i,j)), et le Théorème résulte presque aussitôt de là, en remarquant que $t_i = \tau^{p/n_i}$, $t_j = (\omega\tau)^{p/n_j}$, $\omega^p = 1$ paramétrise les branches de la courbe $t_i^{n_i} - t_j^{n_j} = 0$.

6.4 Saturation relative et équisaturation.

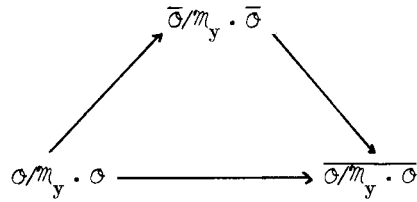
Soit $f : X \xrightarrow{\sigma} Y$ un morphisme d'espaces analytiques complexes muni d'une section σ . On suppose X réduit et Y non-singulier. Pour les applications que nous avons en vue, on supposera même que $\dim X = \dim Y + 1$ et que pour tout $y \in Y$, la fibre $(X_y, \sigma(y))$ est de dimension 1 et a une dimension de plongement ≤ 2 , (c'est-à-dire que les fibres sont des courbes planes). On suppose pour l'instant f séparé et l'on considère l'idéal I_f de $\mathcal{O}_{\bar{X}} \times_Y \bar{X}$ définissant le plongement fermé $\bar{X} \times_Y \bar{X} \hookrightarrow \bar{X} \times \bar{X}$. On considère à nouveau le sous-faisceau de $\bar{\mathcal{O}}_X$ associé au pré-faisceau défini par $U \mapsto \{h \in \bar{\mathcal{O}}_X(U) / h \otimes 1 - 1 \otimes h \in \bar{I}_f(U)\}$ et on le note $\mathcal{O}_X^{s(f)}$: c'est l'algèbre saturée lipschitzienne relative, et l'on vérifie sans mal que c'est le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur X qui satisfont localement une inégalité de Lipschitz pour les couples de points situés dans une même fibre de f .

Soit $f : X \xrightarrow{\sigma} Y$ un morphisme plat muni d'une section σ avec Y non-singulier, X réduit, et $\dim X = \dim Y + 1$, et soit $y \in Y$ un point tel que la fibre $X(y) = f^{-1}(y)$ soit une courbe réduite en $\sigma(y)$. Alors d'une part on a pour la normalisation un diagramme

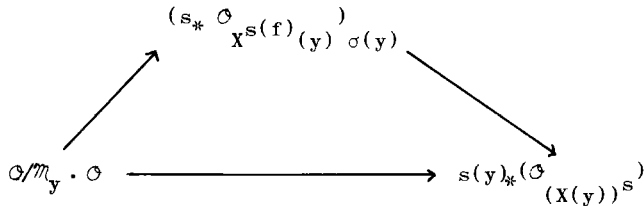


de morphismes dominants (cf. [Te 2], I ; la preuve donnée dans le cas où $\dim Y = 1$ s'étend aussitôt) correspondant au diagramme d'algèbres suivant, [où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X, \sigma(y)}$, \mathfrak{m}_y est l'idéal définissant $\{y\}$ dans Y au voisinage de $y \in Y$

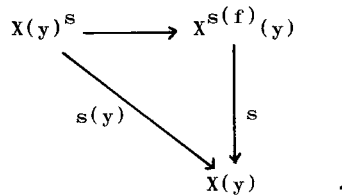
et $\mathcal{M}_y \cdot \mathcal{O}$ son image par le morphisme $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\sigma(y)}$



et d'autre part on a un diagramme analogue pour les saturations relatives



c'est-à-dire



La vérification est très facile au vu de (Loc. cit.) et de la définition de la saturation.

6.4.1 Définition : On dit que le morphisme $f : X \xrightarrow{\sigma} Y$ est équisaturé au point $\sigma(y) \in X$ si la fibre $X(y)$ est réduite et si l'on a :

a) Le morphisme canonique $X^{s(f)}(y) \rightarrow X(y)^s$ est un isomorphisme, et en particulier il y a un seul point $y_1 \in X^{s(f)}$ au-dessus de $\sigma(y)$.

b) Le morphisme composé $X^{s(f)} \xrightarrow{s} X \xrightarrow{f} Y$ est localement analytiquement trivial en y_1 .

6.4.2 Proposition : Soit $f: X \xrightarrow{\sigma} Y$ un morphisme comme ci-dessus tel que les fibres soient des courbes planes. Il existe un fermé analytique rare $F \subset Y$ tel que le morphisme f soit équisaturé en tout point de $\sigma(Y - F)$.

Démonstration : D'après la semi-continuité du nombre de Milnor (cf. [Te 11], 2.3.1), de la multiplicité des fibres ([Le-T 2]), et enfin par la platitude générique du \mathcal{O}_Y -module cohérent $f_*(n_* \mathcal{O}_{\bar{X}}/\mathcal{O}_X)$, il existe un fermé analytique rare F de Y tel qu'au voisinage de tout point $y \in Y - F$, le nombre de Milnor $\mu_{\sigma(y')}(X(y'))$ des fibres (courbes planes réduites) soit constant, (indépendant de y') ainsi que leur "invariant δ ", $\delta_{y'} = \dim_{\mathbb{C}}(\overline{\mathcal{O}_{X(y')}}/\mathcal{O}_{X(y')})_{\sigma(y')}$ et la multiplicité $n_{y'}$ au point $\sigma(y')$ de la courbe $X(y')$. D'après l'égalité de Jung-Milnor $2\delta_{y'} = \mu_{\sigma(y')}(X(y')) + r_{y'} - 1$ où $r_{y'}$ est le nombre des composantes irréductibles en $\sigma(y')$ de $X(y')$, ce nombre de composantes est également indépendant de $y' \in Y - F$.

D'après ([Te 2], I), puisque $\delta_{y'}$ est constant sur $\sigma(Y)$ au voisinage de $\sigma(y)$, le morphisme f admet une résolution simultanée très faible donnée par la normalisation $n: \bar{X} \rightarrow X$. Puisque le nombre des branches $r_{y'}$, et la multiplicité $n_{y'}$ sont aussi constants, c'est en fait une résolution simultanée forte c'est-à-dire que si nous notons S l'idéal définissant $\sigma(Y)$ dans X , l'idéal $S\mathcal{O}_{\bar{X}}$ est inversible, définit un sous-espace $n^{-1}(\sigma(Y))$ tel que le morphisme induit $|n^{-1}(\sigma(Y))| \rightarrow \sigma(Y)$ soit étale, $n^{-1}(\sigma(y))$ contenant $r = r_y$ points, et donc finalement on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y,y}$ -algèbres

$$\overline{\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$$

tel que, pour un Y -plongement local $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{C}^2$ envoyant $\sigma(Y)$ sur $Y \times 0$, et où \mathbb{C}^2 est muni de coordonnées (z_1, z_2) , l'idéal engendré par les images de (z_1, z_2) soit inversible, engendré disons par z_1 . Soit $(\zeta_1, \dots, \zeta_r) \in \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$ la décomposition dans $\mathcal{O}_{\bar{X},\sigma(y)}$ de l'image de z_1 . L'hypothèse d'équimultiplicité implique, comme on le vérifie aussitôt, qu'au prix d'un changement de l'uniformisante locale t_i , l'on peut supposer que $\zeta_i = t_i^{n_i}$.

Considérons maintenant l'idéal I définissant $\overline{X} \times_X \overline{X}$ dans $\overline{X} \times_Y \overline{X}$: clairement

l'algèbre de $\mathcal{O}_{\overline{X} \times_X \overline{X}, n^{-1}(\sigma(y)) \times n^{-1}(\sigma(y))}$ est $\mathcal{O}_{Y,y}$ -isomorphe au produit

$\prod_{i,j} \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i, t'_j\}$ et l'idéal I est déterminé par ses images $I_{i,j} \subset \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i, t'_j\}$.

Soit $(H_1, \dots, H_r) \in \prod_i \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$ l'image de z_2 ; $H_i \in \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$. L'idéal $I_{i,j}$ est

engendré par $(t_i^{n_i} - t'_j^{n_j}, H_i(t_i) - H_j(t'_j))$. Soit maintenant \mathcal{N} l'idéal de

$\prod_{i,j} \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i, t'_j\}$ défini comme suit : si $i \neq j$, $\mathcal{N}_{i,j} = I_{i,j}$ et si $i = j$,

$(t_i - t'_i) \cdot \mathcal{N}_{i,i} = I_{i,i}$. D'après ([Te 2], II, § 5) l'idéal \mathcal{N} est équimultiple

le long du sous-espace de $\overline{X} \times_Y \overline{X}$ défini par l'idéal $\prod_{i,j} (t_i, t'_j)$, en ce sens que

pour chaque $y' \in Y$ voisin de y , la somme des multiplicités des idéaux

$\mathcal{N}_{i,j} \cdot \mathcal{O}_{Y/\mathfrak{m}_{y'}}\{t_i, t'_j\}$ est égale à $2\delta_{y'}$, donc indépendante de $y' \in Y$ voisin de y .

Voyons maintenant comment déterminer si un élément $(h_1, \dots, h_r) \in \prod \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$

appartient au saturé relatif $\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)} \subset \prod_i \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$. Si nous posons

$h_i = \sum h_{i,a} t_i^a$, $h_{i,a} \in \mathcal{O}_{Y,y}$, il faut déterminer si $\sum h_{i,a} t_i^a - \sum h_{j,a} t'_j{}^a \in \overline{I_{i,j}}$

pour tous les couples (i,j) . Remarquons que si $i = j$, il revient au même de

déterminer si $\sum h_{i,a} \frac{t_i^a - t'_i{}^a}{t_i - t'_i}$ appartient à $\overline{\mathcal{N}_{i,i}}$.

Puisque l'idéal \mathcal{N} définit une famille paramétrée par Y d'idéaux, qui est équimultiple

le long du sous-espace défini par l'idéal $\prod_{i,j} (t_i, t'_j)$, parce que la

multiplicité $e(\mathcal{N}_{y'})$ de l'idéal induit par \mathcal{N} dans la fibre de $\overline{X} \times_Y \overline{X} \rightarrow Y$ au-dessus

de y' vaut $2\delta_{y'}$, qui est constant (pour tout ceci, voir [Te 2], II), il résulte

du principe de spécialisation de la dépendance intégrale (§ 5.1) qu'il

suffit de vérifier la relation de dépendance intégrale dans une fibre générale,

et de là, d'après le théorème de structure des anneaux saturés vu plus haut,

on déduit que, si l'on prend une base $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_k}$ des dérivations de $\mathcal{O}_{Y,y}$,

et si l'on note D_ℓ la dérivation de $\prod \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$ obtenue en posant $D_\ell t_i = 0$

$(1 \leq i \leq r)$ et $D_\ell \mathcal{O}_{Y,y} = \frac{\partial}{\partial t_\ell}$, on a l'inclusion

$$D_\ell(\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)}) \subset \mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)} \quad (1 \leq \ell \leq k)$$

(en effet $D_\ell(\sum_a h_{i,a} t_i^a) = \sum (\frac{\partial}{\partial t_\ell} h_{i,a}) t_i^a$ ne contient pas d'exposant que $\sum h_{i,a} t_i^a$ ne contienne déjà, et $D_\ell(\omega) = 0$).

Ceci implique, par "intégration des champs de vecteurs correspondant aux dérivations D_ℓ " (cf. [Te 2], I) que $\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)}$ est localement analytiquement triviale, en ce sens que l'isomorphisme $\overline{\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}} \simeq \prod_i \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\} \simeq \mathcal{O}_{Y,y} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}_{X(y),\sigma(y)}}$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)} \simeq \mathcal{O}_{Y,y} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X(y),\sigma(y)}^S$. Ceci équivaut à l'équisaturation que nous voulions démontrer. ■

6.4.3 Remarques : 1) On peut paraphraser le résultat en disant que, pour $y \in Y - F$, l'algèbre saturée $\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)}$ est la sous-algèbre de $\overline{\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}} \simeq \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{Y,y}\{t_i\}$ formée des éléments (h_1, \dots, h_r) , $h_i = \sum h_{i,a} t_i^a$, avec $h_{i,a} \in \mathcal{O}_{Y,y}$ tels que, avec les notations du Théorème ci-dessus

- α) l'élément $h_{i,a}$ soit nul si $a \notin \widetilde{E}_i$
 (où \widetilde{E}_i est l'ensemble associé à la i -ème composante de $X(y)$) ;
 β) pour tout couple (i,j) , $i \neq j$, on a l'inégalité

$$m_{i,j,\omega}^{(h)} \geq m_{i,j,\omega}$$

(même convention).

On voit ainsi pourquoi $D_\ell(\mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)}) \subset \mathcal{O}_{X,\sigma(y)}^{S(f)}$.

2) On sait (cf. [Te 2], II, § 5) que pour une famille de germes de courbes planes, la constance du nombre de Milnor entraîne non seulement celle de δ_y et de r_y , mais aussi l'équimultiplicité (ce dernier résultat avait été prouvé topologiquement par Lê D.T., [Lê]). Comme me l'a fait observer Mr. E. Bøger, la fin de ma démonstration algébrique ([Te 2], II, p. 127) n'est pas complète, puisqu'il n'est pas clair que la dérivation D qui est construite conserve $\mathcal{O}_X^{S(f)}$ au-dessus du point général de Y .

C H A P I T R E I I

IDEAL JACOBIEN, MODIFICATION DE NASH, ET THEOREME DE BERTINI IDEALISTE

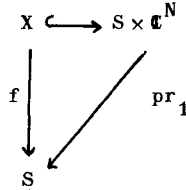
Introduction. Dans ce chapitre, on commence à étudier les positions limites des espaces tangents en des points non singuliers tendant vers un point singulier d'un espace analytique X . L'étude géométrique de ces positions limites est celle de la modification de Nash $N(X) \rightarrow X$, et l'étude algébrique est celle de l'idéal jacobien de X , c'est-à-dire l'idéal engendré par les mineurs de rang $N+1 - \dim X$ de la matrice jacobienne d'un système de générateurs de l'idéal définissant un plongement local $X \subset \mathbb{C}^{N+1}$. La comparaison de ces deux points de vue permet d'utiliser les théorèmes de finitudes fondamentaux de la géométrie analytique pour prouver une version quantitative du théorème de Bertini, version qui s'exprime par la dépendance intégrale de certains mineurs de la matrice jacobienne sur l'idéal engendré par certains autres, alors que le théorème de Bertini s'exprime par leur appartenance à la racine de cet idéal.

Il nous est très utile de définir l'idéal jacobien, non seulement pour un espace X , mais simultanément pour toutes les fibres d'un morphisme, et de même pour la modification de Nash, c'est-à-dire de définir l'idéal jacobien relatif et la modification de Nash relative associés à un morphisme $X \rightarrow S$, puis d'obtenir le cas absolu en prenant S égal à un point.

§ 1. Idéal jacobien relatif.

1.1 Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes et Ω_f^1 (aussi noté $\Omega_{X/S}^1$) le \mathcal{O}_X -module cohérent des 1-formes différentielles relatives (cf. [Ca] ; exposé 14 ; j'utiliserai sans les rappeler les propriétés élémentaires de $\Omega_{X/S}^1$ qui y sont démontrées). Pour chaque entier $d \geq 0$, on peut définir

le faisceau cohérent d'idéaux de Fitting $F_d(\Omega_f^1) \subset \mathcal{O}_X$ (cf. [Te 3], § 1, [Pi], [G-R]) qui a la propriété (cf. Loc. cit.) que pour chaque fibre $X(s) = f^{-1}(s)$ on a $F_d(\Omega_f^1) \cdot \mathcal{O}_{X(s)} = F_d(\Omega_{X(s)}^1)$. Ce faisceau d'idéaux peut être décrit localement comme suit : tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert, que nous allons abusivement encore noter X , tel qu'il existe un S -plongement de X dans $S \times \mathbb{C}^N$:



Soient $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_{S,s}\{z_1, \dots, z_N\} = \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^N, s \times \{0\}}$ des générateurs de l'idéal I de $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^N, s \times \{0\}}$, où $s = f(x)$, définissant le plongement de germes $(X, x) \subset (S \times \mathbb{C}^N, s \times \{0\})$. On a alors la suite exacte

$$I/I^2 \xrightarrow{d} (\Omega_{S \times \mathbb{C}^N/S}^1|_X)_x \longrightarrow \Omega_{X/S, x}^1 \longrightarrow 0$$

où d désigne la différentielle naturelle $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^N, s \times \{0\}} \rightarrow (\Omega_{S \times \mathbb{C}^N/S, s \times \{0\}}^1)$ qui revient à associer à $h \in \mathcal{O}_{S,s}\{z_1, \dots, z_N\}$ l'élément $\sum_1^N \frac{\partial h}{\partial z_i} dz_i$.

Il résulte aussitôt de ceci et de la définition des idéaux de Fitting que $F_d(\Omega_f^1)_x$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ engendré par les mineurs de rang $N-d$ de la "matrice jacobienne relative" $(\frac{\partial f_i}{\partial z_j})$ $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq N$, c'est-à-dire que, pour tout choix d'un S -plongement local comme ci-dessus on a :

$$F_d(\Omega_f^1)_x = \left(\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{N-d}})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{N-d}})} ; \{i_1, \dots, i_{N-d}\} \subset \{1, \dots, m\}, \{j_1, \dots, j_{N-d}\} \subset \{1, \dots, N\} \right) \cdot \mathcal{O}_{X,x}$$

(les indices sont supposés tous distincts).

Un cas particulier. Supposons que X est défini dans $S \times \mathbb{C}^N$ par $N-d$ équations f_1, \dots, f_d et que toutes les fibres $X(s)$ sont de dimension d (on dit alors que X est une intersection complète relative). En chaque point non-singulier $x' \in X(s)$, $s = f(x')$ l'espace tangent $T_{X(s), x'}$ à $X(s)$ en x' détermine une direction de sous-espace vectoriel de dimension d , encore notée $T_{X(s), x'}$ dans \mathbb{C}^N , c'est-à-dire un point de la grassmannienne $G = G(N-1, d-1)$ des $d-1$ -plans dans \mathbb{P}^{N-1} , et par la définition même du plongement de Plücker ([G-H], p. 209) de la grassmannienne G dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$; les déterminants jacobiens $\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{N-d}})}(x')$, $\{j_1, \dots, j_{N-d}\} \subset \{1, \dots, N\}$ sont les coordonnées homogènes de l'image dans $\mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ du point de G déterminé par $T_{X(s), x'}$. Ainsi, notant X^0 l'ensemble des points $x' \in X$ qui sont non-singuliers dans leur fibre, nous avons :

L'application analytique ("morphisme jacobien relatif") $X^0 \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ qui à $x' \in X^0$ associe le point de coordonnées homogènes

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{N-d}})}(x'), \{j_1, \dots, j_{N-d}\} \subset \{1, \dots, N\}$$

(les indices j_k sont supposés 2 à 2 distincts)

coïncide avec l'application composée $X^0 \xrightarrow{\gamma} G \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$, où γ est l'application ("morphisme de Gauss relatif") qui à $x' \in X^0$ associe la direction $T_{X(s), x'}$, et $G \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ est le plongement de Plücker.

Remarquons qu'en un point $x' \in X^0$, l'un au moins des déterminants jacobiens est non nul, puisque les espaces tangents en x' aux fibres des $N-d$ hypersurfaces $f_i = 0$ doivent être en position générale. Si nous prenons une suite de points $x'_i \in X^0$ tendant vers un point singulier x , la position limite (dans G , ou dans $\mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$, ce qui revient au même) des espaces tangents T_{X, x'_i} sera en partie déterminé par les vitesse relatives avec lesquelles les divers déterminants jacobiens

$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{N-d}})}(x_i')$ tendent vers 0. Comme nous le verrons plus bas, c'est pour cette raison que le concept de dépendance intégrale nous sera très utile.

Exemple, montrant que le cas particulier précédent est bien particulier.

Soit $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ le morphisme défini par $u_1 = xz$, $u_2 = xt$, $u_3 = yz$, $u_4 = yt$.

Ce morphisme n'est pas surjectif, et $f^{-1}(0)$ est la réunion de deux plans dans \mathbb{C}^4 ne se rencontrant qu'en 0. Aussi il n'est pas très étonnant que l'on ait $F_0(\Omega_f^1) = 0$, comme on le vérifie facilement.

1.1.1 Lemme, montrant que si toutes les fibres de f sont purement de la même dimension, le cas particulier précédent permet d'étudier le cas général :

d'après un résultat classique d'algèbre commutative, (cf. [Z-S], II, Th. 22) si nous supposons que toutes les fibres de f sont purement de la même dimension d , sans faire d'hypothèse sur le nombre des générateurs, alors :
il existe un ouvert de Zariski dense U de l'espace $\mathbb{C}^{m(N-d)}$ tel que, si $\lambda = (\lambda_{ij}) \in U$, le sous-espace X_1 de $S \times \mathbb{C}^N$ défini au voisinage de $s \times \{0\}$ par les $N-d$ équations

$$g_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_{1i} f_i, \dots, g_{N-d} = \sum_{i=1}^m \lambda_{N-d,i} f_i$$

et qui contient évidemment X , a ses fibres de dimension d .

L'on se trouve pour X dans le cas particulier étudié plus haut. De plus si $X(s)$ est réduit, on peut supposer que pour $\lambda \in U$, $X_1(s)$ est réduit, par un argument du type de la preuve du théorème de Bertini classique, et laissé au lecteur.

En particulier, prenant pour S un point, on obtient que tout germe d'espace analytique réduit purement de dimension d peut être défini dans \mathbb{C}^N par un idéal de la forme $(f_1, \dots, f_{N-d}, f_{N-d+1}, \dots, f_m)$ où (f_1, \dots, f_{N-d}) définit une intersection complète réduite X_1 de dimension d : X est réunion de certaines des composantes irréductibles de cette intersection complète, et en particulier

on a l'inclusion $X_1^0 \cap X \subseteq X^0$ (où X^0 désigne la partie non-singulière de X), $X_1^0 \cap X$ est dense dans X , et la restriction à $X_1^0 \cap X$ de l'application de Gauss $X^0 \rightarrow G$ coïncide avec la restriction à $X_1^0 \cap X$ de l'application de Gauss $X_1^0 \rightarrow G$. Sous l'hypothèse que les fibres de $f: X \rightarrow S$ sont réduites et purement de dimension d et que $X_1^0 \cap X$ est dense dans X , on a un résultat analogue pour le morphisme de Gauss relatif. La manière géométrique d'étudier les rapports des vitesses avec lesquelles les mineurs jacobiens tendent vers 0 est d'étudier l'éclatement de l'idéal jacobien relatif, c'est-à-dire, si nous nous restreignons au cas où toutes les fibres de f sont réduites et de dimension d , l'éclatement $\mathcal{J}_f(X) \rightarrow X$ du faisceau cohérent d'idéaux $F_d(\Omega_f^1)$. Localement sur X , c'est-à-dire au-dessus d'un voisinage ouvert assez petit de chaque point $x \in X$, ce morphisme est X -isomorphe au morphisme obtenu comme ceci :

On considère l'adhérence $\mathcal{J}_f(X)$ dans $X \times \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ du graphe $\Gamma \subset X^0 \times G \subset X^0 \times \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ du morphisme jacobien relatif, et le morphisme $\mathcal{J}_f(X) \rightarrow X$ induit par la première projection est X -isomorphe à l'éclatement dans X de l'idéal jacobien relatif.

Cependant cette construction ne décrit avec exactitude les limites d'espaces tangents que dans le cas particulier des intersections complètes relatives, à cause du fait que en dehors de ce cas, le nombre des mineurs considérés est trop grand et contient de regrettables redondances. Il y a cependant une construction, en apparence un peu moins explicite, qui fonctionne toujours : la modification de Nash relative.

1.2 Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme entre espaces analytiques (réels ou complexes) tel que le module Ω_f^1 des différentielles relatives soit localement libre de rang $d = \dim X - \dim S$ sur le complémentaire d'un fermé analytique rare F de X . Soit $G_f \xrightarrow{g} X$ la grassmannienne des quotients localement libres de rang d de Ω_f^1 , c'est-à-dire (cf. [Ca], exp. XII) que $g^*\Omega_f^1$ a un quotient L localement libre de rang d sur G_f , et que le morphisme g est universel pour cette pro-

priété. D'après cette définition, on a une section bien définie $X - F \xrightarrow{\sigma} G_f$ et d'après un théorème de Remmert, l'adhérence dans G_f de $\sigma(X - F)$ est un sous-espace analytique fermé réduit, noté $N_f(X) \subset G_f$, et g induit un morphisme $v_f : N_f(X) \rightarrow X$ qui est propre et biméromorphe puisque g est propre, $N_f(X)$ fermé dans G_f et que v_f y induit un isomorphisme au-dessus de $X - F$. Le morphisme v_f est donc une modification de X .

Définition : Le morphisme $v_f : N_f(X) \rightarrow X$ est appelé modification de Nash relative de X/S . Lorsque S est un point, on la note $v : N(X) \rightarrow X$ et on l'appelle modification de Nash (absolue) de X . La modification de Nash absolue est en particulier définie pour tout espace analytique réduit de dimension pure.

Remarques : 1) On peut aussi caractériser la modification de Nash relative comme ceci : sur $X - F$, le \mathcal{O}_X -module localement libre $\Omega_f^1 |_{X - F} = \Omega_{X - F/S}^1$ correspond à un fibré vectoriel T_f de rang d qui induit sur chaque fibre $f^{-1}(s) \cap (X - F)$ le fibré tangent à cette fibre. Le fibré vectoriel $v_f^* T_f$ sur l'ouvert dense $v_f^{-1}(X - F) \subset N_f(X)$ s'étend canoniquement en un fibré vectoriel sur $N_f(X)$ tout entier, correspondant au quotient localement libre $L_f |_{N_f(X)}$ du $\mathcal{O}_{N_f(X)}$ -module $v_f^* \Omega_f^1$. De plus le morphisme v_f est minimal pour cette propriété.

2) La construction par adhérence signifie que l'on peut identifier, pour tout $x \in X$, l'ensemble $|v_f^{-1}(x)|$ à l'ensemble des directions limites en x d'espaces tangents aux fibres de f en des points de $X - F$. En fait, pour tout S -plongement local $X \subset S \times \mathbb{C}^N$, on peut identifier $N_f(X)$ à l'adhérence dans $X \times G$, où G est la grassmannienne des d -plans de \mathbb{C}^N , du graphe du morphisme de Gauss $X - F \xrightarrow{Y} G$.

3) La construction précédente est un cas particulier d'une construction valable pour n'importe quel \mathcal{O}_X -module M , localement libre de rang constant sur le complémentaire d'un fermé analytique rare de X : il existe une modification $\varphi : X' \rightarrow X$ minimale parmi celles qui ont la propriété que $\varphi^* M$ est localement libre modulo torsion, c'est-à-dire admet un quotient localement libre L ; $0 \rightarrow K \rightarrow \varphi^* M \rightarrow L \rightarrow 0$, le noyau K étant de torsion. Ce résultat peut être

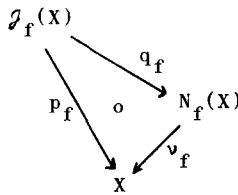
vu comme un cas particulier très simple, celui où les fibres sont linéaires, du théorème d'aplatissement de [H-L-T].

Modification de Nash relative et éclatement de l'idéal jacobien relatif.

La comparaison de ces deux morphismes est résumée dans la

1.2.1 Proposition : Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme tel que Ω_f^1 soit localement libre de rang $d = \dim X - \dim S$ en dehors d'un fermé analytique rare F de X ; soient $v_f : N_f(X) \rightarrow X$ la modification de Nash relative de X/S et $p_f : \mathcal{J}_f(X) \rightarrow X$ l'éclatement dans X de l'idéal jacobien relatif de X/S .

a) le morphisme p_f se factorise canoniquement à travers v_f :



b) le morphisme q_f est un isomorphisme si X est localement une intersection complète relative au-dessus de S , c'est-à-dire si l'on est dans la situation du cas particulier ci-dessus.

c) supposant toutes les fibres de f purement de dimension d et réduites, il existe localement sur X un plongement de X dans une intersection complète relative X_1/S , dont toutes les fibres sont purement de dimension d et réduites, et la modification de Nash relative de X/S est canoniquement X -isomorphe à la transformée stricte de X par la modification de Nash relative de X_1/S , qui d'après le point b) coïncide avec l'éclatement dans X_1 de l'idéal jacobien relatif de X_1/S : finalement, la modification de Nash relative de X/S est X -isomorphe à l'éclatement de l'idéal de \mathcal{O}_X image de l'idéal jacobien relatif de X_1/S par la surjection $\mathcal{O}_{X_1} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ correspondant au plongement $X \hookrightarrow X_1$.

Prouvons a) : D'après la définition de $N_f(X)$, il suffit de prouver que

$p_f^* \Omega_f^1$ a un quotient localement libre de rang d . Or, le morphisme p_f est un isomorphisme au-dessus de $X - F$, donc $p_f^* \Omega_f^1$ est localement libre de rang d sur l'ouvert analytique dense $p_f^{-1}(X - F)$. D'autre part, par définition du morphisme p_f , l'idéal $F_d(\Omega_f^1) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{G}_f(X)}$ est inversible. La compatibilité de la formation des idéaux de Fitting au changement de base ([Te 3], p. 570, [Pi]) implique l'égalité $F_d(p_f^* \Omega_f^1) = F_d(\Omega_f^1) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{G}_f(X)}$ entre idéaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_f(X)}$. Le $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_f(X)}$ -module $p_f^* \Omega_f^1$ est donc localement libre de rang d sur l'ouvert analytique dense $p_f^{-1}(X - F)$ et son d -ième idéal de Fitting est inversible. D'après un lemme de Raynaud ([G-R], 5.4.2 ou [Pi]) ceci implique que $p_f^* \Omega_f^1$ a un quotient localement libre de rang d , d'où a).

Prouvons b) : Si X est localement une intersection complète relative, d'après ce que nous avons vu plus haut, localement sur X , le composé de l'application de Gauss avec le plongement de Plücker, $X - F \rightarrow G \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ coïncide avec le morphisme $X - F \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ défini par les mineurs jacobiens. D'après la remarque 2) ci-dessus, et la description de l'éclatement de l'idéal jacobien comme adhérence dans $X \times \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$ du graphe du morphisme $X - F \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{N}{d}-1}$, cette coïncidence implique aussitôt que la modification de Nash relative coïncide avec l'éclatement de l'idéal jacobien relatif localement, donc aussi globalement puisque les deux vérifient une propriété universelle.

Prouvons c) : D'après le Lemme 1.1.1, il existe localement sur X un plongement de X dans une intersection complète relative X_1 , tel que pour chaque $s \in S$, la fibre $X(s)$ soit réunion de certaines des composantes irréductibles de la fibre $(X_1)(s)$ qui de plus est réduite, $(X_1(s))^0 \cap X$ est contenu dans $(X(s))^0$, est dense dans $X(s)$, et le morphisme de Gauss relatif de X , coïncide avec celui de X_1 sur $(X_1)(s)^0 \cap X(s)$. Le point c) résulte aussitôt de ceci, de la définition de la modification de Nash relative comme adhérence du graphe du morphisme de Gauss, et du point b).

Remarques : 1) En adaptant au cas relatif la preuve donnée dans [Te 3], § 2),

on obtient une preuve de l'énoncé suivant :

Proposition : Si toutes les fibres de f sont réduites, la modification de Nash relative est un isomorphisme si et seulement si le morphisme f est lisse, c'est-à-dire plat et à fibres lisses.

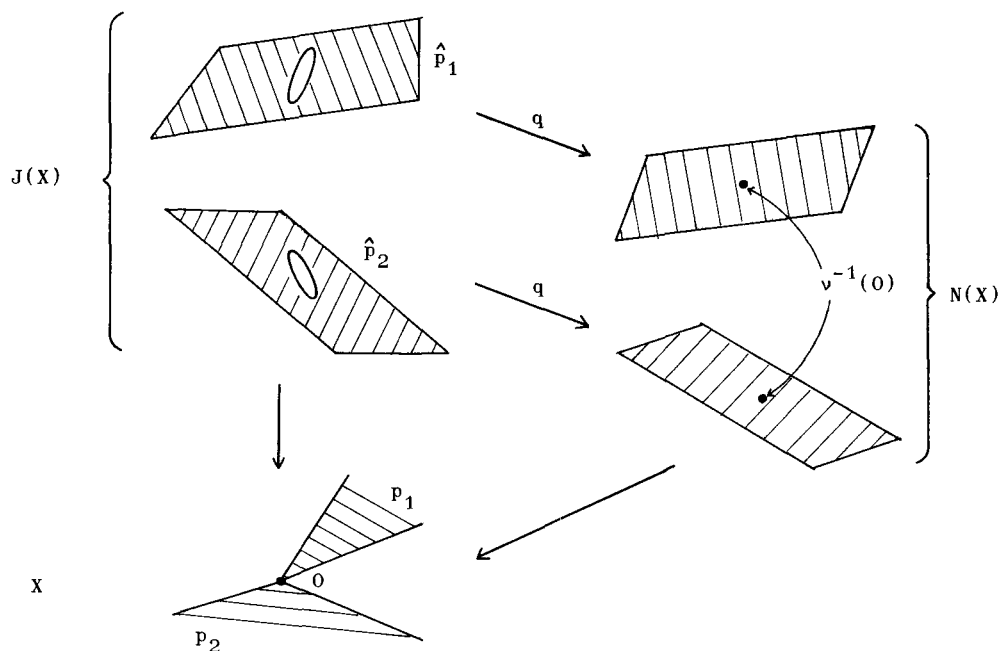
2) Soit $N(f)$ le morphisme composé $N_f(X) \xrightarrow{v_f} X \xrightarrow{f} S$; on prendra garde que $N(f)^{-1}(s) = v_f^{-1}(X_s)$ ne coïncide pas en général avec la modification de Nash $N(X(s))$ de $X(s)$, c'est-à-dire que la formation de la modification de Nash relative ne commute pas au changement de base en général.

(Exemple : $x^2 - y^3 + s^2 y^2 = 0$ projeté sur l'axe des s , en $s = 0$.) Le lecteur vérifiera par contre sans mal en utilisant la propriété universelle de la modification de Nash, que si les fibres de f sont purement de la même dimension et réduites, pour tout $s \in S$, la transformée stricte par la modification de Nash relative v_f de la fibre $X(s)$ est canoniquement isomorphe à la modification de Nash de $X(s)$.

3) En route, nous avons montré que la modification de Nash relative comme d'ailleurs toute modification localement projective est localement l'éclatement d'un idéal, à savoir ici l'idéal induit sur X par l'idéal jacobien d'une intersection complète relative X_1 comme ci-dessus. Il paraît très improbable que la modification de Nash, même absolue, soit globalement un éclatement. Voir aussi [No], qui a inspiré une partie de la Proposition.

4) Différence entre l'éclatement jacobien et la modification de Nash. Reprenons l'exemple de la réunion X de deux 2-plans de \mathbb{C}^4 se rencontrant seulement en $\{0\}$. L'idéal correspondant peut être écrit $(xz, xt, yz, yt) \subset \mathbb{C}\{x, y, z, t\}$, et l'on vérifie que $F_2(\Omega_X^1)_0$ est le carré \mathcal{M}^2 de l'idéal maximal \mathcal{M} de $\mathcal{O}_{X,0}$, dont l'éclatement dans X sépare les deux plans et a un diviseur exceptionnel induisant une droite projective \mathbb{P}^1 (comptée 2 fois) dans chacun des deux plans séparés, tandis que la modification de Nash de X est le morphisme fini (en fait la normalisation) consistant à séparer les deux plans tout en induisant un isomorphisme de chacun des deux plans séparés sur son image. Le morphisme de factorisation q consiste à éclater dans $N(X)$ le

carré de l'idéal définissant $v^{-1}(0)$



§ 2. Théorème de Bertini idéaliste le long d'une section.

2.1 Soit X un sous-espace analytique de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^M$ contenant $\mathbb{C}^s \times \{0\}$. Notant $\hat{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{C}^s$ le morphisme induit par la première projection, on suppose $\Omega_{\hat{\varphi}}^1 = \Omega_{X/\mathbb{C}^s}^1$ localement libre de rang $d = \dim X - s$ dehors d'un fermé analytique rare de X . On suppose enfin X défini dans un ouvert U de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^M$ par un idéal engendré par des sections globales $G_1, \dots, G_p \in H^0(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^M})$.

Pour tout choix de coordonnées (t_1, \dots, t_s) et (u_1, \dots, u_M) sur \mathbb{C}^s et \mathbb{C}^M respectivement, pour tout entier ℓ , $0 \leq \ell \leq s$ et tout choix d'un sous-ensemble $K = \{k_{\ell+1}, \dots, k_c\} \subset \{1, \dots, M\}$, où $c = \text{codim}_{\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^M} X = M - d$, notant J_K l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par les éléments de la forme :

$$u_{k_1} \cdots u_{k_\ell} \cdot \frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(u_{k_1}, \dots, u_{k_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})}$$

où $\{k_1, \dots, k_\ell\} \subset \{1, \dots, M\}$ et $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, p\}$ on a :

2.1.1 Théorème : Il existe un fermé analytique rare F de $\mathbb{C}^S \times \{0\}$ tel que, pour tout point $z \in \mathbb{C}^S \times \{0\} - F$, l'image dans $\mathcal{O}_{X,z}$ de chaque déterminant jacobien

de la forme $\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})}$ soit entière dans $\mathcal{O}_{X,z}$ sur l'idéal

$$(J_K)_z = J_K \cdot \mathcal{O}_{X,z}.$$

Démonstration : Soit $\pi: Z' \rightarrow X$ la modification de X associée à l'idéal J_K comme dans (Chap. I, 1.4.2) et soit Z'' la réunion de celles des composantes irréductibles de Z' où $J_K \cdot \mathcal{O}_{Z''}$, induit un idéal inversible. Soient $D \subset Z''$ le diviseur de Z'' défini par cet idéal et $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ sa décomposition (localement finie) en composantes irréductibles. Soit $B \subset X$ la réunion de celles des images $\pi(D_i)$ qui ont la propriété que $\pi(D_i) \cap (\mathbb{C}^S \times \{0\})$ est rare dans $\mathbb{C}^S \times \{0\}$. Par la propriété du morphisme π , B est un sous-ensemble analytique fermé de X, et $B \cap (\mathbb{C}^S \times \{0\}) = F$ est un fermé analytique rare de $\mathbb{C}^S \times \{0\}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^S \times \{0\} \setminus F$. Puisque l'énoncé du théorème est local sur X, nous pouvons en nous restreignant à un voisinage assez petit de z supposer que $F = \emptyset$, c'est-à-dire que $\pi(D_i) \supset \mathbb{C}^S \times \{0\}$. Le morphisme composé $\hat{\phi} \circ \pi|_{D_i}: D_i \rightarrow \mathbb{C}^S$ est alors surjectif, et par conséquent il existe un ouvert analytique partout dense $U_i \subset D_i$ en chaque point z' duquel on a les propriétés suivantes :

1) L'espace Z'' et le sous-espace D_{red} sont tous deux non-singuliers en z' , et donc D_{red} coïncide avec $D_{i,\text{red}}$ au voisinage de z' .

2) Le morphisme $\hat{\phi} \circ \pi$ induit en z' une submersion $D_{i,\text{red}} \rightarrow \mathbb{C}^S$.

3) Le transformé strict par π de chacun des sous-espaces de X définis par $u_j \cdot \mathcal{O}_X$ ($1 \leq j \leq M$) est vide au voisinage de z' .

En effet, la propriété 1) vient de ce que Z' est normal et que D est un diviseur, puisque Z' étant normal est non-singulier en codimension 1. La propriété

2) vient du théorème de Sard et la propriété 3) de la définition du transformé strict.

On peut donc choisir un système de coordonnées locales

$(t'_1, \dots, t'_s, w_1, \dots, w_d)$ pour Z' en z' tel que

A) On ait $(t_j \circ \pi)_{z'} = t'_j$ ($1 \leq j \leq s$).

B) Le sous-espace $(D_{i, \text{red}})_z$ est défini par $w_1 \mathcal{O}_{Z', z'}$.

C) On a $(u_m \circ \pi)_{z'} = A_m w_1^{\mu_m}$ où A_m est soit identiquement 0, soit inversible, et $\mu_m \in \mathbb{N}$ ($1 \leq m \leq M$).

Puisque $G_i \cdot \mathcal{O}_X \equiv 0$ ($1 \leq i \leq p$) on a $G_i \cdot \mathcal{O}_{Z', z'} \equiv 0$ et en particulier

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial t'_j} (G_i \circ \pi)_{z'} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial t_j} \circ \pi \right)_{z'} + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial G_i}{\partial t'_j} \circ \pi \right)_{z'} \frac{\partial}{\partial t'_j} (u_m \circ \pi)_{z'} \equiv 0$$

et puisque, grâce à la propriété c), nous avons dans $\mathcal{O}_{Z', z'}$:

$\frac{\partial}{\partial t'_j} (u_m \circ \pi) = \frac{\partial A_m}{\partial t'_j} w_1^{\mu_m}$, qui est un multiple de $(u_m \circ \pi)_z$, nous en déduisons que dans $\mathcal{O}_{Z', z'}$ on peut écrire

$$\left(\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})} \circ \pi \right)_{z'} = \sum_{\underline{m}} \varepsilon_{\underline{m}} \frac{\partial(u_{m_1} \circ \pi)}{\partial t'_{j_1}} \dots \frac{\partial(u_{m_\ell} \circ \pi)}{\partial t'_{j_\ell}} \left(\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(u_{m_1}, \dots, u_{m_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})} \circ \pi \right)_{z'}$$

où la somme porte sur les $\underline{m} = (m_1, \dots, m_\ell)$ contenus dans $\{1, \dots, M\} \setminus \{k_{\ell+1}, \dots, k_c\}$ et $\varepsilon_{\underline{m}} = \pm 1$,

et donc finalement, puisque $\frac{\partial(u_m \circ \pi)}{\partial t'_j}$ est un multiple de $u_m \circ \pi$, on a montré que chaque composante irréductible D_i de $D \subset Z''$ contient un ouvert analytique dense en chaque point z' duquel on a :

$$\left(\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})} \circ \pi \right)_{z'} \in J_K \cdot \mathcal{O}_{Z', z'}$$

Passons maintenant à la réunion $Z^{(m)}$ des composantes de Z' sur lesquelles $J_K \circ \pi$ s'annule identiquement ; par construction, ces composantes sont les normalisées des composantes de X sur lesquelles J_K s'annule identiquement.

D'après l'hypothèse faite sur $\Omega^1_{X/\mathbb{C}^S}$, chacune de ces composantes contient un ouvert analytique dense en chaque point z' duquel Z''' est lisse sur \mathbb{C}^S par $\hat{\phi} \circ \pi$, et $(u_m \circ \pi)_{z'}$ est soit 0 soit inversible ($1 \leq m \leq M$). On peut donc choisir un système de coordonnées locales $(t'_1, \dots, t'_s, w_1, \dots, w_d)$ sur Z''' en z' tel que

$$A') \quad (t'_j \circ \pi) = t'_j$$

$$B') \quad (u_m \circ \pi)_{z'} = 0 \quad \text{ou bien est inversible} \quad ;$$

et le même calcul que ci-dessus montre que

$$\left(\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})} \circ \pi \right)_{z'} = 0 \quad ,$$

d'où le résultat, puisque alors cet élément s'annule sur toute la composante irréductible de X considérée.

2.1.2 Remarque (théorème de Bertini idéaliste sans section) : Soit

$$\begin{array}{ccc} X \subset \mathbb{C}^S \times \mathbb{C}^M & & \\ \downarrow \hat{\phi} & \swarrow \text{pr}_1 & \\ \mathbb{C}^S & & \end{array}$$

le diagramme décrivant la situation du Théorème précédent, mais ne supposons plus que X contient $\mathbb{C}^S \times \{0\}$ (c'est-à-dire ne supposons plus l'existence d'une section $\sigma: \mathbb{C}^S \rightarrow X$ de $\hat{\phi}$). La même preuve que ci-dessus montre : (cf. [Te 3], § 2, 2nd part)

2.1.3 Théorème de Bertini idéaliste : Il existe un fermé analytique $B \subset X$, tel que $\hat{\phi}(B)$ soit de mesure nulle dans \mathbb{C}^S , et tel que en tout point $z \in X - B$

on ait, pour tout entier ℓ , $0 \leq \ell \leq s$, $\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_\ell}, u_{k_{\ell+1}}, \dots, u_{k_c})} \mathcal{O}_{X,z}$ est entier sur l'idéal de $\mathcal{O}_{X,z}$ engendré par les déterminants jacobiens $\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(u_{k_1}, \dots, u_{k_c})}$.

2.1.4 Une autre manière de dire ceci est la suivante : soit $J \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal jacobien de X (défini de manière intrinsèque comme $(d+s)$ -ième idéal de Fitting du module des différentielles Ω_X^1 de X) définissant le sous-espace singulier de X , et soit $J_{\mathbb{P}^s} = J_{X/\mathbb{P}^s} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal jacobien relatif de $X \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^s$, (défini de manière intrinsèque comme d -ième idéal de Fitting du module $\Omega_{X/\mathbb{P}^s}^1$ des différentielles relatives) ; l'idéal J_X est, dans la situation du Théorème, engendré par les mineurs jacobiens de la forme $\frac{\partial(G_{i_1}, \dots, G_{i_c})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_\ell}, u_{j_{\ell+1}}, \dots, u_{j_c})}$ et les J_{X/\mathbb{P}^s} par les seuls mineurs jacobiens où $\ell = 0$, c'est-à-dire où aucun t_j n'apparaît au "dénominateur". Le théorème de Bertini idéaliste peut s'énoncer en disant que pour tout $z \in X - B$, on a l'égalité de fermetures intégrales d'idéaux de $\mathcal{O}_{X,z}$:

$$\overline{(J_X)_z} = \overline{(J_{X/\mathbb{P}^s})_z} \quad (z \in X - B) .$$

Le théorème de Bertini-Sard revient à l'égalité des racines

$$\sqrt{(J_X)_z} = \sqrt{(J_{X/\mathbb{P}^s})_z} \quad (z \in X - B)$$

et dans ([Te 3], § 2) on trouve un exemple montrant qu'il n'existe pas en général de sous-espace $B \subset X$ tel que $\Phi(B)$ soit de mesure nulle dans \mathbb{P}^s et que les idéaux eux-mêmes soient égaux pour $z \in X - B$.

On peut de même donner une formulation indépendante du choix des coordonnées pour le Théorème ci-dessus, mais il faut bien voir que cet énoncé est

beaucoup plus faible.

Corollaire : Soit $\varphi : X \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}^s$ un morphisme d'espaces analytiques dont toutes les fibres sont purement de dimension $d = \dim X - s$. Notons S le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_X définissant le sous-espace $\sigma(\mathbb{C}^s)$. Il existe un fermé analytique rare F de $\sigma(\mathbb{C}^s)$ tel que, en tout point $z \in \sigma(\mathbb{C}^s) - F$, on ait dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,z}$

$$(J_{X/\mathbb{C}^s})_z \subseteq (J_X)_z \subseteq (J_{X/\mathbb{C}^s})_z + \overline{(S \cdot J_{\sigma(\mathbb{C}^s)})_z}$$

ceci implique en particulier $\overline{(J_X)_z} = \overline{(J_{X/\mathbb{C}^s})_z}$ d'après le Lemme de Nakayama intégral (Chap. I, 1.5).

Considérons maintenant un espace analytique réduit X purement de dimension $d+t$, un sous-espace analytique $Y \subset X$ et un point $y \in Y$ tel que Y soit non-singulier en y . Pour tout plongement local $X \subset \mathbb{C}^M$ d'un voisinage ouvert de y dans X , encore noté X , considérons les rétractions locales $r : \mathbb{C}^M \rightarrow Y$ au voisinage de y , c'est-à-dire les rétractions sur Y d'un voisinage ouvert, encore noté \mathbb{C}^M , de y dans \mathbb{C}^M .

Chacune de ces rétractions induit une rétraction $r|_X = \rho : X \rightarrow Y$ définie au voisinage de Y , et dont l'inclusion $Y \subset X$ est une section.

Supposons que, par rapport à ρ , on soit dans les conditions du corollaire précédent, c'est-à-dire que l'on ait l'inclusion $(J_X)_y \subset (J_\rho)_y + \overline{(S \cdot J_\rho)_y}$ où S est l'idéal définissant Y dans X . Alors pour tout autre rétraction locale $r' : \mathbb{C}^M \rightarrow Y$, notant $\rho' : X \rightarrow Y$ la rétraction induite sur X , on a l'inclusion $(J_X)_y \subset (J_{\rho'})_y + \overline{(S \cdot J_{\rho'})_y}$.

Preuve : En fait, l'on a l'égalité

$$(J_\rho + \overline{S \cdot J_\rho})_y = (J_{\rho'} + \overline{S \cdot J_{\rho'}})_y$$

En effet, l'hypothèse implique, d'après le Lemme de Nakayama intégral (Chap. I, 1.5) que $\overline{(J_{\rho'})_y} = \overline{(J_X)_y} = \overline{(J_\rho)_y}$, d'où $\overline{(S \cdot J_\rho)_y} = \overline{(S \cdot J_{\rho'})_y}$. En faisant un choix

de coordonnées sur \mathbb{C}^M adapté à ρ (resp. ρ') un calcul direct permet de vérifier, en utilisant le corollaire précédent que $J_{\rho'} \subseteq J_{\rho} + \overline{S \cdot J_{\rho}}$, d'où aussitôt le résultat.

§ 3. Idéal jacobien et transversalité.

Voici maintenant un exemple typique d'utilisation de la dépendance intégrale pour exprimer algébriquement une condition de transversalité "à la limite" pour les espaces tangents.

3.1 Proposition : Soit $f: (X,0) \rightarrow (S,0)$ un morphisme comme en (1.2.) avec S non-singulier, gardons les mêmes notations, et fixons un plongement local $(X,0) \subset (\mathbb{C}^M,0)$ au voisinage de 0. Soit $(X,0) \hookrightarrow (S,0) \times (\mathbb{C}^M,0)$ le S -plongement local défini par le graphe de f , et fixons un système de générateurs f_1, \dots, f_m , $f_i \in \mathcal{O}_{S,0}\{z_1, \dots, z_M\}$ pour l'idéal définissant $(X,0)$ dans $(S,0) \times (\mathbb{C}^M,0)$. Etant donné un sous-espace analytique fermé $(Z,0) \subset (X,0)$, tel que $F \cap Z$ soit rare dans Z , pour un sous-espace vectoriel $D_i \subset \mathbb{C}^M$ de codimension $i \leq d$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Toute direction T limite en 0 d'espaces tangents à des fibres de f en des points non-singuliers d'icelles contenus dans $Z - F$ est transversale à D_i , en ce sens que $\dim(T \cap D_i) = d - i$.

ii) Choisissant les coordonnées z_1, \dots, z_M de \mathbb{C}^M de telle façon que D_i soit défini par $z_1 = \dots = z_i = 0$, on a :

L'idéal $J_{X/S} \cdot \mathcal{O}_{Z,0}$ de $\mathcal{O}_{Z,0}$ engendré par les images des déterminants jacobiens

$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_c})}$ où $c = M - d$, $\{j_1, \dots, j_c\} \subset \{1, \dots, m\}$, $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, M\}$ est

entier dans $\mathcal{O}_{Z,0}$ sur l'idéal J_0 engendré par les seuls mineurs jacobiens de cette sorte qui sont tels que de plus on ait : $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{i+1, \dots, M\}$.

Démontrons $i) \Rightarrow ii)$: soit J_p l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,0}$ engendré par les mineurs jacobiens au dénominateur desquels apparaissent au plus p variables d'indice non contenu dans $\{i+1, \dots, M\}$. On a $J_c = J_{X/S} \cdot \mathcal{O}_{Z,0}$ et l'assertion ii) équivaut

à l'égalité : $\overline{J_0} = \overline{J_c}$.

Il suffit de prouver que, pour $0 \leq p \leq c-1$, J_{p+1} est entier sur J_p . Pour cela, on utilise le critère valuatif de dépendance intégrale (Chap. I, 1.3.4). Considérons un chemin analytique $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (Z, 0)$, et soit Δ un des mineurs engendrant J_p et tel que la valuation $v_0(J_p \circ h)$ de J_p selon h soit minime parmi celles des éléments de J_p . Supposons en un point $x \in h(\mathbb{D} - \{0\})$, la fibre de f passant par x est non-singulière et son espace tangent admet pour équations dans \mathbb{C}^M :

$$(*) \quad \Delta \cdot dz_{i_k} = - \sum_{\ell \notin \{i_1, \dots, i_c\}} \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{k-1}}, z_\ell, z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_c})} dz_\ell$$

où tous les mineurs jacobiens apparaissant dans le membre de droite appartiennent à J_{p+1} . Si la valuation d'un élément de J_{p+1} selon h était inférieure à celle de Δ , la limite T des espaces tangents selon h serait contenue dans un hyperplan de la forme $\sum_{\ell \notin \{i_1, \dots, N\}} A_\ell dz_\ell = 0$, contrairement à l'hypothèse de transversalité de i). Un raisonnement analogue montrerait que si $h^* J_p = 0$, alors $h(\mathbb{D})$ est tout entier formé de points critiques pour f .

Prouvons que $ii) \Rightarrow i)$: chaque limite d'espaces tangents étant atteinte le long d'un arc $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (Z, 0)$ comme ci-dessus puisque le morphisme $v_f: N_f(X) \rightarrow X$ est une modification, il suffit de lire à l'envers la preuve de $i) \Rightarrow ii)$.

§ 4. Espace conormal d'un espace analytique plongé.

J'ai été conduit par des suggestions de J.P.G. Henry et M. Merle à considérer aussi la construction suivante, dite "des limites d'hyperplans tangents" ou "construction de l'espace conormal", qui est en gros ce qui subsiste dans le cas local de la construction de la variété duale d'une variété projective (voir [Pi] ou [K1 2]).

Soit $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ une immersion fermée d'espaces analytiques réduits pointés. Sur la partie non-singulière X^0 de X , on a l'injection naturelle de

fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow T_{X^0} \xrightarrow{i} T_{\mathbb{C}^N \times X^0} ,$$

et l'on considère le noyau $T_{X^0}^* \mathbb{C}^N$ de l'homomorphisme dual i^* :

$$0 \longrightarrow T_{X^0}^* \mathbb{C}^N \longrightarrow T_{\mathbb{C}^N}^* \times_{\mathbb{C}^N} X^0 \xrightarrow{i^*} T_{X^0}^*$$

Le fibré projectif $\mathbb{P}(T_{X^0}^* \mathbb{C}^N)$ associé à $T_{X^0}^* \mathbb{C}^N$ est donc naturellement plongé dans $\mathbb{P}(T_{\mathbb{C}^N}^* \times_{\mathbb{C}^N} X^0) \simeq X^0 \times \mathbb{P}^{N-1} \subset X \times \mathbb{P}^{N-1}$, où \mathbb{P}^{N-1} désigne l'espace des hyperplans de \mathbb{C}^N .

4.1 Proposition-Définition : On appelle espace conormal à $X \subset \mathbb{C}^N$ l'adhérence $C(X \subset \mathbb{C}^N)$ dans $X \times \mathbb{P}^{N-1}$ du fibré projectif $\mathbb{P}(T_{X^0}^* \mathbb{C}^N) \subset X \times \mathbb{P}^{N-1}$. C'est un sous-espace analytique fermé réduit de dimension $N-1$ de $X \times \mathbb{P}^{N-1}$.

Preuve : Choisissons un système de coordonnées z_1, \dots, z_N sur \mathbb{C}^N . Le problème étant local sur X , nous pouvons supposer X défini dans \mathbb{C}^N par p équations $f_i(z_1, \dots, z_N) = 0, 1 \leq i \leq p$. Choisissons les coordonnées naturelles $(a_1 : \dots : a_N)$ sur \mathbb{P}^{N-1} , et considérons le sous-espace analytique fermé W de $X \times \mathbb{P}^{N-1}$ défini par les équations exprimant les conditions suivantes :

$$\text{rang} \begin{vmatrix} a_1, & \dots, & a_N \\ \frac{\partial f_{i_1}}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial f_{i_1}}{\partial z_N} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_{i_{N-d}}}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial f_{i_{N-d}}}{\partial z_N} \end{vmatrix} < N-d+1 .$$

D'après la définition, notre espace $C(X)$ n'est autre que l'adhérence dans $X \times \mathbb{P}^{N-1}$ de $W - (\text{Sing } X \times \mathbb{P}^{N-1})$ d'où aussitôt l'analyticité, et le fait que $C(X \subset \mathbb{C}^N)$ est réduit.

Pour calculer la dimension de $C(X \subset \mathbb{C}^N)$, considérons le morphisme naturel

$$\kappa : C(X \subset \mathbb{C}^N) \longrightarrow X$$

induit par la première projection $X \times \mathbb{P}^{N-1} \rightarrow X$. Pour tout $x \in X^0$, $\tau^{-1}(x) \subset \mathbb{P}^{N-1}$ est l'ensemble des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant $T_{X,x}$, et l'on a donc $\tau^{-1}(x) = \mathbb{P}^{N-d-1}$ où $d = \dim_x X$. On en déduit bien l'égalité $\dim C(X \subset \mathbb{C}^N) = N-1$.

4.1.1 La plupart du temps, nous travaillerons avec un plongement $X \subset \mathbb{C}^N$ fixé et nous noterons simplement

$$\kappa : C(X) \longrightarrow X$$

l'espace conormal. Noter que le morphisme κ est projectif, et en particulier propre.

4.2 Remarques : 1) (On suppose X purement de dimension d .) Pour tout $x \in X$, on a : $N-d-1 \leq \dim \kappa^{-1}(x) \leq N-2$.

2) On peut penser à un point de $C(X)$ comme à un couple (x, H) où H est une limite ($i \rightarrow \infty$) d'hyperplans H_i tels qu'il existe une suite $x_i \in X^0$, $x_i \rightarrow x$, avec $H_i \supset T_{X, x_i}$.

3) Si $N = d+1$, $\kappa : C(X) \rightarrow X$ s'identifie à la modification de Nash de X .

4.3 Proposition-Définition : Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme satisfaisant les hypothèses de 1.1 et de plus muni d'un δ -plongement $X \subset S \times \mathbb{C}^N$. Avec les notations de 1.1, considérons le fibré conormal relatif $T_{X-F, f}^*$ (ou $T_{X-F/S}^*$) défini

comme noyau de l'homomorphisme naturel $T_{S \times \mathbb{C}^N/S}^* \times (X-F) \xrightarrow{i^*} T_{X-F/S}^*$. On

appelle espace conormal relatif la fermeture dans $X \times \mathbb{P}^{N-1}$ de

$\mathbb{P}(T_{X-F/S}^*) \subset (X-F) \times \mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^{N-1}$. C'est un espace analytique réduit

$C_f(X) \xrightarrow{\kappa_f} X$ propre au-dessus de X , de dimension $N-1 + \dim S$.

La preuve est tout-à-fait analogue à celle du cas absolu.

Ici encore, si $N = d+1$, où d est la dimension des fibres de f , supposées réduites et de dimension pure, l'espace conormal relatif peut être naturellement identifié à la modification de Nash relative.

* * *

C H A P I T R E I I I

STRATIFICATIONS

Introduction. Dans ce chapitre, je commence par montrer comment, étant donnée une condition d'incidence portant sur des couples de sous-espaces non-singuliers (X_α, X_β) d'un espace X , et satisfaisant des hypothèses très simples, il est possible de construire, pour tout espace analytique X , des stratifications $X = \cup X_\alpha$ telles que tout couple de strates (X_α, X_β) satisfasse la condition d'incidence donnée.

L'exemple typique pour nous de condition d'incidence, les conditions de Whitney, est introduit et l'on montre comment le théorème de Bertini idéaliste du chapitre précédent implique que cette condition d'incidence est stratifiante.

Au § 3, j'étudie brièvement les stratifications définies par des invariants numériques, puisque le résultat principal de ce travail montre en particulier que la stratification de Whitney "canonique" d'un espace analytique est de cette nature. Ensuite on étudie un peu la transversalité de deux sous-ensembles analytiques stratifiés d'un espace analytique non-singulier, surtout pour montrer des lemmes techniques qui seront utiles dans la suite et énoncer le théorème de généricité par translation de Kleiman. Le chapitre se termine par un résultat facile selon lequel une condition de transversalité implique l'égalité ensembliste du transformé strict et du transformé total d'un sous-espace fermé $Z \subset X$ par un éclatement $p: X' \rightarrow X$.

§ 1. Conditions d'incidence.

1.1 Définition : Soit X un espace analytique. Nous dirons qu'un sous-ensemble A de X est localement fermé à la Zariski dans X si il existe deux sous-ensembles analytiques fermés F et G de X tels que $A = F - G$.

Nous dirons que A est constructible dans X si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que $A \cap U$ soit combinaison booléenne de sous-ensembles localement fermés à la Zariski dans U .

On remarquera que, d'après [W], la fermeture dans X d'un sous-ensemble constructible de X est un sous-ensemble analytique fermé de X , ainsi que la fermeture de sa frontière, et que la classe des sous-ensembles constructibles est stable par les opérations booléennes alors que celle des sous-ensembles localement fermés à la Zariski est stable par union finie et intersection finie.

1.2 Définition : Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un espace topologique X est dite localement finie si tout point $x \in X$ possède un voisinage U tel que $\{i \in I / A_i \cap U \neq \emptyset\}$ soit un ensemble fini.

Exercice : Montrer que tout sous-ensemble constructible A d'un espace analytique X est réunion d'une famille localement finie de sous-ensembles localement fermés à la Zariski de X .

1.3 Définition : Soient E et F deux sous-ensembles constructibles (resp. localement fermés à la Zariski) d'un espace analytique X . La frontière de E dans F est le sous-ensemble constructible (resp. localement fermé à la Zariski) dans X et rare dans F :

$$\partial_F(E) = \overline{E-F} \cap F .$$

Dans tout ce qui suit, on peut lire "constructible" à la place de

"localement fermé à la Zariski", vocable que l'on abrègera d'ailleurs en "localement fermé" pour alléger.

1.4 Définition : Nous appellerons "condition d'incidence" toute condition portant sur des quadruplets (X, S_1, S_2, x) , où X est un espace analytique, S_1 est un sous-ensemble localement fermé de X , S_2 un autre sous-ensemble localement fermé de X contenu dans $\overline{S_1} - S_1$, enfin x est un point de S_2 ; cette condition est astreinte à vérifier une condition d'hérédité que voici :

(H) Pour tout quadruplet (X, S_1, S_2, x) satisfaisant la condition d'incidence, et tout sous-ensemble $S'_2 \subset S_2$ localement fermé dans X et non-singulier en $x \in S'_2$, le quadruplet (X, S_1, S'_2, x) satisfait encore la condition d'incidence.

Nous dirons qu'une condition d'incidence est stratifiante si, pour tout triplet (X, S_1, S_2) comme ci-dessus, l'ensemble des points $x \in S_2$ tels que le quadruplet (X, S_1, S_2, x) satisfasse la condition d'incidence contient un sous-ensemble constructible dans X (ou, de façon équivalente, dans $\overline{S_2}$) et dense dans $\overline{S_2}$.

1.5 Proposition : Etant donnée une condition d'incidence stratifiante, pour tout espace analytique X et toute famille localement finie $(X_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles localement fermés de X , il existe une partition de X en sous-ensembles localement fermés $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$, formant une famille localement finie dans X , telle que chaque S_α soit non-singulier, connexe et non vide, et que de plus la partition $X = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ satisfasse les conditions suivantes :

i) Pour $i \in I$, $S_\alpha \cap \overline{X}_i \neq \emptyset \Rightarrow S_\alpha \subset \overline{X}_i$, et $S_\alpha \cap (\overline{X}_i - X_i) \neq \emptyset \Rightarrow S_\alpha \subset \overline{X}_i - X_i$, c'est-à-dire que pour $i \in I$, \overline{X}_i et X_i sont union de strates.

ii) Pour $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, $\overline{S}_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \overline{S}_\alpha - S_\alpha \supseteq S_\beta$ et, pour tout $x \in S_\beta$, le quadruplet $(X, S_\alpha, S_\beta, x)$ satisfait la condition d'incidence donnée.

Lemme 1 : Soient X un espace analytique, et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-ensembles analytiques fermés de X tels que si $Z_n \neq \emptyset$, Z_{n+1} soit rare

dans Z_n , pour tout $n \geq 0$, alors on a : $\bigcap_{n \geq 0} Z_n = \emptyset$ et en fait tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que : il existe n_0 tel que $U \cap Z_n = \emptyset$ pour $n \geq n_0$.

Preuve : D'après l'hypothèse, en tout point $x \in X$, on a $\dim_x Z_{n+1} < \dim_x Z_n$. Soit $x \in X$, et posons $d = \dim_x X$. D'après la semi-continuité de la dimension, il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour $y \in U$ on ait $\dim_y X \leq d$. D'après la définition topologique de la dimension des espaces analytiques, on a $Z_n \cap U = \emptyset$ pour $n \geq d+1$. ■

Lemme 2 : Soient $Z' \subset Z \subset X$ deux sous-ensembles analytiques fermés de X et E un sous-ensemble localement fermé de X ; si l'on a $\partial_{\bar{E}}(Z) \subset Z'$, alors $\bar{E} \cap (Z - Z')$ est ouvert et fermé dans $Z - Z'$.

Preuve : Soit $x \in \bar{E} \cap (Z - Z')$; d'après la définition de $\partial_{\bar{E}}(Z)$, on a : $x \notin \overline{Z - \bar{E} \cap \bar{E}}$, donc il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $U \cap E \neq \emptyset$ implique $U \cap (Z - \bar{E}) \neq \emptyset$. Or $x \in U \cap E$, donc $U \cap Z \subset \bar{E}$; on peut supposer que $U \cap Z' = \emptyset$ puisque Z' est fermé et $x \notin Z'$, et on a donc un ouvert U tel que $U \cap Z \subset \bar{E}$ et $U \cap Z' \cap E = \emptyset$, c'est-à-dire que $U \cap Z$ est un voisinage ouvert de x dans $\bar{E} \cap (Z - Z')$. Enfin, $\bar{E} \cap (Z - Z')$ est évidemment fermé dans $Z - Z'$. ■

Supposons maintenant avoir construit un sous-ensemble localement fermé $Z_n \subset X$, et des sous-ensembles localement fermés $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X formant une partition de $X - Z_n$ qui satisfait les conditions de la Proposition. Nous allons construire un sous-ensemble fermé rare $Z_{n+1} \subset Z_n$ et des sous-ensembles $S'_{\alpha'} \subset Z_n - Z_{n+1}$ localement fermés dans X et tels que la collection des S_α , $S'_{\alpha'}$ soit une partition de $X - Z_{n+1}$ satisfaisant aux conditions de la Proposition.

On commencera la construction avec $Z_0 = X$, et on construira ainsi par récurrence une collection de strates S_α satisfaisant aux conditions de la Proposition pour $X = X - \bigcap_{n \geq 0} Z_n$ (Lemme 1).

Posons, pour tout $\alpha \in A$, $T_\alpha = \partial_{Z_n}(\bar{S}_\alpha)$ et pour tout $i \in I$, $Y_i = \partial_{Z_n}(\bar{X}_i)$; ce sont deux familles localement finies de sous-ensembles localement fermés de X .

Considérons les triplets $(X, S_\alpha, (\overline{S}_\alpha - S_\alpha) \cap Z_n)$. L'hypothèse que notre condition d'incidence est stratifiante nous assure de l'existence de sous-ensembles denses $V_\alpha \subset (\overline{S}_\alpha - S_\alpha) \cap Z_n$ localement fermés dans X , tels que le quadruplet $(X, S_\alpha, (\overline{S}_\alpha - S_\alpha) \cap Z_n, x)$ satisfasse la condition d'incidence donnée pour tout $x \in V_\alpha$. Soit R_α la frontière totale de V_α dans Z_n , c'est-à-dire

$$R_\alpha = (\overline{V}_\alpha - V_\alpha) \cup (\overline{Z_n - V_\alpha} - (Z_n - V_\alpha)) .$$

La famille des R_α est encore une famille localement finie de sous-ensembles localement fermés.

Posons $Z_{n+1} = \text{Sing } Z_n \cup (\bigcup_{i \in I} Y_i) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} R_\alpha)$; Z_{n+1} est un sous-ensemble analytique fermé de Z_n , donc de X , rare dans Z_n , puisque chacune des familles en vue est une famille localement finie de sous-ensembles analytiques fermés rares de Z_n .

Définissons les S'_α , comme étant les composantes connexes de $Z_n - Z_{n+1}$. La fermeture de chaque S'_α , est une composante irréductible de Z_n et les S'_α , sont donc bien localement fermés dans X . Par ailleurs, la famille des S'_α , est localement finie. Pour vérifier que la stratification de $X - Z_{n+1}$ par $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(S'_\alpha)_{\alpha' \in A}$, satisfait la condition d'incidence, on peut, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque $\alpha' \neq \beta' \Rightarrow S'_\alpha \cap \overline{S'_{\beta'}} = \emptyset$, se contenter de le vérifier pour une strate S_α et une strate S'_α ; supposons donc $S'_\alpha \cap \overline{S_\alpha} \neq \emptyset$, et remarquons que $\overline{Z_n - \overline{S_\alpha}} \cap \overline{S_\alpha} = T_\alpha \subset Z_{n+1}$. D'après le Lemme 2, $\overline{S_\alpha} \cap (Z_n - Z_{n+1})$ est ouvert et fermé dans $Z_n - Z_{n+1}$ et donc contient chaque composante connexe de $Z_n - Z_{n+1}$ qu'il rencontre, d'où l'inclusion $\overline{S_\alpha} \supset S'_\alpha$. Le même argument montre que, puisque $Z_{n+1} \supset Y_i$, le sous-ensemble $\overline{X}_i \cap (Z_n - Z_{n+1})$ est ouvert et fermé dans $Z_n - Z_{n+1}$ et donc contient chaque S'_α , qu'il rencontre. Vérifions finalement que si $\overline{S_\alpha} \supset S'_\alpha$, la condition d'incidence est satisfaite pour chaque quadruplet $(X, S_\alpha, S'_\alpha, x)$ avec $x \in S'_\alpha$. Il suffit pour cela, grâce à la condition (H), de vérifier l'inclusion $S'_\alpha \subset V_\alpha$. Or, puisque Z_{n+1} contient R_α , on a l'égalité $S'_\alpha \cap V_\alpha = S'_\alpha \cap \overline{V}_\alpha$ et par le Lemme 2, $\overline{V}_\alpha \cap (Z_n - Z_{n+1})$ est ouvert et fermé dans $Z_n - Z_{n+1}$, donc contient chaque composante connexe S'_α , qu'il rencontre, d'où

$S'_\alpha \subset \overline{V}_\alpha$ et donc $S'_\alpha \subset V_\alpha$.

On a montré toute la proposition sauf le fait que les $\overline{X}_i - X_i$ étaient réunion de strates. Il suffit pour cela d'appliquer la Proposition précédente à la famille localement finie constituée des fermés analytiques $(\overline{X}_i, \overline{X}_i - X_i)_{i \in I}$.

Remarque : Dans le cas où l'on a remplacé "localement fermé" par "constructible", dans la lecture de ce qui précède, il faut remplacer la famille $(\overline{X}_i, \overline{X}_i - X_i)$ par la famille localement finie de sous-ensembles localement fermés à la Zariski que l'on aura construite en résolvant l'exercice proposé plus haut pour chacun des X_i .

§ 2. Conditions de Whitney.

2.1 Considérons l'espace vectoriel \mathbb{C}^M muni de coordonnées u_1, \dots, u_M et de la métrique hermitienne usuelle ; pour u, v dans \mathbb{C}^M , $(u, v) = \sum u_i \overline{v_i}$. Etant donnés deux sous-espaces vectoriels A et B de \mathbb{C}^M , on définit la distance de A à B (dans cet ordre) :

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{\substack{u \in B^\perp - \{0\} \\ v \in A - \{0\}}} \left(\frac{|(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} \right)$$

où $B^\perp = \{u \in \mathbb{C}^M / (u, b) = 0 \text{ pour tout } b \in B\}$ et $\|u\|^2 = (u, u)$. On notera que $\text{dist}(A, B) = 0$ équivaut à l'inclusion $B^\perp \subset A^\perp$, c'est-à-dire $B \supset A$. Par ailleurs, soit $G = G(M, a)$ la grassmannienne des directions de sous-espaces de dimension a de \mathbb{C}^M ; posant $a = \dim A$, $b = \dim B$, l'application $G_a \times G_b \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(A, B) \mapsto \text{dist}(A, B)$ est une fonction analytique réelle sur le produit $G_a \times G_b$, comme on le vérifie aussitôt. Remarquons aussi que l'inégalité de Schwarz implique $\text{dist}(A, B) \leq 1$.

Soit $p: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^l$ une projection de la forme $(u_1, \dots, u_M) \rightarrow (u_1, \dots, u_l)$ et telle que $\text{Ker } p \cap A = (0)$. On a alors l'inclusion $p(B)^\perp \subset B^\perp$ où $p(B)^\perp$ désigne l'orthogonal de $p(B)$ dans \mathbb{C}^l muni de la structure hermitienne définie par les coordonnées (u_1, \dots, u_l) : en effet, pour tout $v \in \mathbb{C}^l$, on a $(v, b) = (v, p(b))$;

pour la même raison, on a :

$$\sup_{\substack{u' \in p(B)^\perp - \{0\} \\ v' \in p(A) - \{0\}}} \left(\frac{|(u', v')|}{\|u'\| \cdot \|v'\|} \right) = \sup_{\substack{u' \in p(B)^\perp - \{0\} \\ v \in A - \{0\}}} \left(\frac{|(u', v)|}{\|u'\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|p(v)\|} \right) .$$

D'après l'hypothèse $\text{Ker } p \cap A = (0)$, il existe une constante positive C ne dépendant que de A et de la projection choisie et telle que pour tout $v \in A - \{0\}$ on

ait $\frac{\|v\|}{\|p(v)\|} \leq \frac{1}{C} < \infty$; il vient donc

$$\text{dist}(p(A), p(B)) \leq \frac{1}{C} \sup_{\substack{u' \in p(B)^\perp - \{0\} \\ v \in A - \{0\}}} \left(\frac{|(u', v)|}{\|u'\| \cdot \|v\|} \right) \leq \frac{1}{C} \text{dist}(A, B)$$

la dernière inégalité provenant de l'inclusion $p(B)^\perp \subset B^\perp$.

Voici une autre inégalité du même type qui nous servira plus bas :

Reprenons la même situation que ci-dessus, mais sans supposer que $\text{Ker}(p|_A) = 0$.

Soit B_1 un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^ℓ . Il existe une constante positive C ne dépendant que de p , A et B_1 et telle que $\text{dist}(p(A), B_1) \leq C \text{dist}(A, p^{-1}(B_1))$.

En effet, pour tout $p(a) \in p(A)$, soit $E_a = \{w \in \text{Ker } p / p(a) + w \in A\}$; E_a est un sous-espace affine de $\text{Ker } p$ de la forme $w_0 + \text{Ker}(p|_A)$, et l'application $p(A) \rightarrow \text{Ker } p / \text{Ker}(p|_A)$ qui à $p(a)$ associe la classe de w_0 est linéaire. On en déduit que tout élément de $p(A)$ peut s'écrire $p(p(a) + w(a))$ où $\|w(a)\| \leq C_1 \|p(a)\|$, $C_1 \in \mathbb{R}_+$. Or, puisque $(p(p^{-1}(B_1)))^\perp = B_1^\perp$ est contenu dans $(p^{-1}(B_1))^\perp$, on a l'inégalité :

$$\text{dist}(A, p^{-1}(B_1)) \geq \sup_{\substack{a \in A - \text{Ker } p \\ v \in B_1^\perp - \{0\}}} \left\{ \frac{|(a, v)|}{\|a\| \cdot \|v\|} \right\}$$

mais on a $(a, v) = (p(a), v)$ puisque $v \in B_1^\perp \subset \mathbb{C}^\ell$ par définition de B_1^\perp , et il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{a \in A - \text{Ker } p \\ v \in B_1^\perp - \{0\}}} \left\{ \frac{|(a, v)|}{\|a\| \cdot \|v\|} \right\} &\geq \sup_{\substack{p(a) \in p(A) - \{0\} \\ v \in B_1^\perp - \{0\}}} \left\{ \frac{|(p(a), v)|}{\|p(a)\| + \|w(a)\|} \right\} \\ &\geq \left(\frac{1}{1+C_1} \right) \sup_{\substack{p(a) \in p(A) - \{0\} \\ v \in B_1^\perp - \{0\}}} \left\{ \frac{|(p(a), v)|}{\|p(a)\| \cdot \|v\|} \right\} , \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C = 1 + C_1$.

2.2 Soient maintenant X un espace analytique réduit purement de dimension d , Y un sous-espace localement fermé à la Zariski de X et 0 un point non-singulier de Y . Choisissons un plongement local $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ au voisinage de 0 , et une rétraction locale $\rho : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$; à un isomorphisme analytique près, on peut alors identifier Y à (un ouvert de) \mathbb{C}^k et supposer X plongé dans (un ouvert de) $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ de telle façon que la rétraction ρ coïncide avec la première projection.

2.2.1 Définition : On dit que le couple de strates (X^0, Y^0) formé de la partie non singulière X^0 de X et de la partie non-singulière Y^0 de Y satisfait la condition a) de Whitney en $0 \in Y^0$ si il existe un plongement local comme ci-dessus tel que pour toute suite de points $x_i \in X^0$ tendant vers 0 , on ait, quitte à extraire une sous-suite telle que $\text{Lim } T_{X, x_i}$ existe, l'inclusion

$$\text{Lim } T_{X, x_i} \supset T_{Y, 0} \quad (\text{en direction})$$

c'est-à-dire encore

$$\text{Lim}_{x_i \rightarrow 0} \text{dist}(T_{Y, 0}, T_{X, x_i}) = 0 .$$

On dit, (après Hironaka [H 1]), que (X^0, Y) satisfait la condition a) de Whitney stricte avec exposant e si e est un nombre réel positif tel qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans X et un nombre réel positif C tels que pour tout $x \in X^0 \cap U$ on ait l'inégalité

$$\text{dit } (T_{Y,0}, T_{X,x}) \leq C \text{ dist } (x,Y)^e$$

où $\text{dist}(x,Y)$ désigne la distance de x à Y dans \mathbb{C}^N .

On dit que le couple de strates (X^0, Y^0) satisfait la condition b) de Whitney en $0 \in Y^0$ si il existe un plongement local et une rétraction ρ comme ci-dessus tels que pour toute suite de points $x_i \in X^0 - Y$, notant $\overline{x_i \rho(x_i)}$ la direction de la droite (sécante) qui joint x_i à $\rho(x_i)$ dans \mathbb{C}^N on ait, quitte à extraire une sous-suite telle que $\lim_{x_i \rightarrow 0} T_{X,x_i}$ et $\lim_{x_i \rightarrow 0} \overline{x_i \rho(x_i)}$ existent, l'inclusion

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} T_{X,x_i} \supset \lim_{x_i \rightarrow 0} \overline{x_i \rho(x_i)}$$

c'est-à-dire encore

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \text{dist } (\overline{x_i \rho(x_i)}, T_{X,x_i}) = 0 .$$

On dit, après Hironaka (Loc. cit.), que (X^0, Y) satisfait la condition b) de Whitney avec exposant e en 0 si e est un nombre réel positif tel qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans X et une constante positive C tels que pour tout $x \in X^0 \cap U$ on ait l'inégalité

$$\text{dist } (\overline{x \rho(x)}, T_{X,x}) \leq C \cdot \text{dist } (x,Y)^e .$$

2.2.2 Proposition (Whitney, [W]) : La condition, portant sur des quadruplets (X, S_1, S_2, x) comme plus haut, que voici : x est un point non-singulier de S_2 et le couple de strates (S_1, S_2) satisfait les conditions a) et b) en $x \in S_2$ est une condition d'incidence stratifiante.

Démonstration : Remarquons d'abord que la condition d'hérédité est évidemment satisfaite. Nous allons décrire une condition sur (X^0, Y) qui implique, au voisinage d'un point non-singulier de Y , les conditions de Whitney.

Rappelons tout d'abord qu'à l'immersion $\bar{Y} \hookrightarrow X$ correspond un morphisme surjectif de \mathcal{O}_Y -modules

$$\Omega_X^1|_Y \longrightarrow \Omega_Y^1 \longrightarrow 0$$

exprimant l'inclusion de l'espace tangent de Zariski $\text{Specan}_Y \text{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y^1)$ de Y dans la restriction à Y de l'espace tangent de Zariski de X .

(On rappelle que l'espace vectoriel relatif associé à un faisceau cohérent tel que Ω_Y^1 , qui n'est pas en général un fibré vectoriel, a pour faisceau de sections le faisceau dual du faisceau cohérent donné.

Rappelons aussi que Ω_X^1 est défini comme ceci : soit I le faisceau cohérent définissant la diagonale $X \xrightarrow{\delta} X \times X$ dans l'ouvert de $X \times X$ où elle est fermée ; le \mathcal{O}_X -module $\delta^* I/I^2$ est \mathcal{O}_X -isomorphe à Ω_X^1 . Considérons l'immersion fermée naturelle $\text{id}_{\bar{Y}} \times i$ où i désigne l'immersion $\bar{Y} \hookrightarrow X$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} \times X & \hookrightarrow & X \times X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{Y} & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On en déduit un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_{\bar{Y}}$ -modules

$$\Omega_X^1|_{\bar{Y}} \longrightarrow N_{X, \bar{Y}} \longrightarrow 0$$

où $N_{X, \bar{Y}}$ désigne le faisceau conormal de \bar{Y} dans X , c'est-à-dire le faisceau de $\mathcal{O}_{\bar{Y}}$ -modules S/S^2 où S est l'idéal définissant \bar{Y} dans X .

Cet homomorphisme exprime le fait que les limites de sécantes joignant un point de Y à un point de $X - Y$ (pour un plongement local) donnent des directions tangentes à X aux points de Y .

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_{\bar{Y}}N(X) & \xrightarrow{\sim e} & N(X) \\ \downarrow \nu' & \searrow \eta & \downarrow \nu \\ E_{\bar{Y}}(X) & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

où ν désigne la modification de Nash de X , e l'éclatement de \bar{Y} dans X et \tilde{e} l'éclatement du sous-espace analytique $\nu^{-1}(\bar{Y})$ dans $N(X)$. La propriété universelle de l'éclatement implique alors l'existence d'un morphisme ν' faisant commuter le diagramme et l'on pose $\eta = \nu \circ \tilde{e} = e \circ \nu'$.

Posons $Z = E_{\bar{Y}}N(X)$ et $\mathcal{Y} = \eta^{-1}(\bar{Y})$. Par construction, le \mathcal{O}_Z -module $\eta^* \Omega_X^1$ a un quotient localement libre, d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \eta^* \Omega_X^1 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

que l'on peut restreindre à \mathcal{Y} :

$$0 \longrightarrow K|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \eta^* \Omega_X^1|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow L|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0 .$$

D'autre part, on a sur \mathcal{Y} la suite exacte

$$\eta^* \Omega_X^1|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \eta^* \Omega_{\bar{Y}}^1 \longrightarrow 0 .$$

De même, si l'on note \mathcal{J} l'idéal de Z définissant \mathcal{Y} , on a une surjection naturelle de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -modules :

$$\eta^* N_{X, \bar{Y}} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow 0$$

et une surjection

$$\eta^* \Omega_X^1|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \eta^* N_{X, \bar{Y}} \longrightarrow 0 .$$

Soit maintenant $y \in Y$. Si en tout point $y' \in \eta^{-1}(y)$ l'homomorphisme

$$(\eta^* \Omega_X^1|_{\mathcal{Y}})_{y'} \longrightarrow (\eta^* \Omega_{\bar{Y}}^1)_{y'} \longrightarrow 0$$

se factorise par $(L|_{\mathcal{Y}})_{y'}$, grâce à la propriété de η , il existe un voisinage ouvert U de y dans \bar{Y} tel que l'on ait une surjection

$$L|_{\eta^{-1}(U)} \longrightarrow \eta^* \Omega_{\bar{Y}}^1|_{\eta^{-1}(U)} \longrightarrow 0$$

ce qui signifie précisément, d'après la définition de L , que la condition a) de Whitney est vérifiée pour tout plongement local de X dans un espace affine au voisinage d'un point $y_1 \in U$. En effet, pour un plongement local $X \subset \mathbb{C}^N$, on

peut comme nous l'avons vu plus haut, identifier le fibré vectoriel sur $N(X)$ associé à L à la restriction à $N(X)$ du fibré $X \times \mathcal{C}$ sur $X \times G$, où \mathcal{C} est le fibré tautologique sur la grassmannienne G des d -plans de \mathbb{C}^N , et la surjection ci-dessus se traduit par une injection $\eta^*(T_{Y^0}) \hookrightarrow X \times \mathcal{C} | \eta^{-1}(Y)$.

Soit $B_1 \subset \mathcal{Y}$ le support dans \mathcal{Y} du $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module cohérent image de $K|_{\mathcal{Y}}$ par l'homomorphisme :

$$\eta^* \Omega_X^1 |_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \eta^* \Omega_{\bar{Y}}^1 \longrightarrow 0 .$$

Il est clair que la condition ci-dessus est satisfaite pour tout point y de l'ouvert (éventuellement vide) $Y^0 - \eta(B_1)$.

Soit de même B_2 le support dans \mathcal{Y} du $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module cohérent image de $K|_{\mathcal{Y}}$ par l'homomorphisme composé

$$\eta^* \Omega_X^1 |_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \eta^* N_{X, \bar{Y}} \longrightarrow \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 .$$

Il est clair que tout point y' de l'ouvert (éventuellement vide) $Y^0 - \eta(B_2)$ possède un voisinage ouvert U dans \bar{Y} tel que l'on ait une surjection

$$L | \eta^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 | \eta^{-1}(U) \longrightarrow 0$$

ce qui, en utilisant un plongement local et le fait que la fibre du fibré en droites sur \mathcal{Y} correspondant au faisceau inversible de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -modules $\mathcal{I} / \mathcal{I}^2$ en un point $y' \in \mathcal{Y}$ n'est autre que la direction limite en $y = \eta(y')$ de directions de sécantes qui correspond au point $v'(y') \in E_{\bar{Y}}(X)$, implique que la condition b) de Whitney est satisfaite pour tout plongement local $X \subset \mathbb{C}^N$ et en tout point de U , puisque la surjection ci-dessus implique une injection, pour toute suite de points $x_i \in X^0$ tendant vers $y = \eta(y')$, que voici :

$$\{(y', \text{limite } (x_i \rightarrow y) \text{ en } y \text{ de direction de sécantes } \widehat{x_i \rho(x_i)})\} \\ \subset \{(y', \text{limite en } y \text{ de direction d'espaces tangents } T_{X, x_i})\} .$$

Par conséquent la condition d'incidence est vérifiée en tout point de l'ensemble $\bar{Y} - (\text{Sing } \bar{Y}) \cup \eta(B_1) \cup \eta(B_2)$ qui est localement fermé à la Zariski dans \bar{Y} puisque B_1 et B_2 sont des sous-ensembles analytiques fermés de \mathcal{Y} et que η est

propre.

Inversement, étant donné un point $y \in Y^0$ tel que le couple (X^0, Y^0) satisfasse les conditions a) et b) de Whitney en tout point d'un voisinage U de y dans Y , on peut remonter l'argument précédent pour prouver que y appartient à $Y^0 - \eta(B_1) \cup \eta(B_2)$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que le sous-ensemble

$\bar{Y} - (\text{Sing } Y) \cup \eta(B_1) \cup \eta(B_2)$ est dense dans \bar{Y} . Pour cela, il suffit de prouver que l'ouvert formé des points de Y^0 au voisinage desquels les conditions a) et b) de Whitney sont satisfaites est dense dans Y^0 .

Soit donc 0 un point de Y^0 . Choisissons un plongement local

$(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N-k} \times \mathbb{C}^k, 0)$ envoyant Y sur $0 \times \mathbb{C}^k$, et la rétraction locale $\rho: X \rightarrow Y$ induite par la projection $\mathbb{C}^{N-k} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$. Munissons $\mathbb{C}^{N-k} \times \mathbb{C}^k$ des coordonnées

$z_1, \dots, z_{N-k}, y_1, \dots, y_k$ et essayons, pour un point $x \in X^0$, d'estimer la distance de $T_{Y,0}$ (resp. de la droite $\widehat{x \rho(x)}$) à $T_{X,x}$. Supposons X défini dans \mathbb{C}^N au voisinage de 0 par l'idéal engendré par (f_1, \dots, f_m) , f_i holomorphe sur \mathbb{C}^N au voisinage de 0 . L'espace tangent $T_{X,x}$ peut être défini dans $T_{\mathbb{C}^N, x}$, identifié à \mathbb{C}^N muni des coordonnées $dz_1, \dots, dz_{N-k}, dy_1, \dots, dy_k$, par les $N-d$ équations :

$$(E_i) \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})}(x) dz_i = \sum_{\ell=1}^k \varepsilon_\ell \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(y_\ell, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})}(x) dy_\ell \\ + \sum_{j=N-d}^{N-k} \varepsilon_j \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_j, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})}(x) dz_j$$

($1 \leq i \leq N-d$) où les ε valent ± 1 , pourvu que le mineur jacobien

$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})}(x)$ soit non nul. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent,

on peut toujours choisir un système de générateurs ayant cette propriété et même, étant donné un arc analytique $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, 0)$ tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset X^0$, tel que ce mineur jacobien ne s'annule en aucun point de $h(\mathbb{D} - \{0\})$.

Ainsi, l'espace vectoriel $T_{X,x}^\perp$ perpendiculaire à $T_{X,x}$ dans $T_{\mathbb{C}^N, x}$ est engendré par les $N-d$ vecteurs w_i dont les coordonnées sont les complexes conjugués des déterminants jacobiens apparaissant dans l'équation (E_i) . Par définition on

a donc

$$\text{dist} (T_{Y,0}, T_{X,x}) = \sup_{\substack{dy \in \mathbb{C}^k - \{0\} \\ \underline{\lambda} \in \mathbb{C}^{N-d} - \{0\}}} \left\{ \frac{|\sum_i \bar{\lambda}_i (\sum_{\ell=1}^n \varepsilon_\ell \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(y_\ell, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})} dy_\ell)|}{\|dy\| \cdot \|\sum \lambda_i w_i\|} \right\}$$

Or, l'interprétation transcendantale de la dépendance intégrale (Chap. I, 1.3.1) et l'énoncé du théorème de Bertini idéaliste avec section impliquent l'existence, dans un voisinage ouvert U de 0 dans Y, d'un fermé analytique rare F tel que tout point $y \in Y - F$ possède un voisinage ouvert V dans X tel qu'il existe une constante positive C telle que pour tout point $x \in X^0 \cap V$ on ait les inégalités ($1 \leq \ell \leq h$) :

$$(*) \quad \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(y_\ell, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})} (x) \right| \leq C \sup_{1 \leq j \leq N-k} |z_j(x)| \cdot \sup_{\{i_1, \dots, i_{N-d}\} \subset \{1, \dots, N-k\}} \left\{ \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N-d}})} (x) \right| \right\}$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que le supremum des

$$\left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N-d}})} (x) \right| \text{ est atteint par } \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})} (x) \right| .$$

Un calcul sans mystère montre alors l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\sum \lambda_i w_i\| &\geq (\sum_{i=1}^{N-d} |\lambda_i|^2)^{1/2} \cdot \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})} (x) \right| \\ &\geq \sup |\lambda_i| \cdot \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})} (x) \right| \end{aligned}$$

et l'inégalité triangulaire, jointe à l'inégalité (*) nous donne aussitôt que pour $x \in X^0 \cap V$ on a l'inégalité

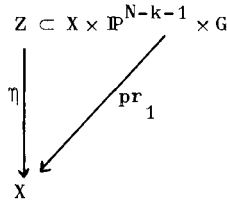
$$\text{dist} (T_{Y,0}, T_{X,x}) \leq C' \text{ dist} (x, Y)$$

où $\text{dist} (x, Y)$ désigne la distance (par exemple $\sup |z_j(x)|$) de x à Y dans \mathbb{C}^N .

Nous avons donc montré la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1, et

en particulier la condition a) de Whitney, en $y \in U - F$.

Avant de traiter la condition b) remarquons que, au voisinage de $0 \in Y$, l'espace $Z = E_Y^{-N}(X)$ peut être construit comme adhérence dans $X \times \mathbb{P}^{N-k-1} \times G$, où G désigne la grassmannienne des d -plans dans \mathbb{C}^N , du graphe du morphisme $X^0 - Y \rightarrow \mathbb{P}^{N-k-1} \times G$ défini par $x \mapsto (\overline{x \rho(x)}, T_{X,x})$. Nous avons donc un diagramme commutatif :



et si nous notons $\delta_b : \mathbb{P}^{N-k-1} \times G \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $(\ell, T) \mapsto \text{dist}(\ell, T)$, vérifier la condition b) en $y \in Y$ revient à vérifier que $|\eta^{-1}(y)| \subset \{y\} \times \mathbb{P}^{N-k-1} \times G$ est contenu dans $\{y\} \times \delta_b^{-1}(0)$, et la condition b) de Whitney stricte avec exposant revient à vérifier que au voisinage de $\eta^{-1}(y)$, la fonction $\delta_b|_Z$ est majorée par $C \cdot \text{dist}(\eta(y'), Y)^e$. On peut (voir [H 3], § 9) assurer la condition b) de Whitney stricte avec un exposant e non précisé, essentiellement en utilisant la première inégalité de Łojasiewicz, pourvu que l'on sache que la fonction δ s'annule en tout point de $\eta^{-1}(Y)$, au-dessus d'un voisinage de 0 , c'est-à-dire que la condition b) est vérifiée en tout point d'un voisinage de 0 dans Y .

Nous allons prouver ici que le couple de strates (X^0, Y^0) satisfait la condition b) en tout point $y \in U - F$, renvoyant à (Loc. cit.) pour la condition b) stricte. Puisque la restriction à Z de la fonction distance δ est analytique réelle, si δ_b ne s'annule pas identiquement sur $|\eta^{-1}(y)|$, on peut trouver $z \in \eta^{-1}(y)$ et un arc analytique réel $h : (\Pi, 0) \rightarrow (Z, z)$ (où $(\Pi =]-1, 1[)$ tel que la limite de δ_b le long de $h(\Pi)$ (i.e. $\lim_{t \rightarrow 0} (\delta \circ h)(t)$) soit différente de 0 . Ceci résulte aussitôt du lemme des petits chemins (cf. [B-C], [H 3]). Montrons que, au contraire, cette limite est nulle, ce qui prouvera que la condition b) est satisfaite. Il suffit de montrer que pour le chemin $\eta \circ h : (\Pi, 0) \rightarrow (X, y)$ la limite en question est nulle. Pour un point $x(t) = \eta \circ h(t) \in X^0 - Y$ de coor-

données $z_1(t), \dots, z_{N-k}(t), y_1(t), \dots, y_k(t)$, estimons la distance $\text{dist}(\overline{x(t)}, T_{X, x(t)})$: on a $(\delta_b \circ h)(t) = \text{dist}(x(t), T_{X, x(t)})$ qui est le supremum pour $\underline{\lambda} \in \mathbb{E}^{N-d} - \{0\}$ des quotients

$$\left\{ \frac{\left| \sum_i \bar{\lambda}_i \left(\sum_{j=N-d}^{N-k} \varepsilon_j \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_j, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})} (x(t)) z_j(t) - \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})} (x(t)) \cdot z_i(t) \right) \right|}{\|z(t)\| \cdot \|\sum \lambda_i w_i\|} \right\}$$

Notant v la valuation t -adique, il nous suffit de montrer que la valuation du numérateur est supérieure à celle du dénominateur : nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que l'infimum des valuations des mineurs jacobiens

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_j, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})} (x(t)) \text{ est atteint par le mineur } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})} (x(t)).$$

Soit b cette valuation, et écrivons $\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, z_{N-d})} (x(t)) = c_0 t^b + \dots$, et

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_j, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})} (x(t)) = c_j t^b + \dots \quad (N-d \leq j \leq N-k). \text{ Ecrivons aussi}$$

$z_i = d_0 t^a + \dots$, et $z_j = d_j t^a + \dots$, avec $a > 0$ et au moins un des d_j non nul.

Or, nous pouvons réécrire chacune des équations (E_i) en remplaçant dz_i (resp. dy_j) par $\frac{dz_i}{dt}$ (resp. $\frac{dy_j}{dt}$) et donc chacun des coefficients de $\bar{\lambda}_i$ au numérateur de l'expression précédente est égal à :

$$- \sum_{\ell=1}^k \varepsilon_\ell \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(y_\ell, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{N-d})} (x(t)) \frac{dy_\ell}{dt}$$

par conséquent l'inclusion du théorème de Bertini idéaliste (chap. II, § 2) jointe au critère valuatif de dépendance intégrale nous donne

$$v \left(\left(\sum_{j=N-d}^{N-k} \varepsilon_j c_j d_j^{a-c_0 d_0 a} \right) t^{a+b-1} + \dots \right) \geq a+b$$

d'où

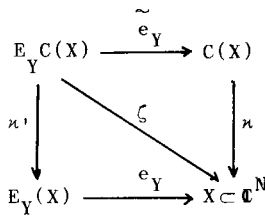
$$\sum_{j=N-d}^{N-k} \varepsilon_j c_j d_j^{a-c_0 d_0 a} = 0 \text{ donc } \sum \varepsilon_j c_j d_j - c_0 d_0 = 0 .$$

La valuation du numérateur de l'expression donnant la distance est donc au moins égale à $a + b + 1$ puisque le coefficient de $t^{a+b} y$ est nul, tandis que la valuation du dénominateur est égale à $a + b$ comme on le vérifie aussitôt en utilisant l'inégalité $\|\sum \lambda_i w_i\| \geq \text{Sup}_i |\lambda_i| \cdot \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N-d})}{\partial(z_1, \dots, f_{N-d})}(x(t)) \right|$ comme plus haut. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} (\delta \circ h)(t) = 0$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition, et donc la preuve de l'existence de stratifications de Whitney, si l'on remarque qu'il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $X = \overline{S_1}$, $Y = S_2$ pour obtenir le fait que la condition d'incidence est stratifiante.

Exercice : Vérifier que si les conditions de Whitney sont réalisées pour un plongement local $X \subset \mathbb{C}^N$, elles le sont pour tous.

2.3 Gardons les notations de 2.2 et considérons un plongement local $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ au voisinage d'un point $0 \in Y^0$, et le diagramme commutatif



où $\kappa : C(X) \rightarrow X$ est l'espace conormal (Chap. II, § 4), e_Y est l'éclatement de Y dans X , \tilde{e}_Y celui de $\tau^{-1}(Y)$ dans $C(X)$ et κ' le morphisme donné par la propriété universelle de l'éclatement. Posons $\zeta = \kappa \circ \tilde{e}_Y$.

2.3.1 Proposition (essentiellement due à Hironaka, [H 1] et [H 2]) : Si l'on a l'égalité $\dim \zeta^{-1}(0) = N - 2 - \dim Y$, le couple de strates (X^0, Y) satisfait la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1, et la condition b) stricte avec un exposant non précisé, au voisinage de 0.

Preuve : Remarquons d'abord qu'il résulte des définitions (2.1)

$$\text{dist}(T_{Y,0}, T_{X,x}) = \sup_{H \supset T_{X,x}} \text{dist}(T_{Y,0}, H)$$

$$\text{dist}(\widehat{(x \circ \rho(x))}, T_{X,x}) = \sup_{H \supset T_{X,x}} \text{dist}(x \circ \rho(x), H)$$

H parcourant l'ensemble des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant (en direction) $T_{X,x}$.

Reprenons maintenant les notations de 2.2.2, et remarquons que $E_Y C(X)$ est naturellement plongé dans $X \times \mathbb{P}^{N-1} \times \mathbb{P}^{N-t-1}$, où $t = \dim Y$, dès que nous avons choisi une rétraction locale $\mathbb{C}^N \rightarrow Y$, et un plongement $X \subset Y \times \mathbb{C}^{N-t}$ compatible avec cette rétraction. Notons $y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_{N-t}$ un système de coordonnées sur $Y \times \mathbb{C}^{N-t}$, et $(b_1 : \dots : b_t ; a_1 : \dots : a_{N-t})$ (resp. $(Z_1 : \dots : Z_{N-t})$) les coordonnées correspondantes sur \mathbb{P}^{N-1} (resp. \mathbb{P}^{N-t-1}). On a alors, pour $H \in \check{\mathbb{P}}^{N-1}$,

$$\text{dist}(T_{Y,0}, H) = \sup_{dy \in \mathbb{C}^+ - \{0\}} \left\{ \frac{|\sum_{i=1}^t b_i dy_i|}{\|dy\| \sqrt{\sum_{j=1}^t |b_j|^2 + \sum_{i=1}^{N-t} |a_i|^2}} \right\},$$

et pour $\ell \in \mathbb{P}^{N-t-1}$,

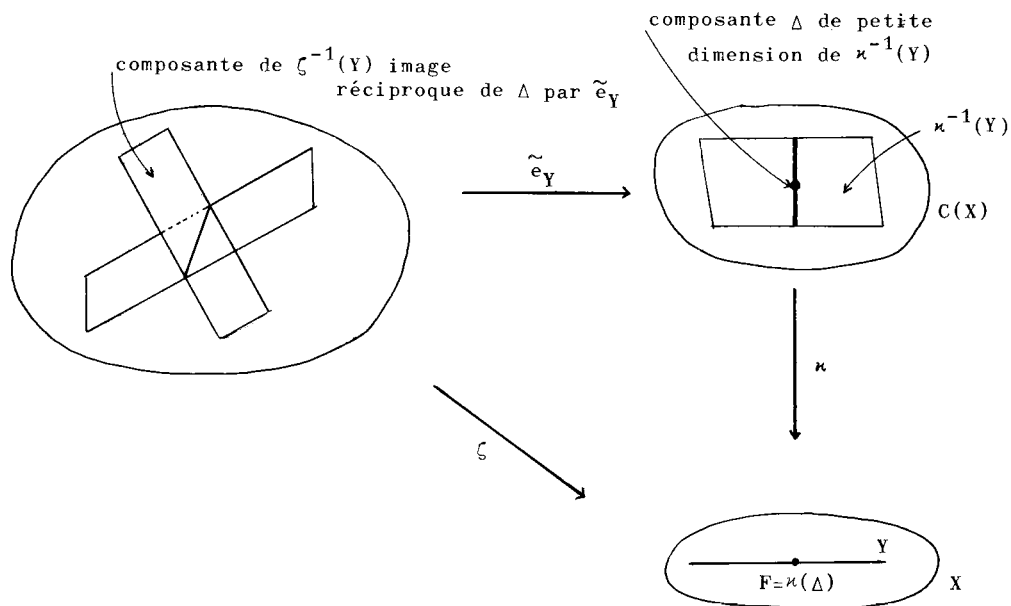
$$\text{dist}(\ell, H) = \sup_{Z \in \mathbb{C}^{N-t} - \{0\}} \left\{ \frac{|\sum a_i Z_i|}{\|Z\| \sqrt{\sum_{j=1}^t |b_j|^2 + \sum_{i=1}^{N-t} |a_i|^2}} \right\}.$$

L'hypothèse implique que pour tout fermé analytique rare $F \subset Y$, l'image réciproque $\zeta^{-1}(F)$ est rare dans $\zeta^{-1}(Y)$; le théorème de Bertini idéaliste nous donne, après une petite traduction (cf. 2.2) un fermé analytique rare $F \subset Y$ tel que en tout point $z \in \zeta^{-1}(Y - F)$, on ait pour $1 \leq j \leq t$, $b_j \mathcal{O}_{E_Y C(X), z} \in (\mathcal{F}(1))_z$, où \mathcal{F} désigne l'idéal, inversible par construction, de $E_Y C(X)$ engendré par $(z_1 \circ \zeta, \dots, z_{N-t} \circ \zeta)$ et $\mathcal{F}(1)$ est son produit avec l'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1)$ par la projection naturelle sur $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$. On en déduit, par une variante de l'argument de (Chap. I, 1.4), que l'on a $b_j \cdot \mathcal{O}_{E_Y C(X)} \in \mathcal{F}(1)$, et ceci étu-

dié au voisinage de $\kappa^{-1}(0)$ implique la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1 ; on traite la condition b) stricte comme en 2.2.

(Remarque : On peut remplacer l'espace conormal par l'éclatement de l'idéal jacobien ou la modification de Nash.)

Voici un schéma illustrant la situation que l'hypothèse fait éviter :



L'hypothèse faite implique qu'il ne peut y avoir de composante de $\zeta^{-1}(Y)$ s'envoyant tout entière dans F , fermé analytique strict de Y .

Remarque : Le lecteur pourrait s'étonner que nous fassions porter les conditions d'incidence que des quadruplets (X, S_1, S_2, x) alors que pour tout ce qui précède, il suffirait de considérer des triplets (S_1, S_2, x) puisque l'assertion " (S_1, S_2) satisfait les conditions de Whitney en $x \in S_2 \subset \overline{S_1}$ " a un sens. La raison en est que nous voulons pouvoir énoncer des résultats où X joue effectivement un rôle, comme le suivant, qui est une conséquence facile de la résolution des singularités à la Hironaka :

Proposition : La condition, portant sur des quadruplets (X, S_1, S_2, x) , que voici : Il existe une résolution des singularités $\pi : X' \rightarrow X$ de X telle que la transformée stricte $(\overline{S_1})'$ de $\overline{S_1}$ par π soit non-singulière et que le morphisme $(\pi|(\overline{S_1})')^{-1}(S_2) \rightarrow (S_2)$ induit par π soit localement (sur $(\pi|(\overline{S_1})')^{-1}(S_2)$) analytiquement trivial en tout point de l'image inverse de x , est une condition d'incidence stratifiante.

§ 3. Stratifications définies par des conditions numériques.

Soit \mathcal{O} l'ensemble des classes d'algèbres analytiques réduites et équidimensionnelles. Soient E un ensemble et $M : \mathcal{O} \rightarrow E$ une application ("multiplicité généralisée") ; on notera $M_{X,x} \in E$ l'image dans E de la classe de l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ associée à un germe (X,x) . On fait l'hypothèse de constructibilité suivante : étant donné un espace analytique réduit X purement de dimension d , et un sous-ensemble analytique fermé $Y \subset X$, il existe un fermé analytique rare $F \subset Y$ tel que l'application $Y - F \rightarrow E$ définie par $y \mapsto M_{X,y}$ soit localement constante.

Proposition : Pour toute application $M : \mathcal{O} \rightarrow E$ satisfaisant l'hypothèse ci-dessus, la condition sur (X, S_1, S_2, x) que voici : " $\overline{S_1}$ est équidimensionnel en x et l'application $S_2 \rightarrow E$ qui à $y \in S_2$ associe $M_{\overline{S_1}, y}$ est localement constante sur S_2 au voisinage de x ", est une condition d'incidence stratifiante.

Preuve : La condition d'hérédité est évidemment satisfaite, et la seconde condition résulte aussitôt du fait qu'un ensemble analytique est équidimensionnel hors d'un fermé analytique rare, et de l'hypothèse faite sur M .

Corollaire : Etant donnée une application M comme ci-dessus, tout espace analytique X peut être stratifié en $X = \cup S_\alpha$, où chaque S_α est localement fermé à la Zariski dans X , et pour chaque couple (S_α, S_β) tel que $S_\beta \subset \overline{S_\alpha}$, $\overline{S_\alpha}$ est équidimensionnel en chaque point de S_β et l'application $S_\beta \rightarrow E$ définie par $y \mapsto M_{\overline{S_\alpha}, y}$ est localement constante.

Remarques : 1) La situation ici a un avantage marqué sur celle du § 1 : parmi les stratifications d'un espace X dont l'existence est assurée par le Corollaire, il en existe une qui est moins fine que toutes les autres, c'est-à-dire telle que pour chaque autre stratification (T_β) ayant les mêmes propriétés, chaque strate S_α soit réunion de strates T_{β_i} . Voici comment l'on peut la construire en spécialisant la construction du § 1 (cf. aussi [Lê-T], 6.1.5). Définissons par récurrence une suite de sous-espaces fermés emboîtés de X comme ceci : $F_0 = X$ et $F_{i+1} = \{x \in F_i \mid \text{Il existe } j, 0 \leq j \leq i \text{ tel que } F_j \text{ n'est pas équidimensionnel en } x, \text{ ou l'application } x \mapsto M_{F_j, x} \text{ n'est pas localement constante sur } F_i \text{ au voisinage de } x\}$. Alors F_{i+1} est un fermé analytique rare de F_i et les $S_i = F_i - F_{i+1}$ sont les strates de la stratification minimale cherchée.

2) Un des principaux résultats de ce travail est la définition d'une multiplicité généralisée $M: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que la stratification de X qui lui est associée soit une stratification de Whitney, et qu'inversement si (S_1, S_2) satisfait les conditions de Whitney en $x \in S_2$, l'application $x \mapsto M_{S_1, x}$ soit localement constante sur S_2 au voisinage de x , c'est-à-dire une description numérique des conditions de Whitney (cf. Chap. V).

§ 4. Stratifications et transversalité.

4.1.1 Lemme : Soient T_1 et T_2 deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^N . La suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^N / T_1 \cap T_2 \xrightarrow{a} \mathbb{C}^N / T_1 \oplus \mathbb{C}^N / T_2 \xrightarrow{b} \mathbb{C}^N / T_1 + T_2 \longrightarrow 0$$

est exacte, où $a(u \bmod T_1 \cap T_2) = (u \bmod T_1, u \bmod T_2)$ et $b(u \bmod T_1, v \bmod T_2) = u - v \bmod (T_1 + T_2)$.

Preuve : C'est clair.

Définition : Les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^N sont transverses en 0 si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

i) On a l'égalité $T_1 + T_2 = \mathbb{C}^N$

ii) On a $\dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 - N$.

Il résulte aussitôt du Lemme précédent que ces deux conditions sont équivalentes.

Remarques : On dit parfois que T_1 et T_2 sont "en position générale" si l'on a l'égalité : $\dim(T_1 + T_2) = \dim T_1 + \dim T_2$. Par exemple, deux droites distinctes de \mathbb{C}^3 sont en position générale sans être transverses. (La condition équivaut à : $T_1 \cap T_2 = (0)$, seule condition de transversalité raisonnable lorsque $\dim T_1 + \dim T_2 \leq N$.)

4.1.2 Lemme : Posons $t_1 = \dim T_1$, $t_2 = \dim T_2$, et soit G_1 (resp. G_2) la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension t_1 (resp. t_2) de \mathbb{C}^N . L'ensemble des couples $(T_1, T_2) \in G_1 \times G_2$ tels que T_1 soit transverse à T_2 est un ouvert de Zariski de $G_1 \times G_2$, qui est dense si $t_1 + t_2 \geq N$ et vide sinon.

Preuve : Soit $E_1 \subset G_1 \times \mathbb{C}^N$ (resp. $E_2 \subset G_2 \times \mathbb{C}^N$) l'espace total du fibré tautologique sur G_1 (resp. G_2). L'addition des fibres donne un morphisme linéaire de fibrés au-dessus de $G_1 \times G_2$

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \times \mathbb{C}^N \\ & \searrow & \swarrow \\ & G_1 \times G_2 & \end{array}$$

et l'ouvert cherché est celui formé des points $x \in G_1 \times G_2$ tels que le morphisme $E_1(x) \times E_2(x) \rightarrow \mathbb{C}^N$ soit surjectif, c'est-à-dire le complémentaire du support du conoyau du morphisme des fibrés ci-dessus. Il s'agit donc bien d'un ouvert de Zariski, et clairement il n'est vide que si $t_1 + t_2 < N$.

Corollaire : Si T_1 et T_2 sont transverses, étant donnés $t'_1 \geq t_1$ et $t'_2 \geq t_2$, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout couple de sous-espaces vectoriels T'_1 et T'_2 de \mathbb{C}^N tel que $\dim T'_i = t'_i$, $i = 1, 2$, et $\text{dist}(T_1, T'_1) < \varepsilon$,

$\text{dist}(T_2, T'_2) < \varepsilon$, T'_1 et T'_2 soient transverses.

En effet, si $T'_1 \supset T_1$ et $T'_2 \supset T_2$, c'est évident et on applique ensuite le lemme précédent.

Définition : Soient X et Y deux sous-ensembles constructibles non singuliers et de dimension pure dans un espace analytique non singulier connexe Z . On dit que X et Y sont transverses dans Z en un point $z \in Z$ si

ou bien $\dim_z X + \dim_z Y < \dim_z Z$ et alors $(X \cap Y)_z = \emptyset$

ou bien $\dim_z X + \dim_z Y \geq \dim_z Z$ et alors $T_{X,z}$ et $T_{Y,z}$ sont transverses dans $T_{Z,z}$.

On dit que X et Y sont transverses dans Z si ils sont transverses en tout point $z \in Z$.

4.2.1 Théorème (des fonctions implicites) : Si X et Y sont transverses dans Z comme ci-dessus, $X \cap Y$ est un sous-ensemble constructible non-singulier de Z , de dimension $\dim X + \dim Y - \dim Z$, ou vide.

Inversement, si X et Y sont des sous-espaces analytiques non singuliers localement fermés et si le sous-espace $X \cap Y$ défini par la somme des idéaux est non-singulier de dimension $\dim X + \dim Y - \dim Z$, X et Y sont transverses.

L'assertion est locale sur Z , et résulte aussitôt du théorème des fonctions implicites en prenant des coordonnées locales et des équations locales pour X et Y .

4.2.2 Lemme : Soit A un espace analytique non singulier et soient $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ et $Y = \bigcup_{\beta \in B} Y_\beta$ deux sous-ensembles fermés (analytiques, ou sous-ensemble fermés (analytiques, ou sous-analytiques dans le cas réel) munis de stratifications de Whitney. Supposons que pour tout $\alpha \in A$ et $\beta \in B$, les strates X_α et X_β soient transverses dans Z . Alors la décomposition $\bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}} (X_\alpha \cap Y_\beta)$ de $X \cap Y$ est une stratification de Whitney de $X \cap Y$.

Démonstration (due à D. Cheniot [Ch]) : Montrons que l'on a l'égalité

$\overline{X_\alpha \cap Y_\beta} = \overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta}$; l'inclusion $\overline{X_\alpha \cap Y_\beta} \subseteq \overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta}$ étant évidente, il suffit de prouver l'inclusion inverse. Soit donc $z \in \overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta}$ et supposons $z \notin \overline{X_\alpha \cap Y_\beta}$. Il existe un voisinage ouvert U de z dans Z tel que $U \cap (X_\alpha \cap Y_\beta) = \emptyset$ et par conséquent $(\overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta}) \cap U = (\overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta} - (X_\alpha \cap Y_\beta)) \cap U = ((\overline{X_\alpha} - X_\alpha) \cap \overline{Y_\beta} \cap U) \cup (\overline{X_\alpha} \cap (\overline{Y_\beta} - Y_\beta) \cap U)$. Or puis que $\overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta} \neq \emptyset$, on a $\dim(\overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta}) \geq \dim X_\alpha + \dim Y_\beta - \dim Z$. Par ailleurs nous avons $\dim(\overline{X_\alpha} - X_\alpha) < \dim X_\alpha$ et $\dim(\overline{Y_\beta} - Y_\beta) < \dim Y_\beta$, et l'hypothèse de transversalité implique encore : $\dim(\overline{X_\alpha} - X_\alpha) \cap \overline{Y_\beta} = \dim(\overline{X_\alpha} - X_\alpha) + \dim Y_\beta - \dim Z$ et de même $\dim(\overline{X_\alpha} \cap (\overline{Y_\beta} - Y_\beta)) = \dim(\overline{Y_\beta} - Y_\beta) + \dim X_\alpha - \dim Z$. Chacun de ces deux termes étant strictement inférieur à $\dim X_\alpha + \dim Y_\beta - \dim Z$ nous obtenons la contradiction cherchée.

Cette égalité implique que la partition de $X \cap Y$ par les $X_\alpha \cap Y_\beta$ vérifie la condition de frontière (la frontière d'une strate est une union de strates) : en effet, si l'on a $(X_\alpha, \cap Y_\beta) \cap (\overline{X_\alpha \cap Y_\beta}) \neq \emptyset$, l'égalité précédente montre que ceci implique $X_\alpha, \cap \overline{X_\alpha} \neq \emptyset$ et $Y_\beta, \cap \overline{Y_\beta} \neq \emptyset$ d'où $X_\alpha, \subseteq \overline{X_\alpha}$, $Y_\beta, \subseteq \overline{Y_\beta}$ et donc $X_\alpha, \cap Y_\beta, \subseteq \overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta} = \overline{X_\alpha \cap Y_\beta}$ et l'inclusion cherchée.

D'après le théorème des fonctions implicites, les $X_\alpha \cap Y_\beta$ sont des sous-ensembles constructibles non singuliers de Z . Vérifions maintenant les conditions de Whitney : soit $z \in X_\alpha, \cap Y_\beta, \subseteq \overline{X_\alpha \cap Y_\beta}$ et soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $X_\alpha \cap Y_\beta$ tendant vers z . D'après les hypothèses, si $T_\alpha = \lim_{x_i \rightarrow z} T_{X_\alpha, x_i}$ et $T_\beta = \lim_{x_i \rightarrow z} T_{Y_\beta, x_i}$, on a : $T_\alpha \supset T_{X_\alpha, z}$ et $T_\beta \supset T_{Y_\beta, z}$ donc T_α et T_β sont transverses dans $T_{Z, z}$, ce qui implique par raison de dimension, au vu de la transversalité, les égalités

$$T_\alpha \cap T_\beta = \lim_{x_i \rightarrow z} T_{X_\alpha, x_i} \cap T_{Y_\beta, x_i} = \lim_{x_i \rightarrow z} T_{X_\alpha \cap Y_\beta, x_i},$$

et donc $\lim_{x_i \rightarrow z} T_{X_\alpha \cap Y_\beta, x_i} \supset T_{X_\alpha, z} \cap T_{Y_\beta, z} = T_{X_\alpha, \cap Y_\beta, z}$ et la condition a).

Considérons maintenant une carte locale de Z autour de z permettant d'identifier un voisinage de z dans Z à \mathbb{C}^N , et une rétraction locale $\rho : Z \rightarrow X_\alpha, \cap Y_\beta, .$

Si $\ell = \text{Lim } \overbrace{x_i \rho(x_i)}$, on a $\ell \subset T_{X_\alpha, z} \cap T_{Y_\beta, z} = \text{Lim } T_{(X_\alpha \cap Y_\beta), z}$ d'où la condition b) de Whitney, ce qui achève la démonstration. (Notons que nous nous sommes permis ici, et nous permettrons encore, d'extraire sans prévenir des sous-suites de (x_i) pour faire converger les directions d'espaces tangents et de sécantes.) ■

4.2.3 Remarque : L'égalité $\overline{X_\alpha \cap Y_\beta} = \overline{X_\alpha} \cap \overline{Y_\beta}$ implique que si X^0 (resp. Y^0) est une strate dense dans X (resp. Y), l'intersection $X^0 \cap Y^0$ est une strate dense dans $X \cap Y$.

4.2.4 Lemme : Soient $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, $Y = \bigcup_\beta Y_\beta$ deux espaces analytiques réduits munis de stratifications de Whitney. La partition $X \times Y = \bigcup_{\alpha, \beta} X_\alpha \times Y_\beta$ est une stratification de Whitney du produit $X \times Y$.

La démonstration est un exercice.

Remarques : 1) On dit que deux morphismes $f: X \rightarrow Z$ et $g: Y \rightarrow Z$ d'espaces non-singuliers sont transverses si pour $t \in X \times Y$, les images dans $T_{Z, z}$ des applications tangentes à f en $p_1(t)$ et $p_2(t)$, où $z = f(p_1(t)) = g(p_2(t))$, sont transverses. On peut utiliser les lemmes précédents pour prouver que si $f: X \rightarrow Z$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont des morphismes d'espaces stratifiés $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ et $Y = \bigcup_\beta Y_\beta$ dans un espace non-singulier Z tel que pour tout couple (α, β) , $f|_{X_\alpha}: X_\alpha \rightarrow Z$ et $g|_{Y_\beta}: Y_\beta \rightarrow Z$ soient transverses, les produits fibrés $X_\alpha \times_Z Y_\beta$ forment une stratification de Whitney du produit fibré $X \times_Y Y$. On peut aussi généraliser à des produits fibrés d'un nombre fini de morphismes, etc. Nous ne nous servons pas de ces résultats dont la preuve est au pire fastidieuse.

4.2.5 Lemme : Soient K un espace analytique compact non-singulier, U un ouvert de \mathbb{C}^M contenant 0 , X et Y deux sous-espaces analytiques fermés réduits du produit $K \times U$. Soit $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney de X telle que $X_0 = X \cap (K \times \{0\})$ soit réunion de strates, et supposons que Y soit muni d'une

stratification $Y = \cup_{\beta} Y_{\beta}$ à chaque strate de laquelle $K \times \{0\}$ est transverse dans
 $K \times U$. Alors

1) La décomposition $Y = (\cup_{\beta} (Y_{\beta} - Y_{o,\beta})) \cup (\cup_{\beta} Y_{o,\beta})$, où $Y_{o,\beta} = Y_{\beta} \cap (K \times \{0\})$ est
une stratification de Whitney de Y, telle que $Y_o = Y \cap (K \times \{0\}) = \cup_{o,\beta} Y_{o,\beta}$ soit réu-
nion de strates.

2) Si, pour tout couple (α, β) tel que $X_{\alpha} \subset X_o$, les strates X_{α} et $Y_{o,\beta}$ sont
transverses dans K, il existe un voisinage U' de 0 dans U tel que deux strates
 $X_{\alpha} \cap (K \times U')$ et $Y_{\beta} \cap (K \times U')$ quelconques de $X \cap (K \times U')$ et $Y \cap (K \times U')$ soient trans-
verses dans $K \times U'$.

Démonstration : L'assertion 1) résulte du Lemme 4.2.2. Prouvons donc 2).

Tout d'abord, puisque K est compact on peut, quitte à rétrécir U en un voisi-
nage ouverts U'_1 de 0 dans U , supposer que toutes les strates de X ont une
adhérence qui rencontre X_o . Etant données deux strates X_{α} et X_{β} , mon-
trons que si $\dim X_{\alpha} + \dim Y_{\beta} < \dim K + N$, on a $X_{\alpha} \cap Y_{\beta} = \emptyset$. Soit en effet X_{α} , une
strate contenue dans $\overline{X_{\alpha}} \cap X_o$. On a $\dim X_{\alpha} \leq \dim X_o$ et par ailleurs, d'après la
structure des Y_{β} , $\dim(\overline{Y_{\beta}} \cap (K \times \{0\})) = \dim Y_{\beta} - N$ donc pour chaque strate
 $Y_{o,\beta}$, $\subset \overline{Y_{\beta}} \cap (K \times \{0\})$, on a $\dim X_{\alpha} + \dim Y_{\beta} \leq \dim X_o + \dim Y_{\beta} - N < \dim K$, donc
d'après l'hypothèse de transversalité, $X_{\alpha} \cap Y_{\beta} = \emptyset$. Or, l'inclusion évidente
 $\overline{X_{\alpha} \cap Y_{\beta}} \subset \overline{X_{\alpha}} \cap \overline{Y_{\beta}}$ nous fournit l'inclusion
 $\overline{X_{\alpha} \cap Y_{\beta}} \cap (K \times \{0\}) \subset \overline{X_{\alpha}} \cap (K \times \{0\}) \cap (\overline{Y_{\beta}} \cap K \times \{0\})$ qui est vide d'après ce qui pré-
cède, donc $\overline{X_{\alpha} \cap Y_{\beta}} \cap (K \times \{0\}) = \emptyset$ et par conséquent il existe un voisinage U'_2 de
 0 dans U'_1 tel que $\overline{X_{\alpha} \cap Y_{\beta}} \cap (K \times U'_2) = \emptyset$ pour tout couple (α, β) tel que
 $\dim X_{\alpha} + \dim Y_{\beta} < \dim K + N$, puisque l'ensemble des couples de strates concernés
est fini.

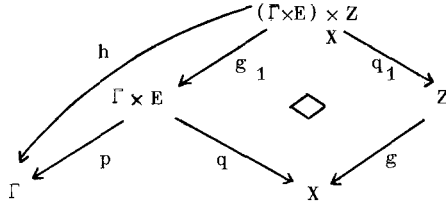
Supposons maintenant $\dim X_{\alpha} + \dim Y_{\beta} \geq \dim K + N$. Si $X_{\alpha} \cap Y_{\beta} = \emptyset$, il n'y a rien à
démontrer. Supposons donc $X_{\alpha} \cap Y_{\beta} \neq \emptyset$ et considérons le sous-ensemble analytique
 $B \subset X_{\alpha} \cap Y_{\beta}$ formé des points z en lesquels X_{α} et Y_{β} ne sont pas transverses
dans $K \times U'_2$. Démontrons par l'absurde que $\overline{B} \cap (K \times \{0\}) = \emptyset$. Soit en effet
 $z_o \in \overline{B} \cap (K \times \{0\})$ et considérons la strate $X_{\alpha} \subset K \times \{0\}$ qui contient z_o et la stra-

te $Y_{\alpha, \beta}$, qui contient z_0 . D'après la condition a) de Whitney, étant donnée une carte locale $K \times U'_2 \simeq$ (ouvert de) $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^N$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert V de z_0 dans $K \times U'_2$ tel que $\text{dist}(T_{X_\alpha, z_0}, T_{X_\alpha, z}) < \varepsilon$ et $\text{dist}(T_{Y_{\alpha, \beta'}, z_0}, T_{Y_{\beta}, z}) < \varepsilon$ pour tout $z \in X_\alpha \cap Y_\beta \cap V$, puisque z_0 appartenant à $\overline{Y_\beta}$, on a $Y_{\alpha, \beta'} \subset \overline{Y_\beta}$. Il résulte maintenant de l'hypothèse de transversalité des strates dans $K \times \{0\}$ et du Lemme 4.1.2 que pour tout point z du voisinage V de z_0 , les espaces $T_{Y_{\beta}, z}$ et $T_{X_\alpha, z}$ sont transverses dans $T_{K \times U, z}$, d'où la contradiction cherchée. Ainsi $\overline{B} \cap K \times \{0\} = \emptyset$ et quitte à remplacer U'_2 par un voisinage encore plus petit U' de 0 dans \mathbb{C}^N , on obtient $B \cap K \times U' = \emptyset$ pour tout B associé à un couple de strates X_α, X_β , et le résultat cherché. ■

Voici maintenant un résultat, dû à S. Kleiman, qui permet de créer beaucoup de situations où deux sous-ensembles algébriques d'une variété algébrique X ont des stratifications transverses au sens du Lemme. Nous allons énoncer le résultat seulement dans un cas particulier, et indiquer les grandes lignes de la démonstration pour la commodité du lecteur.

4.3 Théorème (Kleiman [Kl 1], 2. Theorem) : Soient Γ un groupe algébrique défini sur \mathbb{C} , X une variété algébrique intègre (= réduite et irréductible) munie d'une action transitive du groupe Γ ; $\Gamma \times X \rightarrow X$ notée $(\gamma, x) \rightarrow \gamma \cdot x$. Soient $f : E \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ deux morphismes algébriques entre variétés algébriques réduites et équidimensionnelles. Pour chaque point $\gamma \in \Gamma$, on note γE la variété E munie du morphisme $E \rightarrow X$ défini par $e \mapsto \gamma \cdot f(e)$. Alors, il existe un ouvert de Zariski dense U de Γ tel que pour tout $\gamma \in U$, le produit fibré $\gamma E \times_Z X$ soit vide, ou équidimensionnel de dimension égale à $\dim E + \dim Z - \dim X$. De plus si E et Z sont non-singuliers, on peut choisir U de telle façon que pour $\gamma \in U$, le produit fibré $\gamma E \times_Z X$ soit non-singulier.

Esquisse de démonstration : Considérons le morphisme $q : \Gamma \times E \rightarrow X$ défini par $(\gamma, e) \rightarrow \gamma \cdot f(e)$, et le diagramme :



où p désigne la première projection.

Tout d'abord, puisque Γ et E sont réduits et équidimensionnels, il en est de même de $\Gamma \times E$. Montrons que le morphisme q est plat : d'une part d'après le théorème de platitude générique il existe un ouvert de Zariski V dense dans X tel que le morphisme induit $q : q^{-1}(V) \rightarrow V$ soit plat, et d'autre part le morphisme q est équivariant pour l'action naturelle de Γ sur $\Gamma \times E$ et l'action donnée de Γ sur X , donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, le morphisme $q^{-1}(\gamma V) \rightarrow \gamma V$ est isomorphe au morphisme plat $q^{-1}(V) \rightarrow V$. Puisque Γ agit transitivement, les γV recouvrent X , d'où le résultat. Si de plus E est non-singulier, le produit $\Gamma \times E$ est non-singulier donc d'après le théorème de lissité générique, (ou le théorème de Bertini-Sard) les fibres $q^{-1}(x)$ sont non-singulières pour $x \in X - F$, où F est un sous-ensemble strict de X , et la transitivité implique aussitôt que toutes les fibres $q^{-1}(x)$ sont non-singulières.

On en déduit, puisque la platitude est conservée par changement de base, que le morphisme q_1 est plat et donc par les propriétés de la dimension $(\Gamma \times E) \times Z$ est équidimensionnel de dimension $\dim q_1^{-1}(z) + \dim Z$ (pour tout $z \in Z$), c'est-à-dire

$$\dim q^{-1}(g(z)) + \dim Z = \dim \Gamma \times E - \dim X + \dim Z .$$

Si de plus E est non-singulier, le morphisme q_1 est plat et à fibres non-singulières puisque c'est le cas pour q , en particulier si Z est aussi non-

singulier, l'espace $(\Gamma \times E) \times_Z X$ est non-singulier. Enfin par platitude générique (resp. et lissité générique) il existe un ouvert de Zariski dense U tel que pour tout $\gamma \in U$, la fibre $h^{-1}(\gamma)$ soit ou bien vide, ou bien équidimensionnelle de dimension égale à $\dim (\Gamma \times E) \times_Z X - \dim \Gamma$ (resp. et de plus non-singulière). Si l'on remarque que $h^{-1}(\gamma) = \gamma E \times_Z X$ d'une part et que $\dim (\Gamma \times E) \times_Z X - \dim \Gamma = \dim E + \dim Z - \dim X$, on voit que le théorème est démontré.

Voici sous quelle forme nous utiliserons le Théorème de Kleiman :

4.3.1 Corollaire : Soient $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ et $Z = \bigcup_{\beta \in B} Z_\beta$ deux sous-ensembles algébriques fermés de la grassmannienne G des d -plans de \mathbb{C}^N munis de décompositions finies en sous-ensembles localement fermés à la Zariski non singuliers (par exemple des stratifications de Whitney). Il existe un ouvert de Zariski dense U du groupe algébrique $\Gamma = GL(N, \mathbb{C})$ tel que pour tout $\gamma \in U$ et tout $\alpha \in A$ le translaté γE_α de E_α par l'action naturelle (transitive) de Γ sur G soit transverse dans G à tous les sous-espaces non-singuliers Z_β .

Démonstration : On applique le théorème précédent aux injections $E_\alpha \rightarrow G$, $Z_\beta \rightarrow G$ et l'on trouve pour chaque couple (α, β) un ouvert de Zariski dense $U_{\alpha\beta}$ tel que $\gamma E_\alpha \times_G Z_\beta = \gamma E_\alpha \cap Z_\beta$ soit vide ou non-singulier de dimension $\dim E_\alpha + \dim Z_\beta - \dim G$, ce qui signifie que l'intersection est transversale. Les α et β étant en nombre fini, l'ouvert $\bigcap U_{\alpha\beta} = U$ convient. ■

Remarque : En particulier, si E et Z sont équidimensionnels, $\gamma E \cap Z$ est équidimensionnel si $\gamma \in U$, et si une strate E_{α_0} (resp. Z_{β_0}) est dense dans E (resp. Z), alors pour $\gamma \in U$, $\gamma E_{\alpha_0} \cap Z_{\beta_0}$ est de dimension $\dim E + \dim Z - \dim G$ et dense dans $E \cap Z$. Enfin si les $U E_\alpha$ et $U Z_\beta$ sont des stratifications de Whitney, pour $\gamma \in U$, les $(\gamma E_\alpha) \cap Z_\beta$ forment une stratification de Whitney de $(\gamma E) \cap Z$.

§ 5. Stratifications, transversalité, et éclatement.

Nous utiliserons le théorème de Kleiman aussi pour mettre certains sous-espaces d'un espace non singulier Z en position générale par rapport à un morphisme $f: Y \rightarrow Z$, au sens défini ci-dessous.

5.1 Etant donné un morphisme propre $p: X' \rightarrow X$ entre espaces, par exemple un éclatement, l'existence de stratifications de Samuel relatives (Le-T 2) implique que pour chaque entier i , le sous-ensemble $F_i = \{x' \in X' \mid \dim_{x'} p^{-1}(p(x')) \geq i\}$ est un sous-ensemble analytique fermé de X' . Puisque p est propre, l'image $B_i = p(F_i)$ de chaque F_i est un sous-ensemble analytique fermé de X , et l'on a l'inégalité $\dim B_i \leq \dim X' - i$. Par exemple si p est un éclatement de centre rare, on a $B_0 = X$ et B_1 est contenu dans le centre d'éclatement, mais ne lui est pas nécessairement égal.

5.2 Proposition (d'après [Lê-T], 5.1.3.2) : Soient Z un espace analytique non singulier, X un sous-espace analytique fermé équidimensionnel de Z et $p: X' \rightarrow X$ un morphisme propre tel que X' soit équidimensionnel et que la dimension des fibres $p^{-1}(x)$ soit constante pour $x \in X - B_k$, où B_k est rare dans X et $p^{-1}(B_k)$ rare dans X' . Soit $Z = \cup Z_\alpha$ une stratification de Whitney de Z tel que X et chacun des sous-ensembles B_i de X associés à p comme ci-dessus soient unions de strates, ainsi que chacune des différences $B_i - B_{i+1}$. Soit H un sous-espace non singulier de Z transverse à chacune des strates Z_α . L'image inverse $p^{-1}(H \cap X)$ par p de l'intersection $H \cap X$ coïncide ensemblistement avec l'adhérence dans X' de $p^{-1}(H \cap (X - B_k))$.

Démonstration : Il suffit de prouver qu'en tout point $x' \in p^{-1}(H \cap X)$, $\dim_{x'} p^{-1}(H \cap B_k)$ est strictement inférieur à la plus petite des dimensions des composantes irréductibles non immergées locales en x' de $p^{-1}(H \cap X)$: il en résultera en effet que $p^{-1}(H \cap B_k)$ est rare dans $p^{-1}(H \cap X)$, donc que $p^{-1}(H \cap (X - B_k)) = p^{-1}(H \cap X - H \cap B_k)$ est dense dans $p^{-1}(H \cap X)$. Or on a :

$p^{-1}(H \cap B_k) = \bigcup_{j \geq k} p^{-1}(H \cap (B_j - B_{j+1}))$ et l'on a les inégalités :

$\dim B_j \leq \dim p^{-1}(B_k) - j$ puisque $p^{-1}(B_j) \subset p^{-1}(B_k)$, pour $j \geq k$. Puisque H est transverse aux strates, on a $\dim(H \cap B_j) = \dim B_j - h \leq \dim p^{-1}(B_k) - j - h$, où h est la codimension de H dans Z , d'où pour tout $x' \in p^{-1}(B_k)$,

$\dim_{x'} p^{-1}(H \cap B_j) \leq \dim_{x'} p^{-1}(B_k) - h$ pour tout $j \geq k$. Or H est défini localement par h équations dans Z et donc, d'après ([Bbk 3], § 3, No 1, Prop. 2) on a pour chaque composante irréductible locale non immergée $p^{-1}(H \cap X)_i$ de $p^{-1}(H \cap X)$ en x' l'inégalité $\dim_{x'} p^{-1}(H \cap X)_i \geq \dim_{x'} X' - h$. Par ailleurs, puisque par hypothèse $p^{-1}(B_k)$ est rare dans X' , on a l'inégalité $\dim_{x'} p^{-1}(B_k) < \dim_{x'} X'$ ce qui donne finalement : $\dim_{x'} p^{-1}(H \cap B_k) \leq \dim_{x'} p^{-1}(B_k) - h < \dim_{x'} p^{-1}(H \cap X)_i$, ce qu'il fallait démontrer. ■

5.2 Application : Reprenons la situation de (Chap. I, 5.1) où l'on éclate dans X un sous-espace Y défini par un idéal I , tel que X soit équimultiple" le long de Y relativement à un morphisme $F : (X, x) \rightarrow (S, s)$. Le lecteur vérifiera que la conclusion de (Loc. cit.) et la proposition 5.1 ci-dessus impliquent que

Le transformé strict par l'éclatement $\pi_0 : X' \rightarrow X$ de Y de la fibre spéciale $X(s) = F^{-1}(s)$ coïncide ensemblistement avec $\pi_0^{-1}(X(s))$, et de même pour l'éclatement normalisé π .

Ainsi, par l'intermédiaire de Chap. I, 5.1 et Chap. III, 5.1, une condition numérique implique l'égalité d'un transformé total et d'un transformé strict.

5.3 Résolution simultanée forte et conditions de Whitney.

5.3.1 Définition (cf. [Te 2], II) : Soient X un espace analytique réduit et équidimensionnel, $Y \subset X$ un sous-espace et $0 \in Y$ un point non-singulier de Y . On dit que X admet une résolution simultanée forte le long de Y en 0 si il existe un morphisme $\pi : X' \rightarrow X$ qui soit résolution des singularités de X , c'est-à-dire

que X' est non-singulier, que π est propre et induit un isomorphisme

$\pi : X' - \pi^{-1}(\text{Sing } X) \xrightarrow{\sim} X - \text{Sing } X$, morphisme tel que l'on ait :

Le morphisme induit $\pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ est localement trivial en tout point

$x' \in \pi^{-1}(Y)$, c'est-à-dire que l'on a un Y -isomorphisme local

$(\pi^{-1}(Y), x') \simeq (\pi^{-1}(\pi(x')), x') \times (Y, \pi(x'))$.

5.3.2 Remarques : 1) C'est la condition que l'on a affirmée être stratifiante en (2.3.1, Remarque).

5.3.3 Proposition (cf. [Te 2], II) : Soient X un espace analytique réduit équidimensionnel, Y un sous-espace analytique fermé de X et $0 \in Y$ un point non-singulier de Y . Si X admet une résolution simultanée forte le long de Y en 0 , le couple (X^0, Y) satisfait la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1, et la condition b) de Whitney stricte en 0 .

Démonstration : Soit $\pi : X' \rightarrow X$ la résolution simultanée, et soit y_1, \dots, y_t un système de coordonnées locales pour Y en 0 . D'après l'hypothèse, on peut trouver en tout point $x' \in \pi^{-1}(0)$ un système de coordonnées locales y'_1, \dots, y'_t , w_1, \dots, w_{d-t} pour X' en x' tel que $(y_i \circ \pi)_{x'} = y'_i$ pour $1 \leq i \leq t$. Choisissons un plongement local $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ et des coordonnées $(y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_{N-t})$ sur $(\mathbb{C}^N, 0)$. Soient (f_1, f_2, \dots, f_m) des générateurs pour l'idéal de $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_{N-t}\}$ définissant $(X, 0)$ dans $(\mathbb{C}^N, 0)$.

L'hypothèse de résolution simultanée forte implique (critère différentiel de lissité) que la dérivation $\frac{\partial}{\partial y_i}$ de $\mathcal{O}_{Y,0}$ dans lui-même s'étend, par le morphisme naturel $\mathcal{O}_{Y,0} \xrightarrow{\pi|_Y} \mathcal{O}_{\pi^{-1}(Y), x'}$ en une dérivation de $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(Y), x'}$, c'est-à-dire encore que dans le morphisme naturel $\mathcal{O}_{Y,0} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X', x'} = \mathbb{C}\{y'_1, \dots, y'_t, w_1, \dots, w_{d-t}\}$, envoyant y_i sur y'_i , on peut étendre la dérivation $\frac{\partial}{\partial y_i}$ en une dérivation D_i de $\mathcal{O}_{X', x'}$, qui respecte l'idéal $S' = ((z_1 \circ \pi)_{x'}, \dots, (z_{N-t} \circ \pi)_{x'}) \mathcal{O}_{X', x'}$ définissant $\pi^{-1}(Y)$ dans X' en x' .

On a donc $D_j((z_i \circ \pi)_{x'}) \in S'$, pour $1 \leq j \leq t$, $1 \leq i \leq N-t$, et $D_j y'_r = \delta_{jr}$ (symbole

de Kronecker).

Puisque f_k est nul sur X , nous avons $(f_k \circ \pi)_{x'} = 0$ dans $\mathcal{O}_{X', x'}$, d'où d'après la règle de Leibniz :

$$0 = D_j(f_k \circ \pi) = \sum_{i=1}^{N-t} \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i} \circ \pi \right)_{x'} \cdot D_j(z_i \circ \pi)_{x'} + \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_j} \circ \pi \right)_{x'} .$$

Par conséquent, chaque mineur $\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(y_j, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})}$ composé avec π et localisé en x' , vérifie :

$$\left(\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(y_j, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})} \circ \pi \right)_{x'} = - \sum_{i=1}^{N-t} \left(\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})} \circ \pi \right)_{x'} \cdot D_j(z_i \circ \pi)_{x'} .$$

Puisque d'après l'hypothèse, $D_j(z_i \circ \pi)_{x'} \in S'$, on en déduit que si l'on note S l'idéal de $\mathcal{O}_{X,0}$ engendré par z_1, \dots, z_{N-t} , l'on a en tout point $x' \in \pi^{-1}(0)$:

$$\left(\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(y_j, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})} \circ \pi \right)_{x'} \in S \cdot J_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X', x'} ,$$

où $J_{X/Y}$ désigne l'idéal engendré par les seuls mineurs jacobiens au dénominateur desquels aucun y n'apparaît et donc, d'après (Chap. I, 1.3.6)

$$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(y_j, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})} \mathcal{O}_{X,0} \in \overline{S \cdot J}_{X/Y} \quad \text{dans } \mathcal{O}_{X,0} .$$

Le fait que (X^0, Y) satisfasse les conditions de Whitney strictes annoncées résulte alors de la preuve de 2.2.2. ■

5.3.4 Remarque : Le contenu nouveau de l'article [Ve] de Verdier consiste en les deux intéressants résultats suivants :

i) La condition a) de Whitney stricte avec exposant 1 implique la condition b). Dans le cadre où nous sommes, on peut s'en convaincre assez facilement en examinant la preuve de 2.2.2 ci-dessus.

ii) Si (X^0, Y) satisfait la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1,

tout champ de vecteurs analytique réel sur Y peut s'étendre localement en un champ de vecteurs analytique réel sur X^0 et satisfaisant au voisinage de tout point de Y une condition de "rugosité" qui implique que ce champ de vecteurs est localement intégrable. Son intégration donne une trivialisation locale "rugueuse", et en particulier topologique, de X le long de Y , dès que Y est une strate d'une stratification de X telle que chaque couple de strates satisfasse la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1.

* * *

C H A P I T R E I V

VARIETES POLAIRES

Introduction. Dans ce chapitre, j'introduis le principal concept nouveau qui a permis de donner une caractérisation numérique des conditions de Whitney : celui de variété polaire locale, dont voici une description intuitive : étant donné un représentant $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ d'un germe d'espace analytique réduit équidimensionnel, considérons pour chaque entier k , $0 \leq k \leq d-1$, où $d = \dim X$, une projection linéaire $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$, et le lieu critique de la restriction $p|_{X^0}$ de p à la partie non-singulière X^0 de X . Si la projection linéaire p est "assez générale", l'adhérence dans X de ce lieu critique sera un sous-espace analytique réduit $P_k \langle p \rangle$ purement de codimension k ou vide, appelé "variété polaire locale de X associée à p ". Comme on le voit, même en géométrie algébrique, parler de "la variété polaire générale de codimension k de $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ " est abusif en ceci que cette variété polaire n'est pas définie sur le corps de base (disons \mathbb{C}), même pour un plongement $X \subset \mathbb{C}^N$ fixé, mais au mieux sur le corps des fonctions de l'espace des projections linéaires de \mathbb{C}^N sur \mathbb{C}^{d-k+1} . Pis encore, la "variété polaire générale de codimension k de X ", c'est-à-dire rendue indépendante du plongement, n'est définie que sur une extension du corps de base de degré de transcendance infini. Néanmoins, pour un plongement local fixé, il existe un ouvert de Zariski dense U de l'espace des projections linéaires tel que pour $p \in U$, la multiplicité $m_0(P_k \langle p \rangle)$ de $P_k \langle p \rangle$ en 0 soit indépendante de $p \in U$, et de plus ce nombre ne dépend en fait que de l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,0}$, c'est-à-dire est en fait un invariant analytique du germe $(X,0)$, invariant que l'on note $m_0(P_k(X,0))$. Un des principaux résultats de ce chapitre est donc d'associer à chaque algèbre analytique réduite puremen-

de dimension d une "multiplicité généralisée" qui est la suite d'entiers $M_{(X,0)}^* = (m_0(P_0(X,0)), m_0(P_1(X,0)), \dots, m_0(P_{d-1}(X,0)))$ dont le premier terme est d'ailleurs la multiplicité de X en 0 puisqu'il résulte aussitôt des définitions que $P_0(X,0) = (X,0)$. Le paradigme de ce genre de construction est la construction qui associe à un germe d'hypersurface à singularité isolée la suite $(\mu^{(i+1)} + \mu^{(i)})_{0 \leq i \leq d-1}$, où $\mu^{(i)}$ est le nombre de Milnor de l'intersection de l'hypersurface avec un plan général de dimension i passant par 0 . C'est d'ailleurs le souci de faire le lien entre les variétés polaires d'un germe introduites par Lê et moi dans [Lê-T 1] et les variétés polaires introduites dans [Te 12] qui m'a conduit à introduire (cf. [Te 5]) les variétés polaires relatives associées à un morphisme $f: X \rightarrow S$. Ces variétés polaires relatives sont en général bien plus que la collection des variétés polaires des fibres de f , et ont un comportement bien plus turbulent. C'est dans ce contexte qu'il faut prouver les résultats de "transversalité dynamique" essentiels pour la théorie, affirmant essentiellement que lorsque $\dim S \leq 1$, les variétés polaires relatives générales sont transverses au noyau des projections servant à les définir.

La définition la plus opératoire des variétés polaires n'est pas toujours celle qui est décrite ci-dessus mais la définition donnée ci-dessous, au § 1, (voir le Corollaire 1.3.1).

§ 1. Définitions des variétés polaires.

1.1 Rappels du Chapitre II.

Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques réduits tel que le module Ω_f^1 des différentielles relatives soit localement libre de rang $d = \dim X - \dim S$ sur le complémentaire d'un fermé analytique rare F de X . On peut alors (Chap. I, 1.2) définir la modification de Nash relative $v_f: N_f(X) \rightarrow X$, et pour tout point $0 \in X$ et toute installation locale d'un représentant assez petit du germe de f en 0 ,

$$\begin{array}{ccc}
 (X, 0) & \hookrightarrow & (S, 0) \times (\mathbb{C}^N, 0) \\
 \downarrow f & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \circ \\
 (S, 0) & &
 \end{array}$$

on peut décrire la modification de Nash relative comme ceci : soit G la grassmannienne des d -plans de \mathbb{C}^N , et soit, pour un représentant X assez petit, $N_f(X) \subset X \times G$ l'adhérence du graphe du morphisme $X \rightarrow G$ qui à $x \in X$ associe la direction de l'espace tangent en x à la fibre $X(f(x)) = f^{-1}f(x)$. On peut donc définir un morphisme de Gauss relatif γ_f dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & G \\
 & & & \nearrow \gamma_f & \\
 N_f(X) & & & \circ & \\
 & \searrow & & \circ & \nearrow \text{pr}_2 \\
 & & X \times G & & \\
 \downarrow \gamma_f & & \swarrow \text{pr}_1 & & \\
 X & \hookrightarrow & S \times \mathbb{C}^N & & \\
 \downarrow f & & \swarrow \text{pr}_1 & & \\
 S & & & &
 \end{array}$$

1.2 Proposition-Définition 1 (Schubert) : Soit N un entier, et soit

$$(\mathcal{D}) : (0) \subset D_{N-1} \subset D_{N-2} \subset \dots \subset D_1 \subset D_0 = \mathbb{C}^N$$

un drapeau de sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^N , avec $\text{codim } D_i = i$. Pour chaque entier k , $0 \leq k \leq d$, on appelle k -ième variété de Schubert projective associée à \mathcal{D} , et l'on note $c_k(\mathcal{D})$ le sous-ensemble de la grassmannienne G des d -plans de \mathbb{C}^N défini par

$$c_k(\mathcal{D}) = \{T \in G / \dim(T \cap D_{d-k+1}) \geq k\} \quad .$$

Pour tout \mathcal{D} , l'ensemble $c_k(\mathcal{D})$ est muni naturellement d'une structure de sous-variété algébrique réduite de G , purement de codimension k dans G (cf. [G.H], Chap. I, § 5).

Remarque 1 : La sous-variété $c_k(\mathcal{D})$ de G ne dépend en fait que de $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^N$, et pour cette raison on l'écrira aussi volontiers $c_k(D_{d-k+1})$.

Remarque 2 : Pour un drapeau \mathcal{D} et une suite d'entiers $a = (a_1, \dots, a_d)$ considérons le sous-ensemble

$\sigma_a(\mathcal{D}) = \{T \in G / \dim(T \cap D_{d+a_i-i}) \geq i\}$. C'est une sous-variété algébrique de G , de codimension $\sum a_i$, appelée variété de Schubert associée à a et \mathcal{D} , (voir [G-H], Chap. I, § 5). Les $c_k(\mathcal{D})$ sont un cas très particulier de cette construction ($a_i = 0$ pour $i > k$, $a_i = 1$ pour $i \leq k$). Dans cette rédaction, nous n'utiliserons que les $c_k(\mathcal{D})$ et omettrons l'épithète "projective".

1.3 Proposition 2 : Etant donné un (représentant d'un germe de) morphisme $f: (X,0) \rightarrow (S,0)$ comme ci-dessus, avec S non-singulier, et un S -plongement local $(X,0) \subset (S,0) \times (\mathbb{C}^N,0)$, pour tout entier k , $0 \leq k \leq d = \dim X - \dim S$, il existe un ouvert de Zariski dense W_k de la grassmannienne G_k des sous-espaces de codimension $d-k+1$ de \mathbb{C}^N tel que pour tout $D_{d-k+1} \in W_k$ on ait :

i) $\gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1})) \cap \nu_f^{-1}(X-F)$ est dense dans $\gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1}))_{\text{red}}$, et ce dernier espace est vide ou de codimension pure k dans $N_f(X)$.

ii) L'égalité $\dim(\nu_f^{-1}(0) \cap \gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1}))) = \dim \nu_f^{-1}(0) - k$ a lieu si l'intersection n'est pas vide.

Démonstration : Nous allons en fait prouver un résultat plus précis : Soient $c_k(D_{d-k+1}) = \cup \sigma_\alpha$ une stratification de Whitney fixée de la variété de Schubert qui nous intéresse ; pour chaque élément $\mu \in \Gamma = GL(N, \mathbb{C})$, l'image $\mu \cdot c_k(D_{d-k+1})$ de notre variété de Schubert par l'action naturelle de μ sur G est munie de la stratification de Whitney $\cup \mu \cdot \sigma_\alpha$ (cf. Chap. III, 2.2, Exercice) et d'autre part est égale à $c_k(\mu^{-1} \cdot D_{d-k+1})$ en utilisant cette fois-ci l'action naturelle de

μ^{-1} sur G_k .

Fixons une stratification de Whitney $N_f(X) = \cup Z_\beta$ de $N_f(X) \subset S \times \mathbb{C}^N \times G$ telle que $v_f^{-1}(0)$ et $v_f^{-1}(F)$ soient réunions de strates (cf. Chap. III, 1.5 et 2.2.2).

D'après le Corollaire du Théorème de Kleiman (cf. Chap. III, 4.3), il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset \Gamma$ tel que pour tout $\mu \in U$, chacune des strates $0 \times 0 \times \mu \cdot \sigma_\alpha$ soit transverse à chacune des strates Z_β contenues dans $v_f^{-1}(0)$.

D'après le Lemme de (Chap. III, 4.2.5), la stratification de Whitney $(S \times \mathbb{C}^N \times \mu \cdot \sigma_\alpha)$ de $S \times \mathbb{C}^N \times \mu \cdot c_k(D_{d-k+1})$ est donc transverse, dans $S \times \mathbb{C}^N \times G$ à la stratification fixée Z_β . Puisque $v_f^{-1}(X-F)$ est un ouvert analytique dense dans $N_f(X)$ et réunion de strates, l'intersection $\mu \cdot c_k(D_{d-k+1})^0 \cap v_f^{-1}(X-F)$, qui est contenue dans $\gamma_f^{-1}(\mu \cdot c_k(D_{d-k+1})) \cap v_f^{-1}(X-F) = \gamma_f^{-1}(c_k(\mu^{-1} \cdot D_{d-k+1})) \cap v_f^{-1}(X-F)$ est donc dense dans $\gamma_f^{-1}(c_k(\mu^{-1} \cdot D_{d-k+1})) = S \times \mathbb{C}^N \times c_k(\mu^{-1} \cdot D_{d-k+1}) \cap N_f(X)$. La proposition résulte alors aussitôt du fait que l'action de Γ sur G_k est transitive, le point ii) provenant de la transversalité dans G des strates $0 \times 0 \times \mu \cdot \sigma_\alpha$ avec les strates Z_β contenues dans $v_f^{-1}(0)$. ■

1.3.1 Remarque : La même assertion, avec la même preuve, est valable pour toutes les variétés de Schubert, et permet de définir, pour chaque suite d'entiers (a_1, \dots, a_d) une variété polaire locale associée à (a_1, \dots, a_d) et à un drapeau \mathcal{D} assez général, définie par : $v_*(\gamma^{-1}(\sigma_a(\mathcal{D})))$. C'est un sous-espace analytique réduit, de codimension $\sum a_i$ ou vide, de X , dont le transformé strict par le morphisme v est égal ensemblistement à $\gamma^{-1}(\sigma_a(\mathcal{D}))$. Ces variétés polaires sont sûrement destinées à jouer un rôle important dans l'étude locale des singularités, mais nous n'en avons pas besoin ici.

1.3.2 Corollaire : Supposons que f soit un morphisme lisse, c'est-à-dire plat et à fibres lisses, en tout point $x \in X-F$. Soit $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ une projection linéaire telle que $\text{Ker } p = D_{d-k+1}$ appartienne à l'ouvert W_k . Pour $x \in X-F$, la fibre $X(f(x))$ est non-singulière en x , contenue dans $\{f(x)\} \times \mathbb{C}^N$ et l'on notera $\pi_x: X(f(x)) \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ la restriction à $X(f(x))$ de la projection p . Soit $P_k \langle f; p \rangle^0$ l'ensemble des points $x \in X-F$ tels que x soit critique pour π_x .

Alors

$$i) \quad P_k \langle f; p \rangle^0 = v_f(\gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1})) \cap v_f^{-1}(X - F)).$$

ii) L'adhérence $P_k \langle f; p \rangle$ de $P_k \langle f; p \rangle^0$ dans X est un sous-espace analytique fermé de X , purement de codimension k dans X ou vide, égal à l'image réduite $v_f(\gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1})))$.

iii) Le transformé strict de $P_k \langle f; p \rangle$ par le morphisme v_f est égal à $v_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1}))$, ensemblément.

Preuve : Il suffit de remarquer que x est critique pour π_x si et seulement si l'on a $\dim(T_{X(f(x)), x} \cap D_{d-k+1}) \geq k$, ce qui donne i). Le reste est conséquence immédiate de la Proposition, et du fait que le morphisme v_f est propre. ■

1.4 Définition : Etant donné un morphisme $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ comme ci-dessus, muni d'une S -installation $(X, 0) \subset (S, 0) \times (\mathbb{C}^N, 0)$, et un sous-espace linéaire $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^N$ de codimension $d-k+1$ contenu dans W_k , on appelle variété polaire locale relative de codimension k associée à f et à D_{d-k+1} le sous-espace analytique fermé $P_k \langle f; p \rangle$ de X , qui est purement de codimension k dans X , ou vide. On le note aussi $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$, ou $P_k((X, 0), D_{d-k+1})$ si S est un point. On note de même son germe en 0 . Lorsqu'aucun risque de confusion n'est présent, on notera aussi $P_k \langle p \rangle$ ou $P_k \langle D_{d-k+1} \rangle$. Lorsque S est un point, on parlera de variété polaire absolue, mais dans tous les cas, on omettra souvent les adjectifs "relatif" ou "absolu".

1.4.1 Premier avatar : Supposons le S -plongement fermé $(X, 0) \subset (S, 0) \times (\mathbb{C}^N, 0)$ défini par l'idéal $I = (f_1, \dots, f_m)$ de $\mathcal{O}_{S, 0} \{z_1, \dots, z_N\}$. Soit $D_{d-k+1} \in W_k$ et choisissons les coordonnées de telle façon que D_{d-k+1} soit défini par

$z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$. Posons $d = \dim X - \dim S$ et $c = N - d$. Notons J l'idéal de $\mathcal{O}_{X, 0}$

engendré par les déterminants jacobiens $\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_c})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_c})}$ avec

$\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, m\}$ et $\{j_1, \dots, j_c\} \subset \{1, \dots, N\}$, et notons $J \langle D_{d-k+1} \rangle \subset J$

l'idéal de $\mathcal{O}_{X, 0}$ engendré par les seuls déterminants jacobiens qui sont tels

que $\{j_1, \dots, j_c\} \subset \{d-k+2, \dots, N\}$. La variété polaire $P_k(f; D_{d-k+1})$ est définie dans X par l'idéal

$$\pi \langle D_{d-k+1} \rangle = (J : \sqrt{J \langle D_{d-k+1} \rangle}) = \{h \in \mathcal{O}_{X,0} / h \cdot J \subset \sqrt{J \langle D_{d-k+1} \rangle}\} .$$

Remarque : Comme le calcul des idéaux résiduels $(I : J)$ est assez impraticable en général, cet avatar ne fait guère que décrire la variété polaire

$P_k(f; D_{d-k+1})$ dans le langage de l'algèbre.

"Le secret de la pensée solide est dans la défiance des langages. Les spéculations bien séparées des notations sont les plus puissantes."

Paul Valéry. Cahiers

1.4.2 Second avatar : Soient k un corps de caractéristique zéro, et $\varphi : R \rightarrow A$ un homomorphisme de k -algèbres noëthériennes locales réduites complètes équidimensionnelles. On suppose que les extensions résiduelles sont triviales, que R est régulier et que $\Omega_{A/R}^1 \otimes_{\text{Tot}(A)}$ est libre de rang $d = \dim A - \dim R$. On fixe un système z_1, \dots, z_N d'éléments de l'idéal maximal m_A de A qui engendrent m_A modulo $m_R \cdot A$, et un entier k , $0 \leq k \leq d-1$.

Soient $\lambda_{i,j}$, $1 \leq j \leq N$ des indéterminées et posons $z_i^* = \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} z_j$. Notons K^* le corps $k(\{\lambda_{i,j}\})$ et posons $R_k^* = R \otimes_k K^*$, $A_k^* = A \otimes_k K^*$; soit enfin R_k^* la R^* -algèbre complète $R^*[[z_1^*, \dots, z_{d-k+1}^*]]$. On a donc des homomorphismes :

$R_k^* \hookrightarrow R_{d-k+1}^* \xrightarrow{\varphi_{d-k+1}} A_k^*$. Considérons les idéaux premiers p^* de A_k^* qui sont minimaux parmi ceux qui satisfont les deux conditions suivantes :

i) L'anneau $A_{p^*}^*$ est géométriquement régulier.

ii) L'homomorphisme naturel $(R_{d-k+1}^*)_{\varphi_{d-k+1}^{-1}(p^*)} \rightarrow A_{p^*}^*$ n'est pas formellement

lisse.

Alors ces idéaux premiers sont de hauteur k , en nombre fini, et leur intersection est l'idéal définissant dans $\text{Spec } A^*$ la variété polaire locale (générique)

associée à φ et au choix de z_1, \dots, z_N .

§ 2. Exemples.

2.1 Soit $f: \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ un (germe de) morphisme analytique, que l'on installe par le plongement $\mathbb{C}^{d+1} \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1}$ défini par l'idéal engendré par $v - f(z_0, \dots, z_d)$. Si 0 est un point critique isolé de f , la k -ième variété polaire $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ de f associée au sous-espace D_{d-k+1} , que l'on peut supposer défini par $z_0 = \dots = z_{d-k} = 0$ est le sous-espace de \mathbb{C}^{n+1} défini par l'idéal de $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ engendré par $\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right)$. Dans [Te 12], il est prouvé que pour D_{d-k+1} assez général, la multiplicité en 0 de $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ est égale au nombre de Milnor $\mu^{(k)}$ de l'intersection de l'hypersurface $X = f^{-1}(0)$ avec un plan de dimension k général de \mathbb{C}^{d+1} passant par 0.

2.2 Examinons maintenant, dans la même situation, les variétés polaires (absolues) du germe d'hypersurface $X = f^{-1}(0)$ associées à des D_{d-k+1} : elles sont définies par les idéaux suivants de $\mathcal{O}_{X,0}$:

$$\pi_k \langle D_{d-k+1} \rangle = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) \cdot \mathcal{O}_X : \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right) \cdot \mathcal{O}_X} \right)$$

et si X est à singularité isolée en 0, on a

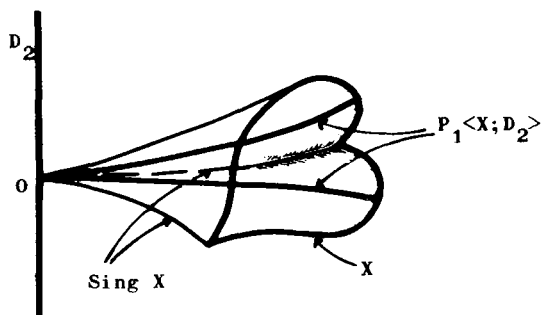
$$\pi_k \langle D_{d-k+1} \rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right) \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_d\} / (f)$$

on en déduit que l'on a l'égalité

$$P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \cap f^{-1}(0) = P_k (f^{-1}(0); D_{d-k+1}) .$$

Dans (loc. cit.), on a montré que la multiplicité en 0 de $P_k \langle X; D_{d-k+1} \rangle$ était, pour D_{d-k+1} assez général, égale à $\mu^{(k)} + \mu^{(k+1)}$ pour $0 \leq k \leq d-1$.

Le dessin suivant aidera peut-être le lecteur ; ici X est une surface réduite de \mathbb{C}^3 , pas nécessairement à singularité isolée.



2.3 Cas particulier servant de note historique : Supposons maintenant que f soit un polynôme homogène de degré m , définissant un cône réduit X , cône sur une variété projective réduite $V \subset \mathbb{P}^d$. Choisir une droite $D_d \subset \mathbb{C}^{d+1}$ revient à choisir un point $(X_0 : \dots : X_d) \in \mathbb{P}^d$ et la variété polaire relative $P_1 \langle f; D_d \rangle$ est contenue dans l'hypersurface $\sum_0^d X_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0$, et lui est égale si V est non-singulière. Par ailleurs, dans ce cas $P_k \langle X; D_d \rangle = P_k \langle f; D_{d-k} \rangle \cap X$. La sous-variété projective de \mathbb{P}^d correspondant à $P_1 \langle f; D_d \rangle$ sera appelée variété polaire à la Poncelet associée à f . On notera qu'elle est définie dans le cas où V est non singulière par l'équation obtenue en polarisant le polynôme f par rapport à un point suffisamment général $(X_0 : \dots : X_d) \in \mathbb{P}^d$. Son intersection avec V sera appelée variété polaire à la Todd de V associée à $D_d \in \mathbb{P}^d$. On peut bien sûr faire de même pour toutes les variétés projectives, et l'on voit que la théorie des variétés polaires locales absolues contient la théorie des variétés polaires à la Todd des variétés projectives, telle qu'elle a été développée par R. Piene [Pi] : c'est tout simplement le cas où notre germe est un cône. On peut aussi consulter cet excellent travail de Piene, ou [K1 2], pour des références historiques.

Exercice : Soit $X \subset \mathbb{C}^3$ le cône sur une courbe projective plane réduite $V \subset \mathbb{P}^2$. On sait que la multiplicité en 0 de X est égale au degré de la courbe V . Montrer que la multiplicité en 0 de la courbe polaire $P_1 \langle X; D_2 \rangle$ de X pour D_2 assez général, est égale à la classe de la courbe projective V , c'est-à-dire au degré de la courbe duale $V^\vee \subset \mathbb{P}^2$.

§ 3. Multiplicité des variétés polaires.

3.1 Théorème : Soit $f: (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ un morphisme d'espaces analytiques comme en 1.1.

i) Pour tout S-plongement local $(X, 0) \subset (S, 0) \times (\mathbb{C}^N, 0)$, tout choix de coordonnées sur \mathbb{C}^N , et pour tout entier k , $0 \leq k \leq d = \dim X - \dim S$, il existe un ouvert de Zariski dense V_k contenu dans l'ouvert W_k de la Proposition 2 (1.3) tel que la multiplicité $m_0(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle)$ en 0 de la variété polaire $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ soit indépendante de $D_{d-k+1} \in V_k$.

ii) Pour chaque k , $0 \leq k \leq d$, cette multiplicité ne dépend en fait que de la classe d'isomorphisme de l'homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}_{S,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,0}$ associé à f .

Démonstration : Décrivons d'abord une construction : Donnons-nous une famille à un paramètre de projections $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$, que nous supposons décrite par

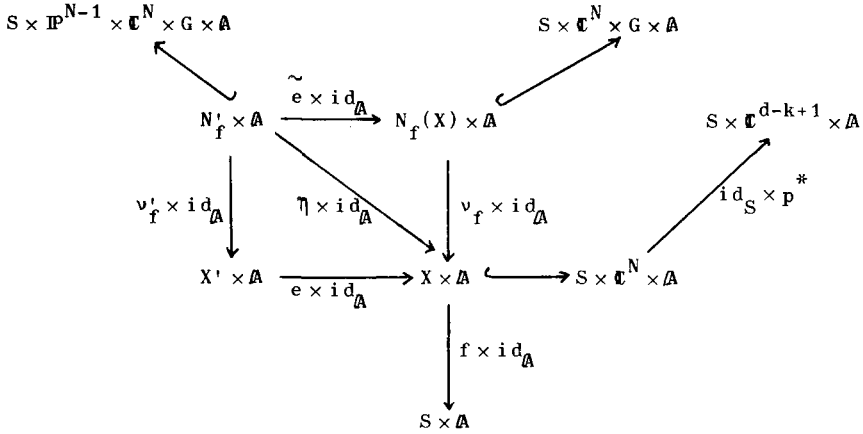
$$(*) \quad z_i^* = z_i + \sum_{j=d-k+1}^N \gamma_{ij}(t) z_j + \sum_{|A| \geq 2} c_{i,A}(t) z^A,$$

pour $1 \leq i \leq d-k+1$, avec $\gamma_{ij}(t)$ et $c_{i,A}(t)$ dans $t \cdot \mathbb{C}[t]$, dans des coordonnées z_1, \dots, z_N fixées sur \mathbb{C}^N . Notons \mathbb{A} la droite affine, et considérons le morphisme (où $t \in \mathbb{A}$)

$$p^* : \mathbb{C}^N \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}^{d-k+1} \times \mathbb{A}$$

décrit par (*) et l'identité de \mathbb{A} .

Considérons le diagramme suivant :



où $v_f \times id_{\mathbb{A}}$ n'est autre que la modification de Nash relative associée à $f \times id_{\mathbb{A}}$, $e \times id_{\mathbb{A}}$ est l'éclatement dans $X \times \mathbb{A}$ du sous-espace $0 \times \mathbb{A}$, $\tilde{e} \times id_{\mathbb{A}}$ est l'éclatement dans $N_f(X) \times \mathbb{A}$ du sous-espace $v_f^{-1}(0) \times \mathbb{A}$, enfin $v' \times id_{\mathbb{A}}$ est le morphisme dû à la propriété universelle de l'éclatement.

Notons $dp_t^*(z)$ l'application tangente à la projection $p_t^* = p^*|_{\mathbb{C}^N \times \{t\}}$ au point z , et considérons le sous-espace du produit $\mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A}$ défini comme ceci

$$P = \{(z, T, t) / \dim(T \cap \text{Ker } dp_t^*(z)) \geq k\} .$$

Il est facile de voir que P est un sous-espace analytique fermé de $\mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A}$, défini localement par les conditions :

$$\text{rang} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{c,1} & \dots & a_{c,N} \\ \frac{\partial z_1^*}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial z_1^*}{\partial z_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_{d-k+1}^*}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial z_{d-k+1}^*}{\partial z_N} \end{vmatrix} < c + d - k + 1 \quad , \quad \text{où } c = N - d$$

où les équations $\sum a_{i,j} z_j = 0$ ($1 \leq i \leq c$) définissent $T \subset \mathbb{C}^N$.

Le point est maintenant que, d'après les résultats généraux (cf.

[Ke] (§ 3)) sur les variétés déterminantielles, l'espace analytique P admet une stratification $P = \cup_{\alpha} P_{\alpha}$ le long de chaque strate de laquelle on a résolution simultanée forte pour les strates adjacentes, et qui est donc en particulier une stratification de Whitney (cf. Chap. III, 5.2.2). L'existence d'une telle stratification provient de la résolution des singularités explicite donnée dans (Loc. cit.).

Détaillons un peu : d'une façon générale, soit U l'espace affine ayant pour coordonnées U_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$. Considérons le sous-espace fermé de $U \times (\mathbb{C}^n - \{0\})$ défini par les équations

$$(E_j) : \sum U_{ij} X_i = 0 \quad .$$

Cet espace est non-singulier, et son image Z dans $U \times \mathbb{P}^{n-1}$ est un sous-espace fermé non-singulier de $U \times \mathbb{P}^{n-1}$, dont on calcule facilement que la dimension vaut $np - p + n - 1$.

Proposition (Kempf, [Ke], § 3) : Le morphisme $Z \rightarrow U$ induit par la première projection est une résolution rationnelle des singularités de son image, qui est le sous-espace de U défini par les équations exprimant que : $\text{rang}(U_{ij}) < p$.

Dans le cas qui nous intéresse, nous utilisons le fait que puisque la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial z_j} \end{pmatrix}$ ($1 \leq i, j \leq d-k+1$) est inversible, nous pouvons utiliser les $d-k+1$ dernières lignes du système d'équations linéaires

$$\begin{array}{l} a_{1,1} Z_1 + \dots + a_{1,N} Z_N = 0 \\ \vdots \\ a_{c,1} Z_1 + \dots + a_{c,N} Z_N = 0 \\ \frac{\partial z_1^*}{\partial z_1} Z_1 + \dots + \frac{\partial z_1^*}{\partial z_N} Z_N = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial z_{d-k+1}^*}{\partial z_1} Z_1 + \dots + \frac{\partial z_{d-k+1}^*}{\partial z_N} Z_N = 0 \end{array}$$

pour exprimer linéairement Z_1, \dots, Z_{d-k+1} en fonction de Z_{d-k+2}, \dots, Z_N , et nous ramener à écrire qu'un système de c équations en $N - (d-k+1)$ inconnues a une solution non triviale. Le sous-espace \tilde{P} de $\mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A} \times \mathbb{P}^{N-(d-k+1)-1}$ défini localement par les c équations obtenues en substituant dans les c premières lignes du système ci-dessus les valeurs de Z_1, \dots, Z_{d-k+1} obtenues à partir des $d-k+1$ dernières, muni du morphisme $\tilde{P} \rightarrow \mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A}$ induit par la projection sur les trois premiers facteurs, a pour image P et en est une résolution des singularités. On prend pour P_α les images des strates d'équidimensionalité des fibres de cette résolution $\tilde{P} \rightarrow P$, et on vérifie la résolution simultanée.

D'après la forme des équations définissant \tilde{P} , chaque strate P_α est envoyée submersivement sur la droite \mathbb{A} par la projection $\mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$. La fibre de P au-dessus de $0 \in \mathbb{A}$ (par cette projection) n'est autre que $\mathbb{C}^N \times c_k(\text{Ker } p_0)$ comme on le voit. Enfin, l'image par $v_f \times \text{id}_{\mathbb{A}}$ de l'intersection $(S \times P) \cap (N_f(X) \times \mathbb{A})$ (dans $S \times \mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A}$) est un sous-espace analytique fermé de $X \times \mathbb{A}$, que nous noterons $P_k(\text{Ker } p^*)$, qui a la propriété que pour chaque $t \in \mathbb{A}$, $P_k(\text{Ker } p^*) \cap S \times \mathbb{C}^N \times \{t\}$ est la variété polaire relative de X , muni des coordonnées $z_1^*(t), \dots, z_{d-k+1}^*(t), z_{d-k+2}, \dots, z_N$ correspondant à $z_1^*(t) = \dots = z_{d-k+1}^*(t) = 0$.

Lemme : Il existe un ouvert de Zariski dense U_k de la grassmannienne des $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^N$ tel que si $\text{Ker } p_0 \in U_k$, l'espace $P_k(\text{Ker } p^*)$ soit équivariant le long de $0 \times \mathbb{A}$.

Preuve : Choisissons une stratification de Whitney $N_f(X) = \cup Z_\beta$ de $N_f(X)$ telle que non seulement $v_f^{-1}(0)$ soit réunion de strates, mais encore pour chaque i , l'image par \tilde{e} de l'ensemble $F_i = \{x' \in N_f(X) / \dim \tilde{e}^{-1}(\tilde{e}(x')) \geq i\}$ soit réunion de strates. Cela fait, choisissons p_0 de telle façon que $c_k(\text{Ker } p_0)$ (muni de sa stratification naturelle) soit transverse (en tant qu'ensemble stratifié, c-à-d., strate par strate) à $v_f^{-1}(0)$ dans G . D'après le lemme 4.2.5 du Chapitre III, l'ensemble stratifié $S \times P$ est transverse à $N_f(X) \times \mathbb{A}$ dans $S \times \mathbb{C}^N \times G \times \mathbb{A}$, et d'autre part, d'après (Chap. III, 5.1), puisque $c_k(\text{Ker } p_0)$ est transverse à $v_f^{-1}(0)$, l'ensemble $((\tilde{e} \times \text{id}_{\mathbb{A}})^{-1}((S \times P) \cap N_f(X) \times \mathbb{A}))_{\text{red}}$ est le

transformé strict de $(S \times P) \cap (N_f(X) \times \mathbb{A})$ par l'éclatement $\tilde{e} \times \text{id}_{\mathbb{A}}$.

D'après le Corollaire 1.3.2, cet ensemble est le transformé strict par le morphisme $\eta \times \text{id}_{\mathbb{A}} = (\nu_f \circ \tilde{e}) \times \text{id}_{\mathbb{A}}$ du sous-espace analytique $P_k(\text{Ker } p^*)$ de $X \times \mathbb{A}$, et nous le noterons $P_k(\text{Ker } p^*)'^{\wedge}$. D'après l'hypothèse de transversalité, et la preuve de (Chap. III, 5.1), l'intersection de $P_k(\text{Ker } p^*)'^{\wedge}$ avec $(\eta \times \text{id}_{\mathbb{A}})^{-1}(0 \times \mathbb{A})$ a pour dimension $d + \dim S - k$, et sa fibre au-dessus de $0 \in \mathbb{A}$ a pour dimension $d + \dim S - k - 1$. C'est donc a fortiori le cas pour le diviseur exceptionnel du transformé strict $P_k(\text{Ker } p^*)'$ de $P_k(\text{Ker } p^*)$ par l'éclatement $e \times \text{id}_{\mathbb{A}}$ de $0 \times \mathbb{A}$ dans $X \times \mathbb{A}$, c'est-à-dire par l'éclatement de $0 \times \mathbb{A}$ dans $P_k(\text{Ker } p^*)$. L'équimultiplicité résulte alors de (Chap. I, Remarque 5.1.1, 3). ■

Pour achever la preuve du théorème, on commence par comparer les variétés polaires correspondant à des projections linéaires dans deux S -plongements $X \subset S \times \mathbb{C}^N$, $X \subset S \times \mathbb{C}^{N'}$, \mathbb{C}^N et $\mathbb{C}^{N'}$ étant munis de coordonnées z_1, \dots, z_N et $z'_1, \dots, z'_{N'}$, respectivement. En considérant $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N'}$, on se ramène aussitôt à prouver que les multiplicités des variétés polaires de X correspondant à des projections linéaires générales de \mathbb{C}^N et de $\mathbb{C}^{N+N'}$ sur \mathbb{C}^{d-k+1} sont égales. Supposant que z_1, \dots, z_{d-k+1} définit une projection linéaire générale pour \mathbb{C}^N on peut, au prix d'un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{C}^{N'}$ supposer que $z_i + tz'_i$, $1 \leq i \leq d-k+1$, définit pour $t \neq 0$, assez petit, une projection linéaire générale pour $\mathbb{C}^{N+N'}$, car les sous-espaces de codimension $d-k+1$ de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N'}$ qui rencontrent $\mathbb{C}^N \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{C}^{N'}$ en codimension $d-k+1$ forment un ouvert dense de la grassmannienne. Il suffit alors d'appliquer le Lemme à la famille $z_i^* = z_i + tz'_i$.

Il nous reste à étudier le cas de deux systèmes de coordonnées différents dans \mathbb{C}^N , disons z_1, \dots, z_N et z'_1, \dots, z'_N . Au prix d'un changement linéaire de coordonnées, on peut se ramener au cas où l'on a une expression

$$z'_i = z_i + \sum_{|A| \geq 2} c_{i,A} z^A \quad (1 \leq i \leq d-k+1), \quad c_{i,A} \in \mathbb{C}$$

et il suffit d'appliquer le Lemme à la famille

$$z_i^* = z_i + \sum_{|A| \geq 2} c_{i,A} t^{|A|-1} z^A$$

qui pour tout $t \neq 0$ donne des coordonnées homothétiques aux z'_i , donc fournissant les mêmes variétés polaires. ■

3.2 Remarques : 1) En fait (comme l'a remarqué aussi V. Navarro (cf. [Na 2] pour un très bon exposé), la modification de Nash n'est qu'un cas particulier de la construction suivante : Etant donné un faisceau F , localement libre, disons de rang f , sur le complémentaire d'un fermé analytique rare B de X , il existe une modification $v(F): \tilde{X} \rightarrow X$ telle que $v(F)^*(F)$ ait un quotient localement libre de rang f sur \tilde{X} , et minimale pour cette propriété. (La modification de Nash est le cas où $F = \Omega_X^1$.) On peut au moyen d'une présentation locale $\mathcal{O}_X^M|_U \rightarrow F|_U \rightarrow 0$ plonger $v(F)^{-1}(U)$ dans $U \times G$, où G est la grassmannienne des f -plans de \mathbb{C}^M . On peut ainsi définir les variétés polaires locales de F en tout point $x \in X$, en utilisant le même argument de mise en position générale qu'en 1.3 et ce pour tout symbole de Schubert (a_1, \dots, a_n) . Le rôle du plongement local $X \subset \mathbb{C}^N$ n'est que de donner une présentation locale $\mathcal{O}_X^N \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$. On peut même, utilisant l'argument de [Lê-Te], montrer que les multiplicités en chaque point de ces variétés polaires locales ne dépendent que de F . Je me suis abstenu de démontrer le Théorème par cette voie pour deux raisons ; un peu pour éviter une généralisation pour le moment inutile, mais surtout parce que la démonstration géométrique donnée ci-dessus, convenablement raffinée permet de prouver le résultat suivant :

Théorème : La classe d'équisingularité (au sens des conditions de Whitney) des variétés polaires projectives relatives générales associées à un S-plongement $X \subset S \times \mathbb{C}^N$ ne dépend que du type d'isomorphisme de l'homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}_{S,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,0}$ correspondant à f .

et ce résultat cadre très bien avec le point de vue selon lequel on doit s'efforcer de remplacer des résultats numériques (ou de classe d'équivalence rationnelle) en théorie des intersections par des résultats concernant la classe d'équisingularité. D'ailleurs il est probable que la démonstration ci-dessus peut être un peu modifiée pour prouver un résultat analogue pour toutes les variétés polaires locales d'un faisceau cohérent F .

2) En fait, comme on le verra au Chapitre VI, les multiplicités des variétés polaires locales projectives sont des invariants de nature essentiellement topologique (au sens de la topologie des sous-ensembles stratifiés de \mathbb{C}^N), ce qui généralise la présentation des $\mu^{(k)}$ de 2.1 donnée dans [Te 1].

3.2 Corollaire : A toute algèbre analytique locale $\mathcal{O}_{X,0}$ réduite et purement de dimension d , on peut associer une suite d'entiers

$$M_{X,x}^* = (m_0(P_0(X,0)), m_0(P_1(X,0)), \dots, m_0(P_{d-1}(X,0)))$$

où $m_0(P_k(X,0))$ est la multiplicité en 0 de la variété polaire projective $P_k(X,0)$ dans \mathbb{C}^N calculée au moyen d'un plongement $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ et d'un sous-espace D_{d-k+1} assez général.

3.3 Remarque : Nous nous permettrons dorénavant de parler de "la" variété polaire (sous-entendu "projective générale") de codimension k de X et même de la noter $P_k(X,0)$. Noter que d'après 1.3, ii), $P_d(X,0)$ est vide.

3.4 Exercice : Soit X la surface dans \mathbb{C}^3 d'équation $x^2 - y^2z = 0$; montrer que $M_{X,0}^* = (2, 1)$.

§ 4. Variétés polaires et espace conormal.

Voici une autre construction possible des variétés polaires projectives, où la modification de Nash est remplacée par le morphisme conormal. C'est la forme locale de la construction des cycles polaires des variétés projectives

qui permet d'étudier le comportement de ces cycles par dualité (cf. [Pi]).
Je remercie J.P.G Henry et M. Merle de m'avoir signalé son intérêt.

4.1 Reprenons la situation de 1.1. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme, comme en 1.1, et supposons fixé un S -plongement $X \subset S \times \mathbb{C}^N$. Considérons l'espace conormal relatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}^{N-1} \\ & \nearrow \lambda_f & \\ C_f(X) \subset X \times \mathbb{P}^{N-1} & & \\ \downarrow \kappa_f & & \\ X & & \end{array}$$

et notons $\lambda_f: C_f(X) \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ le morphisme induit par la seconde projection $X \times \mathbb{P}^{N-1} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$. (λ_f joue le rôle du morphisme de Gauss.)

4.1.1 Proposition (à comparer à la Prop. 2 du § 1, et son Corollaire 1.3.1) :
Pour tout entier k , $0 \leq k \leq d = \dim X - \dim S$, il existe un ouvert de Zariski dense U_k de la grassmannienne des sous-espaces projectifs de dimension $d-k$ de \mathbb{P}^{N-1} tel que pour tout $L^{d-k} \in U_k$ on ait :

- 1) $\lambda_f^{-1}(L^{d-k}) \cap \kappa_f^{-1}(X - F)$ est dense dans $\lambda_f^{-1}(L^{d-k})$ et ce dernier espace est vide ou de codimension pure $N-1-d+k$ dans $C_f(X)$.
- 2) L'égalité $\dim(\kappa_f^{-1}(0) \cap \lambda_f^{-1}(L^{d-k})) = \dim \kappa_f^{-1}(0) - N+1+d-k$ a lieu si l'intersection n'est pas vide.
- 3) L'intersection D_{d-k+1} dans \mathbb{C}^N de tous les hyperplans de \mathbb{C}^N représentés par des points de L^{d-k} est un sous-espace de codimension $d-k+1$ de \mathbb{C}^N appartenant à l'ouvert W_k de la Prop. 2 du § 1 et l'on a :

$$(*) \quad (\kappa_f(\lambda_f^{-1}(L^{d-k})))_{\text{red}} = P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle .$$

Preuve : Les points 1) et 2) peuvent être démontrés de façon tout à fait

analogue aux points 1) et 2) de la Prop. 2 du § 1. Dans le point 3), l'assertion de dimension vient de ce que D_{d-k+1} est l'intersection des hyperplans correspondant à $d-k+1$ points en position générale dans \mathbb{P}^{d-k} , la condition que D_{d-k+1} soit dans W_k est une condition ouverte sur L^{d-k} comme on le voit facilement. Enfin, d'après les points 1) et 2) il suffit de vérifier l'égalité (*) en tout point x de $X - F$, c'est-à-dire que, notant $T \subset \mathbb{C}^N$ l'espace tangent en x à la fibre $X(f(x))$ de f passant par x , on doit prouver l'équivalence $T \subset H \in L^{d-k} \Leftrightarrow \dim(T \cap D_{d-k+1}) \geq k$. Si $T \subset H \in L^{d-k}$, on a $\dim(T \cap D_{d-k+1}) \geq d+N-d+k-1-N+1 = k$ puisque $D_{d-k+1} \subset H$, et inversement, si $\dim(T \cap D_{d-k+1}) \geq k$, on a $\dim(T + D_{d-k+1}) \leq N-1$, d'où l'implication inverse puisque L^{d-k} est l'ensemble des hyperplans contenant D_{d-k+1} . ■

§ 5. Transversalité des variétés polaires.

5.1 Théorème : Soit $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ un morphisme d'espaces analytiques comme en 1.1, où de plus S est non-singulier de dimension au plus 1. Pour tout représentant assez petit de f , tout plongement local $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^M, 0)$, tout entier k , $0 \leq k \leq d = \dim X - \dim S$, il existe un ouvert de Zariski dense T_k de la grassmannienne G_k des sous-espaces vectoriels de codimension $d-k+1$ dans \mathbb{C}^M , contenu dans l'ouvert W_k de 1.4 et tel que, pour tout $D_{d-k+1} \in T_k$, on ait :

A) Le sous-espace D_{d-k+1} est transverse en 0, dans \mathbb{C}^M , à la variété polaire relative $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$, en ce sens que l'on a

$$|D_{d-k+1} \cap C_0(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle)| = \{0\}$$

où $C_0(\cdot)$ désigne le cône tangent en 0, et l'intersection est prise dans

$T_{\mathbb{C}^M, 0}$.

B) Les directions limites en 0 d'espaces tangents aux fibres de f en des points non-singuliers d'icelles contenus dans $X \cap D_{d-k+1}$ sont transverses à D_{d-k+1} dans \mathbb{C}^M , en ce sens que pour une telle limite T , on a $\dim(T \cap D_{d-k+1}) = k-1$.

Démonstration : Ces deux résultats sont d'une certaine manière duaux l'un de l'autre : considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N'_f(X) & \xrightarrow{\tilde{e}} & N_f(X) \\ \downarrow v'_f & & \downarrow v_f \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

déjà utilisé au paragraphe précédent, et posons $X_{d-k+1} = (X \cap D_{d-k+1})_{\text{red}}$.

5.1.1 L'assertion A) équivaut à la suivante :

A') Les transformés stricts $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle'$ de $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ et X'_{d-k+1} de X_{d-k+1} par l'éclatement e de 0 dans X sont disjoints :

$$P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle' \cap X'_{d-k+1} = \emptyset .$$

L'assertion B) équivaut à la suivante :

B') Les transformés stricts $\widehat{P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle}$ de $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ et \widehat{X}_{d-k+1} de X_{d-k+1} par la modification de Nash relative v_f sont disjoints :

$$\widehat{P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle} \cap \widehat{X}_{d-k+1} = \emptyset .$$

La vérification de ces équivalences est immédiate au vu des définitions.

Traduisons maintenant les deux assertions en termes de coordonnées.

Supposons les coordonnées de \mathbb{T}^M choisies de telle façon que D_{d-k+1} soit défini par $z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$; posons $P_k = P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$. D'après (Chap. I, 5.2), l'assertion A) équivaut à la suivante :

A'') Pour tout i tel que $d-k+1 < i \leq M$, l'élément $z_i \cdot \mathcal{O}_{P_k, 0}$ image de z_i dans $\mathcal{O}_{P_k, 0}$ est entier, dans $\mathcal{O}_{P_k, 0}$, sur l'idéal $(z_1, \dots, z_{d-k+1}) \cdot \mathcal{O}_{P_k, 0}$ de $\mathcal{O}_{P_k, 0}$ engendré par les images de z_1, \dots, z_{d-k+1} .

D'après (Chap. II, 3.1), l'assertion B) équivaut à la suivante, pour tou

choix d'un système de générateurs (f_1, \dots, f_p) pour l'idéal définissant $(X, 0)$ dans $(S, 0) \times (\mathbb{C}^M, 0)$:

B'') L'image $J_{X/S} \cdot \mathcal{O}_{X_{d-k+1}, 0}$ dans $\mathcal{O}_{X_{d-k+1}, 0}$ de l'idéal jacobien relatif $J_{X/S}$, engendré par les images des déterminants jacobiens de rang $c = M - d$:

$$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_c})} \quad \{j_1, \dots, j_c\} \subset \{1, \dots, p\}, \quad \{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, M\}$$

est entière dans $\mathcal{O}_{X_{d-k+1}, 0}$ sur l'idéal J_0 engendré dans $\mathcal{O}_{X_{d-k+1}, 0}$ par ceux de ces déterminants jacobiens qui sont tels que l'on ait :

$$\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{d-k+1, \dots, M\} .$$

Démontrons maintenant le Théorème. Choisissons un système f_1, \dots, f_{p-1} de générateurs pour l'idéal définissant $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^M, 0)$. Plaçons-nous dans le cas où $\dim S = 1$; on peut supposer $(X, 0) = (\mathbb{C}, 0)$ et que $f : X \rightarrow S$ est la restriction à X de $f : (\mathbb{C}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Le S -plongement $(X, 0) \subset (S, 0) \times (\mathbb{C}^M, 0)$ peut alors être défini par l'idéal $(f_1, \dots, f_{p-1}, v - f_p)$ de $\mathbb{C}\{v, z_1, \dots, z_M\}$ où v est une coordonnée locale sur $(S, 0)$.

Considérons l'ouvert affine $A = \mathbb{C}^\alpha$ de G_k , où $\alpha = (d-k+1)(M-d+k-1)$, de la grassmannienne G_k muni des coordonnées $a_j^{(i)}$, $1 \leq i \leq d-k+1$, $d-k+2 \leq j \leq M$, et le sous-espace analytique fermé de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^M \times A$ défini (au voisinage de 0) par l'idéal de $\mathbb{C}\{v, z_1, \dots, z_M, (a_j^{(i)})\}$ engendré par $((f_1)_a, \dots, (f_{p-1})_a, v - (f_p)_a)$ où pour un élément $h \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_M\}$ la notation $(h)_a$ désigne l'élément de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_M, (a_j^{(i)})\}$ obtenu en substituant $z_i + \sum_{j=d-k+2}^M a_j^{(i)} z_j$ à z_i dans h , pour $1 \leq i \leq d-k+1$. Il suffit de prouver que A'') et B'') sont réalisées en tout point d'un ouvert analytique dense de A . Appliquons le Théorème de Bertini idéaliste (Chap. II, 2.1) au morphisme $Z \xrightarrow{\sigma} A$ induit par la projection $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^M \times A \rightarrow A$, muni de la section $\sigma : A \xrightarrow{\sim} 0 \times 0 \times A \subset Z$. Il existe un ouvert analytique dense $U = A - B$ dans A tel que pour $\underline{a} \in U$, nous ayons les relations de dépendance intégrale suivantes : pour tout entier ℓ , $1 \leq \ell \leq M-d+k-2$ et pour un choix fixe de

$\Delta = \{i_{\ell+1}, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, M\}$, notons J_Δ l'idéal de $\mathcal{O}_{Z, \sigma(a)}$ engendré par les éléments de la forme :

$$z_{m_1} \dots z_{m_\ell} \frac{\partial((f_{j_1})_a, \dots, (f_{j_c})_a)}{\partial(z_{m_1}, \dots, z_{m_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \quad \{j_1, \dots, j_c\} \subset \{1, \dots, p\}$$

et les éléments de la forme :

$$v \cdot z_{m_2} \dots z_{m_\ell} \frac{\partial(v - (f_p)_a, (f_{j_2})_a, \dots, (f_{j_c})_a)}{\partial(v, z_{m_2}, \dots, z_{m_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \quad \{j_2, \dots, j_c\} \subset \{1, \dots, p-1\}$$

Alors on a, pour $\{j_1, \dots, j_\ell\} \subset \{d-k+2, \dots, M\}$, $\{k_1, \dots, k_\ell\} \subset \{1, \dots, d-k+1\}$

$$(*) \quad \frac{\partial((f_{j_1})_a, \dots, (f_{j_c})_a)}{\partial(a_{j_1}^{(k_1)}, \dots, a_{j_\ell}^{(k_\ell)}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \cdot \mathcal{O}_{Z, \sigma(a)} \in \bar{J}_\Delta.$$

Remarquons que, puisque sur Z on a $v = (f_p)_a$, il résulte de (Chap. I, 1.4.5) que les éléments engendrant J_Δ et où v apparaît au dénominateur sont entiers dans $\mathcal{O}_{Z, \sigma(a)}$, sur l'idéal engendré par ceux du groupe précédent. A dépendance intégrale près, nous pouvons donc supposer que J_Δ est engendré par les seuls éléments du premier groupe. (N.B. C'est ici que nous utilisons l'hypothèse $\dim S \leq 1$).

Supposons avoir l'inclusion : $\{i_{\ell+1}, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, d-k+1\}$. On a alors les identités

$$(**) \quad \frac{\partial((f_{j_1})_a, \dots, (f_{j_c})_a)}{\partial(a_{j_1}^{(k_1)}, \dots, a_{j_\ell}^{(k_\ell)}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} = z_{j_1} \dots z_{j_\ell} \left(\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{k_1}, \dots, z_{k_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \right)_a.$$

Remarquons qu'au prix d'un changement linéaire des coordonnées, nous pouvons supposer que tous les $a_j^{(i)}$ sont nuls au point $\sigma(a) \in Z$ que nous considérons. Notons \mathcal{O} l'idéal engendré par les $(a_j^{(i)})$ dans $\mathcal{O}_{Z, z}$.

Sans plus faire l'hypothèse que $\{i_{\ell+1}, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, d-k+1\}$, on a la congruence modulo \mathcal{O} correspondant à (**), que nous noterons (***) mod. \mathcal{O} , et de même on a les congruences

$$\frac{\partial((f_{j_1})_a, \dots, (f_{j_c})_a)}{\partial(z_{m_1}, \dots, z_{m_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \equiv \left(\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{m_i}, \dots, z_{m_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \right)_a \pmod{\mathcal{O}} .$$

Démontrons l'assertion A'') : Sur la variété polaire $P_k = P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$, où D_{d-k+1} est défini par $z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$, on a d'après 1.4.1 :

$$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_c})} \mathcal{O}_{P_k, 0} = 0 \quad \text{si } \{i_1, \dots, i_c\} \subset \{d-k+1, \dots, M\} .$$

Par ailleurs, les relations de dépendance intégrale (*) sur Z donnent des relations de dépendance intégrale par restriction en sous-espace de $(Z, \sigma(a))$ défini par l'idéal \mathcal{O} , sous-espace qui n'est autre que X .

Prenant le cas particulier où $\ell = 1$, et utilisant (***) mod. \mathcal{O} , il vient donc, au vu de la remarque suivant (*), que pour tout $j \leq d-k+2$, et tout k , $1 \leq k \leq d-k+1$, pour tout $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, M\}$, on a :

L'élément $z_j \cdot \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_k, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})} \cdot \mathcal{O}_{P_k, 0}$ est entier, dans $\mathcal{O}_{P_k, 0}$, sur l'idéal de $\mathcal{O}_{P_k, 0}$, engendré par les éléments de la forme :

$z_m \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_m, z_{i_2}, \dots, z_{i_c})}$ où $\{m, i_2, \dots, i_c\} \not\subset \{d-k+2, \dots, M\}$. Nous pouvons choisir

$\{i_2, \dots, i_c\} \subset \{d-k+2, \dots, M\}$, ce qui force notre idéal à être engendré par

les éléments tels que l'on ait $1 \leq m \leq d-k+1$, et implique, comme on le voit

aussitôt, par exemple en utilisant le critère valuatif, que chacun des

$z_j \mathcal{O}_{P_k, 0}$, $d-k+1 < j \leq M$ est entier sur l'idéal engendré par les $z_m \cdot \mathcal{O}_{P_k, 0}$,

$1 \leq m \leq d-k+1$, c'est-à-dire que A'') est réalisée pour $a \in U$.

Pour prouver B''), prenons $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, M\}$ et posons

$\{i_1, \dots, i_c\} \cap \{1, \dots, d-k+1\} = \{n_1, \dots, n_\ell\}$. On peut donc écrire

$\{i_1, \dots, i_c\} = \{n_1, \dots, n_\ell, i_{\ell+1}, \dots, i_c\}$, au prix d'une permutation. Nous allons

utiliser le critère valuatif de dépendance intégrale : soit

$h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X_{d-k+1}, 0)$ un arc, et supposons que l'élément de valuation selon h minimale parmi tous les éléments de la forme

$$z_{m_1} \cdots z_{m_\ell} \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{m_1}, \dots, z_{m_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})}$$

soit l'élément

$$z_{r_1} \cdots z_{r_\ell} \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{r_1}, \dots, z_{r_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \quad .$$

Puisque $z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$ sur X_{d-k+1} , on a $\{r_1, \dots, r_\ell\} \subset \{d-k+2, \dots, M\}$.

En appliquant le Théorème de Bertini idéaliste via (*) et en utilisant

(**) mod. \mathcal{O} sur $X_{d-k+1} \subset X$, on obtient que

$$\frac{\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(a_{r_1}, \dots, a_{r_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})}}{\binom{n_1}{(n_1)} \binom{n_\ell}{(n_\ell)}} = z_{r_1} \cdots z_{r_\ell} \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{n_1}, \dots, z_{n_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})}$$

à une valuation au moins égale à celle de l'élément isolé ci-dessus, et donc

$$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{n_1}, \dots, z_{n_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \text{ a une valuation au moins égale à celle de}$$

$$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_c})}{\partial(z_{r_1}, \dots, z_{r_\ell}, z_{i_{\ell+1}}, \dots, z_{i_c})} \text{ ce qui suffit, d'après le critère valuatif,}$$

à prouver que l'assertion B'') est vérifiée pour $a \in U$. ■

La preuve dans le cas "absolu" où S est un point est identique à ceci près que l'on n'a pas besoin d'utiliser (Chap. I, 1.4.5).

Remarque : L'assertion A) généralise le Théorème 1, p. 269 de [Te 1] concernant les hypersurfaces à singularité isolée. Ce résultat a déjà été généralisé par M. Giusti et J.P.G. Henry ([G-H]) aux courbes polaires d'intersections complètes à singularité isolée. Enfin, le Théorème 5.1 est une conséquence d'un

théorème de J.P.G. Henry et M. Merle dans [H-M], qui généralise ([Te 1], I, 2.7 à 2.9).

5.2 Dans le cas absolu, on a un résultat de transversalité plus précis.

5.2.1 Proposition (Variante du Lemme 4.1.8 de [Lê-Te]) : Soient $X \subset \mathbb{C}^N$ un espace analytique complexe réduit purement de dimension d, Y un sous-espace non-singulier de dimension 1 de X et $0 \in Y$. Il existe un ouvert de Zariski dense W de l'espace des drapeaux

$$\mathcal{D} : (0) \subset D_{N-1} \subset \dots \subset D_2 \subset D_1 \subset D_0 = \mathbb{C}^N$$

où D_i est de codimension i, tel que pour tout $\mathcal{D} \in W$, on ait

$$|D_{d-k} \cap C_y(P_k \langle X, y \rangle; D_{d-k+1})| = \{0\} \quad (\text{intersection dans } T_{\mathbb{C}^N, y}) ,$$

en tout point $y \in Y - \{0\}$ assez proche de 0, et $0 \leq k \leq d-1$.

Preuve : Nous allons d'abord montrer que pour toute rétraction locale

$\rho : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$, l'ensemble des drapeaux tels que $D'_1 = T_{\rho^{-1}(0), 0}$ contient un ouvert de Zariski dense de drapeaux satisfaisant la condition de la Proposition. Considérons l'éclatement $e_Y : E_Y(X) \rightarrow X$ de Y dans X, et la réunion F_0 des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel $e_Y^{-1}(Y)$ qui sont envoyés surjectivement sur Y par e_Y (c'est le sous-espace de $e_Y^{-1}(Y)$ défini par l'idéal engendré par les éléments qui sont annulés par une puissance de l'idéal maximal $m_{Y,0}$ de $\mathcal{O}_{Y,0}$). Considérant le plongement $E_Y(X) \subset X \times \mathbb{P}^{N-2}$ défini par un choix de coordonnées sur la fibre $\rho^{-1}(0)$, on voit que $F_0 \cap (\{0\} \times \mathbb{P}^{N-2})$ est de dimension $d-2$. On peut donc choisir un sous-espace D_d de codimension $d-1$ dans $T_{\rho^{-1}(0), 0} = D_1$ et tel que $\text{Proj } D_d \cap (F_0 \cap (\{0\} \times \mathbb{P}^{N-2})) = \emptyset$. Supposons maintenant avoir choisi $D_d \subset D_{d-1} \subset \dots \subset D_{i+1}$ dans D'_1 de telle façon que, notant $F_{d-j} \subset X \times \mathbb{P}^{N-2}$ la réunion des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de l'éclatement $E_Y P_{d-j} \langle X; D_{j+1} \rangle \rightarrow P_{d-j} \langle X; D_{j+1} \rangle$ de Y dans la variété polaire

P_{d-j} associée à D_{j+1} , on ait $\text{Proj } D_j \cap (F_{d-j} \cap \{0\} \times \mathbb{P}^{N-2}) = \emptyset$ pour $i+1 \leq j \leq d$.
 Remarquons que puisque $P_{d-i} \langle X; D_{i+1} \rangle$ est contenu dans $P_{d-i-1} \langle X; D_{i+2} \rangle$, on a
 l'inclusion $F_{d-i} \subset F_{d-i-1}$, et donc en posant $F_j(0) = F_j \cap \{0\} \times \mathbb{P}^{N-2}$, on a
 $F_{d-i}(0) \subset F_{d-i-1}(0)$, d'où $\text{Proj } D_{i+1} \cap F_{d-i}(0) = \emptyset$. Comme par construction, on a
 $\dim F_{d-i}(0) = i-2$, on voit que l'ensemble des sous-espaces vectoriels D_i de
 codimension $i-1$ de D'_1 , contenant D_{i+1} et tels que $\text{Proj } D_i \cap F_{d-i}(0) \neq \emptyset$ est de
 dimension au plus $i-2$ (image de $F_{d-i}(0)$ dans $\text{Proj } D'_1/D_{i+1}$) alors que l'ensem-
 ble des sous-espaces vectoriels D_i de codimension $i-1$ de D_1 contenant D_{i+1}
 est de dimension $i-1$. Nous pouvons donc choisir D_i contenant D_{i+1} et tel que
 $\text{Proj } D_i \cap F_{d-i}(0) = \emptyset$. On construit ainsi un drapeau \mathcal{D} ayant la propriété que
 $\text{Proj } D_i \cap F_{d-i}(0) \neq \emptyset$ pour $2 \leq i \leq d$, et finalement on peut par le même argument
 choisir D_1 contenant D_2 et tel que $|D_1 \cap C_y(P_{d-1}(D_2))| = \{0\}$.
 Utilisons maintenant le fait qu'en tout point $y \in Y - \{0\}$ assez proche de 0,
 chaque $P_k \langle X; D_{d-k+1} \rangle$ est normalement plat le long de Y , ce qui implique (cf.
 [Le-Te 2]) que, en notant $N_k \rightarrow Y$ le cône normal de P_k le long de Y , on a en
 tout $y \in Y - \{0\}$ une suite exacte de cônes (cf. Loc. cit.)

$$0 \longrightarrow T_{Y,y} \longrightarrow C_y(P_k \langle X; D_{d-k+1} \rangle) \longrightarrow N_k(y) \longrightarrow 0$$

ce qui signifie que les translations (dans $T_{N,y}$) laissent invariant le cône
 tangent, et que le quotient par cette action s'identifie à la fibre $N_k(y)$ du
 cône normal. Par notre choix de \mathcal{D} , nous avons $\text{Proj } D_{d-k} \cap F_k(0) = \emptyset$, donc
 $\text{Proj } D_{d-k} \cap F_k(y) = \emptyset$ pour y assez voisin de 0, mais par la définition de l'écla-
 tement, nous avons pour $y \in Y - \{0\}$, $F_k(y) = \text{Proj } N_k(y)$, et cela donne
 $|D_{d-k} \cap N_k(y)| = \{0\}$, et en fait $|T_{Y,y} \times_{D_{d-k}} \cap C_y(P_k)| = |Y|$ puisque d'après la
 suite exacte, on a $C_y(P_k) = T_{Y,y} \times N_k(y)$. Finalement on a bien
 $|D_{d-k} \cap C_y(P_k \langle X; D_{d-k+1} \rangle)| = \{0\}$. ■

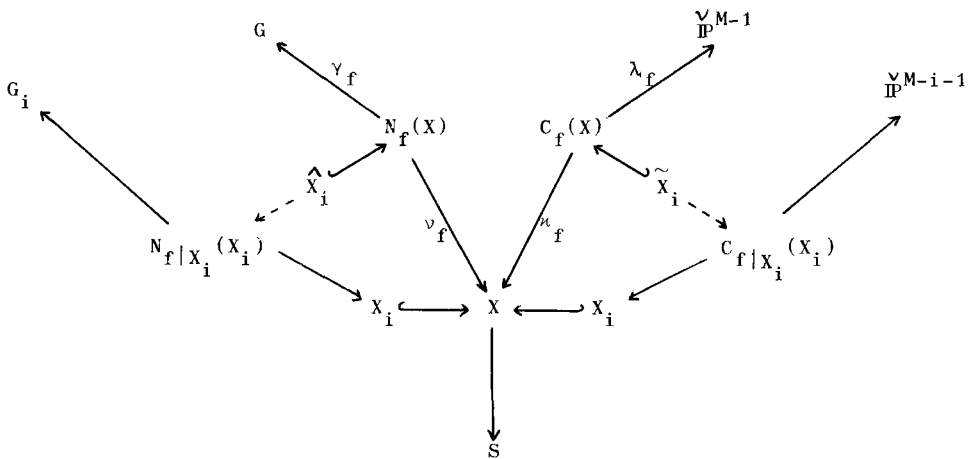
5.2.2 Corollaire (Lê-Teissier, [Lê-Te]) : Pour $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ et un dra-
peau \mathcal{D} assez général, on a :

$$|D_{d-k} \cap P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle| = \{0\} \quad (0 \leq k \leq d-1) \quad .$$

Preuve : Appliquer la Proposition à $X \times \mathbb{C}$ le long de $0 \times \mathbb{C}$.

5.3 Revenons au cas relatif, pour interpréter la transversalité B) du Théorème 4.1 comme finitude de certains morphismes.

Soit $f: (X,0) \rightarrow (S,0)$ comme en 1.1, et supposons donné un plongement local $(X,0) \subset (\mathbb{C}^M,0)$; soit D_i un sous-espace vectoriel de codimension i de \mathbb{C}^M tel que $F \cap D_i$ soit rare dans $X \cap D_i$ et que $X_i = (X \cap D_i)_{\text{red}}$ soit de dimension (pure) $d-i$.
Considérons la modification de Nash relative et l'espace conormal relatif de $X \subset S \times \mathbb{C}^M$ (plongé par le graphe de f) et notons \hat{X}_i le transformé strict de $X_i \subset X$ par la modification de Nash relative, et \tilde{X}_i le transformé strict par le morphisme conormal relatif κ_f , c'est-à-dire l'adhérence dans $C_f(X \subset S \times \mathbb{C}^M)$ de $\kappa_f^{-1}(X_i - F)$. On obtient le diagramme :



5.3.1 Proposition : Les conditions suivantes sont équivalentes, si l'on fait précéder chacune de "pour tout représentant suffisamment petit de X".

i) On a $\gamma_f^{-1}(c_{d-i+1}(D_i)) \cap \hat{X}_i = \emptyset$.

ii) Le morphisme de X_i^0 dans $X_i \times G_i$, où G_i désigne la grassmannienne des (d-i)-plans de D_i , défini par $x \rightarrow (x, T_{f^{-1}(f(x))} \cap T_{D_i, x})$, s'étend en un morphisme de \hat{X}_i dans $X_i \times G_i$, induit par le morphisme naturel de $G - c_{d-i-1}(D_i)$ dans G_i qui à T associe $T \cap D_i$, et dont l'image dans $X_i \times G$ est le modifié de Nash relatif $N_{f|X_i}(X_i)$ de X_i .

iii) Le morphisme précédent $\hat{X}_i \rightarrow N_{f|X_i}(X_i)$ non seulement est défini, mais encore est un morphisme fini.

iv) Pour tout choix d'un système de coordonnées locales (z_1, \dots, z_M) sur \mathbb{C}^M tel que D_i soit défini par $z_1 = \dots = z_i = 0$ et d'un système de générateurs $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{O}_{S, s}\{z_1, \dots, z_M\}$ de l'idéal définissant $X \subset S \times \mathbb{C}^M$ en 0, l'idéal engendré par les $\frac{\partial(F_{j_1}, \dots, F_{j_{M-d}})}{\partial(z_1, \dots, z_{i_{M-d}})}$ est entier dans $\mathcal{O}_{X_i, 0}$ sur l'idéal engendré par les seuls mineurs de cette forme tels que $\{i_1, \dots, i_{M-d}\} \subset \{i+1, \dots, M\}$.

v) Pour toute limite T d'espace tangents à X^0 en des points de $X_i - F$, on a $\dim(T \cap D_i) = d-i$.

i') Notant $L^{i-1} \subset \mathbb{P}^{M-1}$ l'espace projectif formé des hyperplans qui contiennent D_i , on a :

$$\lambda_f^{-1}(L^{i-1}) \cap \tilde{X}_i = \emptyset .$$

ii') Le morphisme de $\tilde{X}_i - \lambda_f^{-1}(L^{i-1})$ dans $X_i \times \mathbb{P}^{M-1-i}$, où \mathbb{P}^{M-1-i} est l'espace des hyperplans de D_i , qui à (x, H) associe $(x, H \cap D_i)$, s'étend en un morphisme $\tilde{X}_i \rightarrow X_i \times \mathbb{P}^{M-1-i}$ dont l'image est $C_{f|X_i}(X_i)$.

iii') Le morphisme précédent non seulement est défini, mais encore est un morphisme fini.

Démonstration : i) et v) sont clairement équivalent d'après la définition de la modification de Nash. D'autre part l'application $T \mapsto T \cap D_i$ est précisément

définie de $G - C_{d-i+1}(D_i)$ dans G_i , ce qui montre aussitôt que $i) \Leftrightarrow ii)$. Nous avons vu l'équivalence de $v)$ et $iv)$ en (Chap. II, 3.1), et il nous suffit de montrer que $ii) \Rightarrow iii)$ puisque l'implication inverse est évidente. Pour ce faire, nous pouvons plonger localement X dans une intersection complète relative Z (Chap. II, 1.1.1) définie disons par F_1, \dots, F_{M-d} , et calculer $N_f(X)$ (resp. \hat{X}_i) comme transformés stricts de X (resp. X_i) par l'éclatement de l'idéal jacobien relatif $J_{Z/S}$ de X_i . Mais l'hypothèse de $ii)$ implique précisément que $J_{Z/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}$ est entier sur l'idéal $J_{Z \cap D_i/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}$ image dans $\mathcal{O}_{X_i,0}$ de l'idéal jacobien relatif $J_{Z \cap D_i/S}$ de l'intersection complète relative $Z \cap D_i$. Comme $N_f(X_i)$ est l'éclatement dans X_i de $J_{Z \cap D_i/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}$, que $\hat{X}_i \rightarrow X_i$ est l'éclatement dans X_i de $J_{Z/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}$, et que ces deux idéaux ont la même fermeture intégrale (puisque $J_{Z \cap D_i/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0} \subset J_{Z/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}$ et que $J_{Z/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0} \subset \overline{J_{Z \cap D_i/S} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}}$), le résultat cherché est donné par (Chap. I, 1.3.6).

L'équivalence de $v)$ et $i)'$ résulte aussitôt de ce que nous avons vu en 4.1.1. Pour prouver l'équivalence de $i)'$ et $ii)'$, remarquons que l'application $H \rightarrow H \cap D_i$ est définie de $\check{\mathbb{P}}^{M-1} - L^{i-1}$ dans $\check{\mathbb{P}}^{M-1-i}$, et il nous reste à prouver que $ii)'$ $\Rightarrow iii)'$: les fermetures des fibres de la projection $\pi_i : \check{\mathbb{P}}^{M-1} - L^{i-1} \rightarrow \check{\mathbb{P}}^{M-1-i}$ sont des espaces projectifs \mathbb{P}^i dont L^{i-1} est un hyperplan, et si le morphisme $\tilde{X}_i \rightarrow C_f(X_i)$ n'était pas fini, cela signifierait que la restriction de π_i à $\kappa_f^{-1}(0)$ n'est pas finie, donc qu'il existe une fibre \mathbb{P}^i telle que $\mathbb{P}^i \cap \kappa_f^{-1}(0)$ soit un sous-ensemble algébrique de dimension ≥ 1 (puisque $\kappa_f^{-1}(0)$ est fermé dans \mathbb{P}^{M-1} , donc algébrique) et l'adhérence dans \mathbb{P}^i de ce sous-ensemble rencontrerait L^{i-1} d'après le théorème de Bezout, d'où une contradiction avec $i)'$. ■

5.3.2 Il résulte du Théorème 5.1, B) que les conditions de la Proposition 5.3.1 sont satisfaites, lorsque $\dim S \leq 1$, pour tout D_i appartenant à un ouvert de Zariski dense de la grassmannienne des plans de codimension i de \mathbb{C}^M .

5.4 Variétés polaires et sections planes.

5.4.1 Reprenons la situation de 1.1, avec les mêmes notations

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \hookrightarrow & (S \times \mathbb{C}^N, 0) \\ & & \downarrow \\ & & (S, 0) \end{array}$$

Soit G_0 un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^N , posons $G = S \times G_0 \subset S \times \mathbb{C}^N$ et $[X \cap G] = (X \cap G)_{\text{red}}$. Supposons que G_0 soit transverse aux limites d'espace tangents aux fibres de f en des points de $X \cap G$, c'est-à-dire que d'une part $F \cap G$ est rare dans $[X \cap G]$, et d'autre part, pour une telle limite T , on a $\dim T \cap G_0 = d + g - N$, où $g = \dim G_0$. On peut aussi exprimer cette transversalité de la manière suivante : soient $\kappa_f : C_f(X) \rightarrow X$ l'espace conormal relatif de X et $\widetilde{[X \cap G]}$ le transformé strict de $[X \cap G]$ par κ_f , c'est-à-dire l'adhérence dans $C_f(X)$ de $\kappa_f^{-1}([X \cap G] - F \cap G)$. Soit $\mathbb{P}^{N-g-1} \subset \mathbb{P}^{N-1}$ l'ensemble des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant G_0 . La transversalité s'exprime par : $\kappa_f^{-1}(0) \cap \widetilde{[X \cap G]} \cap \mathbb{P}^{N-g-1} = \emptyset$, c'est-à-dire $\widetilde{[X \cap G]} \cap \eta_f^{-1}(\mathbb{P}^{N-g-1}) = \emptyset$ pour un représentant assez petit. Remarquons que dans le cas où S est un point, puisque $\dim \kappa_f^{-1}(0) < N-1$, il existe toujours des hyperplans G (avec $g = N-1$) transverses à toutes les limites d'espaces tangents à X^0 (et pas seulement aux limites d'espaces tangents à X^0 en des points de $X \cap G$).

Quoi qu'il en soit, étant donné un tel sous-espace vectoriel G_0 , soit $D_{d-k+1} \subset G_0$ un sous-espace de G_0 , de codimension $d-k+1$ dans \mathbb{C}^N .

5.4.2 Proposition : Sous les hypothèses précédentes, si de plus le sous-espace vectoriel D_{d-k+1} appartient à l'ouvert W_k associé en 1.3 (Prop. 2) à $f|_{[X \cap G]}$, et appartient à l'ouvert correspondant associé à f , on a l'égalité :

$$P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \widehat{\cap} G = P_k \langle f|_{[X \cap G]}; D_{d-k+1} \rangle,$$

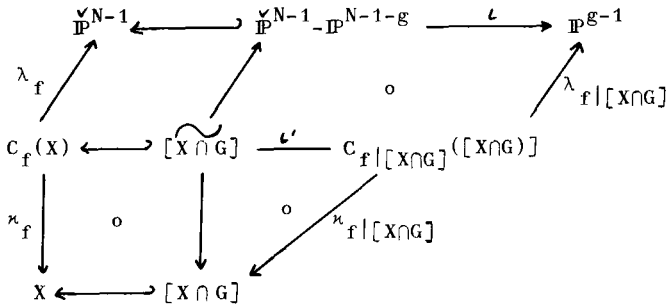
où le terme de gauche désigne l'adhérence dans X de $(X-F) \cap P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \cap G$.

Démonstration : D'après l'hypothèse de transversalité, en tout point

$x \in (X - F) \cap G$, voisin de 0, on a : $T_{X(f(x)), x}$

déduit d'une part que $\Omega_f^1|_{[X \cap G]}$ est localement libre de rang $d+g-N$ en tout point de l'ouvert analytique dense $(X - F) \cap G$ de $[X \cap G]$, et d'autre part (cf. 5.3, iii)') que la projection $\mathbb{P}^{N-1} - \mathbb{P}^{N-1-g} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ donnée par $H \mapsto H \cap G_0$ induit un morphisme fini $\widetilde{[X \cap G]} \rightarrow C_f|_{[X \cap G]}([X \cap G])$.

On a donc le diagramme suivant :



et puisque D_{d-k+1} est contenu dans G_0 , le sous-espace $L^{d-k} \subset \mathbb{P}^{N-1}$ représentant l'ensemble des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant D_{d-k+1} est la fermeture dans \mathbb{P}^{N-1} de l'image réciproque par la projection ι de centre \mathbb{P}^{N-1-g} donnée par $H \mapsto H \cap G$ du sous-espace $L^{d-k-N+g} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ représentant les hyperplans de G_0 qui contiennent D_{d-k+1} . On a donc l'égalité

$$(*) \quad \widetilde{[X \cap G]} \cap \lambda_f^{-1}(L^{d-k}) = \iota'^{-1}[C_f|_{[X \cap G]}([X \cap G]) \cap \lambda_f|_{[X \cap G]}^{-1}(L^{d-k-N+g})] .$$

D'après les hypothèses, le morphisme ι' est fini (cf. 5.3.1), il est biméromorphe puisqu'il induit un isomorphisme au-dessus de $[X \cap G] - F \cap G$ dont l'image réciproque est partout dense dans $\widetilde{[X \cap G]}$ (resp. $C_f|_{[X \cap G]}([X \cap G])$), donc il est surjectif. De plus les hypothèses impliquent (cf. 4.1.1) que l'image réduite du terme de gauche de (*) est $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \widehat{\cap} G$, tandis que l'image réduite du terme entre crochets à droite est $P_k \langle f|_{[X \cap G]}; D_{d-k+1} \rangle$, d'où le résultat. ■

5.4.3 Corollaire : Plaçons-nous dans la situation de 5.1. Supposons S non-singulier de dimension ≤ 1 et soit $(Y,0) \subset (X,0)$ un sous-espace non-singulier tel que $f|_Y : (Y,0) \rightarrow (S,0)$ soit une submersion. Posons $t = \dim Y - \dim S$, et supposons que l'espace projectif $\mathbb{P}^{\vee M-1-t}$ des hyperplans de \mathbb{E}^M qui contiennent $T_{Y(0),0}$ contienne un ouvert de Zariski dense V fermé d'hyperplans transverses en 0 aux limites en 0 d'espaces tangents aux fibres de f . Soit k un entier $\leq d-t$. Il existe un ouvert de Zariski dense de l'espace

$$\{(D_{d-k+1}, H_0) \mid D_{d-k+1} \subset H_0\} \subset G_k \times \mathbb{P}^{\vee M-1-t}$$

tel que, pour (D_{d-k+1}, H_0) appartenant à cet ouvert de Zariski dense on ait, en posant $H = S \times H_0$,

$$a) \quad (P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \widehat{\cap} H)_{\text{red}} = P_k \langle f | [X \cap H]; D_{d-k+1} \rangle$$

$$b) \quad m_0(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \widehat{\cap} H) = m_0(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle) = m_0 P_k \langle f | [X \cap H]; D_{d-k+1} \rangle$$

où m_0 désigne la multiplicité à l'origine.

Si $\dim S = 1$, ce nombre est égal au nombre d'intersection $(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle, D_{d-k+1})$ en 0.

Démonstration : Nous reprenons les notations du § 1. L'espace I_Y est muni de deux projections naturelles :

$$\begin{array}{ccc} & I_Y & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ G_k & & \mathbb{P}^{\vee M-1-t} \end{array}$$

La projection p_2 en fait un fibré en grassmanniennes sur $\mathbb{P}^{\vee M-1-t}$, donc I_Y est irréductible. Puisque $k \leq d-t$, la projection p_1 est surjective, car $\dim(D_{d-k+1} + T_{Y(0)}, 0) \leq M-1$. Soit $W \subset G_k$ le constructible de Zariski dense formé des D_{d-k+1} tels que $D_{d-k+1} \in W_k$, que la multiplicité en 0 de $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ soit la multiplicité d'une variété polaire générique, et que les conditions de 1.3 et 5.1 soient vérifiées. Le sous-ensemble $p_1^{-1}(W) \subset I_Y$ est constructible dense,

et rencontre $p_2^{-1}(V)$ selon un sous-ensemble constructible dense de I_Y . Par ailleurs, pour chaque $H \in V$, l'ensemble des $D_{d-k+1} \subset H_0$ qui appartiennent aux ouverts W_k (cf. 1.3) et T_k (cf. 5.1) associés à $f|_{[X \cap H]}$ est, d'après 1.3.1 un ouvert de Zariski dense de $p_2^{-1}(H_0)$, et d'après la manière dont W_k et T_k sont construits, on vérifie rapidement que la réunion pour $H_0 \in V$ de ces ouverts de Zariski denses des $p_2^{-1}(H)$ contient un ouvert de Zariski dense W' de I_Y . D'après 5.4.2 et 5.1, A) l'intérieur de $p_1^{-1}(W) \cap W'$ a toutes les propriétés demandées ; en effet l'assertion a) résulte de 5.4.2, la première égalité de b) est immédiate et la seconde résulte de la première et de la définition de W_k . En effet d'après 5.1 et (Chap. I, 5.2) puisque D_{d-k+1} est transverse à $C_0(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ et à $C_0(P_k \langle f|_{[X \cap H]}; D_{d-k+1} \rangle)$ l'idéal \mathfrak{m}_1 définissant D_{d-k+1} dans \mathbb{C}^N induit dans les anneaux locaux de $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ et $P_k \langle f|_{[X \cap H]}; D_{d-k+1} \rangle$ des idéaux ayant même fermeture intégrale que l'idéal maximal, (cf. 5.1, A'') donc même multiplicité (Chap. I, 4.1). Enfin dans le cas où $\dim S = 1$, $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ et D_{d-k+1} sont de dimension complémentaire dans \mathbb{C}^M , ne se coupent qu'en $\{0\}$ et leur nombre d'intersection est cette multiplicité d'après [Se].

5.4.4 Remarques : 1) Si $F \cap P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \cap G$ est rare dans $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \cap G$, on a l'égalité $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} G = (P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \cap G)_{\text{red}}$.

2) Dans la situation de 5.4.3, X étant plongé dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^M$ par le graphe de f , $[X \cap H]$ est le graphe de $f|_{[X \cap H_0]}$, donc $[X \cap H] \simeq [X \cap H_0]$ et de même $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H \simeq P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H_0$.

5.5 Variétés polaires et projections.

5.5.1 Proposition (généralisant [Lê-Te], 4.2.1, i) et 4.2.3) : Soit

$f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ un morphisme comme en 1.1 avec S non-singulier de dimension ≤ 1 muni d'un S -plongement $(X, 0) \subset (S \times \mathbb{C}^N, 0)$. On suppose que toutes les fibres de f sont réduites et purement de dimension d . Il existe un ouvert de Zariski dense U de l'espace des projections linéaires $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ tel que, pour toute projection $p \in U$, on ait, en notant encore p la S -projection, $\text{id}_S \times p$.

i) Le germe image $(X_1, 0) = (p(X), 0)$ est une hypersurface de $S \times \mathbb{C}^{d+1}$, dont toutes les fibres sont réduites de dimension d , et le morphisme $p : X \rightarrow X_1$ est fini et biméromorphe. Notons f_1 la restriction à X_1 de la projection

$S \times \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow S$.

ii) Il existe un ouvert de Zariski dense $W_{1,k}$ de la grassmannienne des sous-espaces de codimension $d-k+1$ de \mathbb{C}^{d+1} tel que, pour $(D_1)_{d-k+1} \in W_{1,k}$ on ait :

$$(p(P_k \langle f; p^{-1}((D_1)_{d-k+1}) \rangle))_{\text{red}} = P_k \langle f_1; (D_1)_{d-k+1} \rangle$$

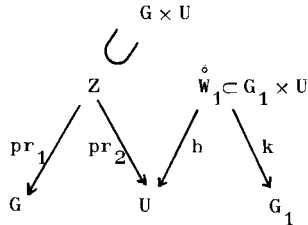
et ces deux variétés polaires ont la même multiplicité en 0, et ont la multiplicité d'une variété polaire générale (cf. 3.1) de X et X_1 respectivement.

Preuve : Donnons-la dans le cas où S est un point. Le cas où S est une courbe et analogue. On suit la preuve de (Loc. cit.).

Prouvons i) : Il existe un ouvert U_0 de projections linéaires $q: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^d$ tel que si $q \in U_0$, la restriction de q à $(X, 0)$ soit un morphisme fini (mise en position d'un germe). D'après le théorème de Bertini-Sard, pour des représentants X et V de $(X, 0)$ et $(\mathbb{C}^d, 0)$, le morphisme $q: X \rightarrow V$ est fini et il existe un fermé analytique rare $F_1 \subset V$ tel que q induise un morphisme lisse : $q^{-1}(V - F_1) \rightarrow V - F_1$. Soit $g \in V - F_1$. Il existe un ouvert dense de l'espace des projections linéaires z de \mathbb{C}^N sur \mathbb{C} tel que la restriction de z à $q^{-1}(y) \cap X$ soit injective. On vérifie sans peine que l'ensemble F_2 des points $y \in V$ tels que la restriction de z à $q^{-1}(y) \cap X$ ne soit pas injective est un fermé analytique rare de V . Pour un tel z , la projection $p = (q, z): \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ induit un isomorphisme de l'ouvert analytique dense $X - q^{-1}(F_1 \cup F_2)$ sur son image X_1 dans \mathbb{C}^{d+1} , ce qui prouve que cette image, qui est une hypersurface par un argument de profondeur déjà utilisé, est réduite [cf. [Te 3], § 3 : il faut plonger localement dans une intersection complète Z , appliquer l'argument et remarquer que $p(X)$ est réunion de composantes irréductibles de $p(Z)$, qui est une hypersurface]. Le morphisme $\pi: X \rightarrow X_1$ induit par p est bien fini et biméromorphe, d'où i).

Prouvons ii) : Notons G (resp. G_1) la grassmannienne des sous-espaces de codimension $d-k+1$ de \mathbb{C}^N (resp. \mathbb{C}^{d+1}). Soit Z le sous-espace de $G \times U$ formé des couples (D_{d-k+1}, p) tels que $\text{Ker } p \subset D_{d-k+1}$ et soit W_1 le sous-ensemble de $G_1 \times U$ formé des couples $((D_1)_{d-k+1}, p)$ tels que $(D_1)_{d-k+1}$ appartienne à l'ouvert W_k de

1.3 et que $P_k \langle (p(X), 0); (D_1)_{d-k+1} \rangle$ ait la multiplicité d'une variété polaire générale de $(p(X), 0)$. On prouve que ce sous-ensemble est constructible et dense dans $G \times U$ par un argument semblable à celui utilisé en 5.4.3. On a le diagramme



où h est induit par la seconde projection $G \times U \rightarrow U$, et est d'image dense.

On remarque que pr_2 est une fibration algébrique, donc un morphisme ouvert pour la topologie de Zariski. D'après 5.2.2, il existe un ouvert de Zariski dense

$T_0 \subset G \times U$ tel que pour $(D_{d-k+1}, p) \in T_0$, le noyau $\text{Ker } p$ de p soit transverse à $C_0(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle)$. Soit $V \subset G$ un ouvert de Zariski dense tel que pour

$D_{d-k+1} \in V$, la variété polaire $P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle$ ait en 0 la multiplicité générale. Considérons enfin la construction suivante. Soit $\nu : N(X) \rightarrow X$ la modifica-

tion de Nash de X ; et considérons le morphisme de Gauss $\gamma : N(X) \rightarrow G_d$, où G_d est la grassmannienne des d -plans dans \mathbb{C}^N . Pour toute projection linéaire

$p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, la variété de Schubert $\Sigma(p) = \{T \in G_d / \dim(\text{Ker } p \cap T) \geq 1\}$ est de codimension 2 dans G_d . Soit R l'ouvert de Zariski (dense grâce au théorème de

Kleiman, Chap. III, 4.3) de $G \times U$ formé des couples (D_{d-k+1}, p) tel que $\gamma^{-1}(\Sigma(p)) \cap \gamma^{-1}(c_k(D_{d-k+1}))$ soit de codimension 2 dans $\gamma^{-1}(c_k(D_{d-k+1}))$. Montrons

que l'intérieur U_0 du constructible dense $h(\overset{\circ}{W}_1) \cap (\text{pr}_2(V) \cap T_0 \cap R)$ convient. Pour cela, il suffit de montrer que si $p \in U_0$, on a

$p(\langle P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle_{\text{red}} \rangle) = \langle P_k \langle (X_1, 0); p_1(D_{d-k+1}) \rangle \rangle$. (Rappelons-nous que $D_{d-k+1} \supset \text{Ker } p$, donc $p(D_{d-k+1}) = (D_1)_{d-k+1}$ est de codimension $d-k+1$ dans \mathbb{C}^{d+1} .)

D'après la définition des variétés polaires locales, et le fait que $p \in h(W_1)$

$P_k \langle (X, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle \cap X_1^0$ est dense dans $P_k \langle (X_1, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle$. Si cette intersection n'est pas vide, il résulte aussitôt de 1.3.1 et du fait que

$p \in \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(V))$ que $\pi^{-1}(P_k \langle (X_1, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle)$ est réunion de composantes

irréductibles de $P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle$. Montrons qu'en fait

il y a égalité. Si P est une composante irréductible de $P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle$ qui n'est pas dans $\pi^{-1}(P_k \langle (X, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle)$, P est de codimension k puisque $p \in \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(V))$ et puisque $p \in \text{pr}_2(R)$, il existe un ouvert analytique dense P^0 de P en chaque point x duquel X est non-singulier et $\text{Ker } p$ transverse à $T_{X,x}$. L'image par p de $T_{X,x}$ est donc une limite d'espaces tangents en $p(x)$ à X_1 . Si (P) rencontre X_1^0 , $\pi(P)$ est une composante de $P_k \langle (X_1, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle$ et donc $P \subset \pi^{-1}(P_k \langle (X_1, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle)$ contrairement à l'hypothèse. Donc $\pi(P)$ est un sous-espace de codimension k de X_1 , contenu dans le lieu singulier de X_1 , et en tout point duquel il existe une limite T_1 d'espaces tangents à X_1^0 telle que $\dim(T_1 \cap p(D_{d-k+1})) \geq k$. Ceci montre que $\pi(P)$ est une composante de dimension $d-k$ de $v(\gamma_1^{-1}(c_k(p(D_{d-k+1}))))$, où $\gamma_1 : N(X_1) \rightarrow \mathbb{P}^d$ est l'application de Gauss, et ceci contredit, par 1.3, le fait que $p \in h(\overset{\circ}{W}_1)$. Ainsi, une telle composante ne peut exister, et l'on a bien $\pi^{-1}(P_k \langle (X_1, 0); p(D_{d-k+1}) \rangle) = P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle$. Finalement l'assertion sur les multiplicités résulte de ce que puisque $p \in \text{pr}_2(T_0)$, $\text{Ker } p$ est transverse à $C_0(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle)$ et du fait que la multiplicité est conservée par projection transversale (cf. Chap. I, 5.2 et 4.1). ■

Remarques : 1) L'assertion iii) du Théorème 4.2.1 de [Lê-Te] est inexacte, comme l'ont montré J.P.G. Henry et M. Merle. Il en est de même du Corollaire 4.2.4 du même travail. Ces résultats n'étaient utilisés nulle part dans [Lê-Te].

2) L'étude des variétés polaires relatives de $f : X \rightarrow S$ est compliquée, dans le cas $\dim S \geq 2$, par le fait que $f|_{P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle}$ peut avoir de l'éclatement.

§ 6. Mini-formulaire pour les variétés polaires.

Ici l'on s'autorise à écrire $P_k(X, 0)$, ou $P_k(f, 0)$ pour "la" variété polaire générale de codimension k , dont seule la classe d'équisingularité, voire la multiplicité, est définie sur \mathbb{C} . Le lecteur que cela gêne est prié de penser à la variété polaire générique, définie sur une extension de \mathbb{C} (cf. § 0 et § 1, 1.4)

6.1 Quelques inégalités utiles.

6.1.1 Proposition : Avec les notations introduites ci-dessus au § 1, et au § 4.

a) On a l'équivalence

$$P_k(f, 0) = \emptyset \iff \dim \kappa_f^{-1}(0) < N-1-d+k \quad .$$

b) Tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que pour tout $x' \in U$ on ait, pour $0 \leq k \leq d-1$:

$$m_{x'}(P_k(f, x')) \leq m_x(P_k(f, x)) \quad .$$

Démonstration : a) est une conséquence immédiate du théorème de Bezout et de 4.1.1. Démontrons b) : d'après 1.3, pour x fixé, l'ensemble des $D_{d-k+1} \in G_k$ (grassmannienne des plans de codimension $d-k+1$ de \mathbb{C}^N) tels que $\dim(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle) = d-k$, si $P_k(f, 0) \neq \emptyset$ est un ouvert de Zariski dense de G_k ; on construit facilement une famille $\pi : P_k \overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} W_k$ telle que $\pi^{-1}(D_{d-k+1})$ ne diffère de $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ que par des composantes immergées. Puisque la dimension des fibres de cette famille est constante, on a par semi-continuité de la multiplicité $m_o(P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle) \geq m_o(P_k(f, 0))$ pour tout $D_{d-k+1} \in W_k$. Si $P_k(f, x) = \emptyset$, d'après a) et la semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme, on a $P_k(f, x') = \emptyset$ pour tout x' assez voisin de x . Supposons $P_k(f, x) \neq \emptyset$; en un point $x' \in X - P_k(f, x)$ on a $\kappa_f^{-1}(x') \cap \lambda_f^{-1}(L^{d-k}) = \emptyset$ pour un certain L^{d-k} , donc par Bezout, $\dim \kappa_f^{-1}(x') < N-1-d+k$ et $P_k(f, x') = \emptyset$. Si $x' \in P_k(f, x)$ et est assez voisin de x , on a par semi-continuité de la multiplicité de $P_k(f, x)$, l'inégalité

$$m_x(P_k(f, x)) \geq m_{x'}(P_k(f, x'))$$

mais puisque $P_k(f, x)$ est de dimension $d-k$, le germe de $P_k(f, x)$ en x' est de dimension $d-k$ et est un $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ en x' , d'où l'inégalité

$$m_x(P_k(f, x)) \geq m_x(P_k(f, x'))$$

d'après ce que nous avons vu plus haut, et le résultat. ■

6.1.2 Proposition : Etant donné un sous-ensemble analytique fermé Y de X , il existe un fermé analytique rare $F \subset Y$ tel que l'application $y \rightarrow M_{X, Y}^*$ de Y dans \mathbb{N}^d définie en 3.2 soit localement constante sur $Y - F$.

Démonstration : Considérons le diagramme (cf. § 3)

$$\begin{array}{ccc}
 E_Y N(X) & \xrightarrow{\tilde{e}_Y} & N(X) \subset \mathbb{C}^N \times G \\
 \downarrow v_Y & \searrow \eta & \downarrow v \\
 E_Y X & \xrightarrow{e_Y} & X \subset \mathbb{C}^N
 \end{array}$$

où v est la modification de Nash, e_Y l'éclatement de Y dans X , \tilde{e}_Y l'éclatement de $v^{-1}(Y)$ dans $N(X)$ et v'_Y le transformé strict de v par e_Y . Soit $Y = \cup Y_\lambda$ la décomposition de Y en composantes irréductibles et soit

$B_\lambda = \{z \in \eta^{-1}(Y_\lambda) / \dim_z \eta^{-1}(\eta(z)) > d-1 - \dim Y_\lambda\}$. Puisque $\dim \eta^{-1}(Y) = d-1$ et que

η est propre, le sous-ensemble analytique $F_0 = \eta(\cup B_\lambda) \subset Y$ est rare. Soit F_1 le

lieu singulier de Y . En posant $F = F_0 \cup F_1$, on voit que l'on est ramené à prou-

ver que dans le cas où Y est non-singulier, et $y \in Y$ tel que

$\dim \eta^{-1}(y) = d-1 - \dim Y$, l'application $y \mapsto M_{X, Y}^*$ est constante au voisinage de y .

Soit $N(X) = \cup Z_\alpha$ une stratification de Whitney de $N(X)$ telle que $v^{-1}(y)$, $v^{-1}(Y)$,

et les images par \tilde{e}_Y des strates d'équidimensionnalité relatives de \tilde{e}_Y soient

réunion de strates (cf. Chap. III, § 5). Alors pour $0 \leq k \leq d-1$ il existe un

ouvert de Zariski dense U_k de la grassmannienne des plans de codimension $d-k+1$

de \mathbb{C}^N tel que pour $D_{d-k+1} \in U_k$, la stratification naturelle de $c_k(D_{d-k+1})$ soit

transverse dans $0 \times G$ aux strates Z_α contenues dans $v^{-1}(0)$. D'après (Chap. III,

4.2.5 et 5.1) on en déduit que $\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(c_k(D_{d-k+1})))$ coïncide ensemblistement avec le transformé strict de $\gamma^{-1}(c_k(D_{d-k+1}))$ par \tilde{e}_Y , et que la dimension de sa fibre au-dessus de 0 vaut $d-k-\dim Y$. C'est donc a fortiori le cas pour la fibre au-dessus de 0 de l'éclatement de Y dans $P_k\langle(X,0);D_{d-k+1}\rangle$, donc $P_k\langle(X,0);D_{d-k+1}\rangle$ est équimultiple le long de Y (cf. [Li]) au voisinage de y pour $D_{d-k+1} \in U_k$. Comme par ailleurs on a, grâce à la transversalité, l'égalité $(P_k\langle(X,y');D_{d-k+1}\rangle,y') = (P_k\langle(X,y);D_{d-k+1}\rangle,y')$ pour y' assez voisin de y , on obtient le résultat cherché. ■

6.2 Quelques formules, dans le cas absolu.

6.2.1 Pour un plan H_i de codimension i dans \mathbb{C}^N et assez général, on a, en posant $X_i = (X \cap H_i)_{\text{red}}$:

$$(P_k(X,0) \hat{\cap} H_i)_{\text{red}} = P_k(X_i,0) \quad \text{si } 0 \leq k \leq d-i-1 \quad ,$$

et pour les mêmes valeurs de k , on a :

$$m_o(P_k(X_i,0)) = m_o(P_k(X,0)) \quad .$$

Ceci résulte aussitôt de 5.4.

En particulier, la multiplicité de $P_k(X,0)$ est celle de la courbe polaire $P_k(X_{d-1-k},0)$, ce qui permet de ramener les calculs de multiplicités de variétés polaires à des calculs de multiplicités de courbes.

6.2.2 Soit $X_1 \subset \mathbb{C}^{d+1}$ une projection hyperplane générale de X , on a l'égalité

$$m_o(P_k(X,0)) = m_o(P_k(X_1,0)) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq d-1 \quad .$$

Ceci résulte de 5.5.1, ii).

C H A P I T R E V

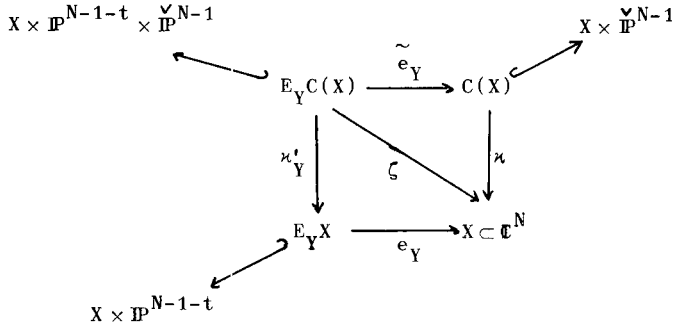
LE THEOREME PRINCIPAL

Introduction. Soient X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d , soit Y un sous-espace analytique complexe de X , non-singulier et de dimension t , et soit 0 un point de Y . Ce chapitre contient la démonstration du résultat principal de ce travail, affirmant que le fait que le couple de strates (X^0, Y) satisfasse en 0 en les conditions de Whitney (Chap. III, § 2) équivaut à ce que l'application $y \rightarrow M_{X,y}^*$ de Y dans \mathbb{N}^d définie par la multiplicité généralisée (Chap. IV, 3.2) soit localement constante sur Y au voisinage de 0 .

La méthode de démonstration est la récurrence sur $d-t$: on va couper X par une hypersurface non-singulière H contenant Y et "assez générale". Pour l'essentiel, la démonstration va consister à vérifier que chacune des conditions dont on veut vérifier l'équivalence implique que pour H assez générale, l'espace tangent $T_{H,0}$ à H en 0 est transverse à toutes les limites en 0 d'espaces tangents à X^0 , et que $(X \cap H)_{\text{red}}$ satisfait encore la même condition le long de Y .

§ 1. La démonstration.

1.1 Un outil technique important est le diagramme commutatif suivant, associé à un plongement $X \subset \mathbb{C}^N$, auquel il sera fait référence dans tout le chapitre :



où κ est l'espace conormal de X dans \mathbb{C}^N , e_Y l'éclatement de Y dans X , \tilde{e}_Y l'éclatement de $\kappa^{-1}(Y)$ dans $C(X)$ et κ'_Y vient de la propriété universelle de l'éclatement. On pose $\zeta = \kappa \circ \tilde{e}_Y$. Je remercie J.P.G. Henry et M. Merle de m'avoir montré que la modification de Nash de X utilisée dans [Te 5] devait être remplacée par l'espace conormal.

1.1.1 Remarque : Dans le diagramme ci-dessus, le morphisme κ'_Y est le transformé strict par l'éclatement e_Y du morphisme κ , c'est-à-dire que l'on peut identifier $E_Y C(X)$ au sous-espace de $E_Y X \times_C C(X)$ défini par l'idéal cohérent du produit fibré dont le germe en un point de ce produit est engendré par les fonctions holomorphes sur ce produit annulées par une puissance de l'équation du diviseur exceptionnel de $E_Y X$ via l'homomorphisme $\mathcal{O}_{E_Y X} \xrightarrow{\text{pr}_1^*} \mathcal{O}_{E_Y X} \times_C C(X)$ correspondant à la première projection (cf. [H.L.T.]).

1.2 Théorème : Soient X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d , Y un sous-espace analytique de X , purement de dimension t , et 0 un point non singulier de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) L'application de Y dans \mathbb{N}^d définie par
 $y \mapsto M_{X,y}^* = (m_y(X), m_y(P_1((X,y))), \dots, m_y(P_{d-1}((X,y))))$ est constante au voisinage de 0 .
- ii) Pour tout plongement local $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$, on a l'égalité

$$\dim \zeta^{-1}(0) = N-2-t \quad \text{si } \zeta^{-1}(0) \text{ n'est pas vide .}$$

iii) Le couple de strates (X^0, Y) vérifie en 0 la condition a) de Whitney stricte avec exposant 1 et la condition b) de Whitney stricte avec un exposant non précisé.

iv) Le couple de strates (X^0, Y) vérifie en 0 les conditions a) et b) de Whitney.

Démonstration : Tout d'abord, on peut supposer, et l'on supposera, Y plongé dans \mathbb{C}^N comme sous-espace linéaire.

i) \Rightarrow ii). Supposons d'abord $d-t > 0$ et considérons l'espace conormal $\kappa : C(X) \rightarrow X$. Puisque $d-t > 0$, Y est rare dans X et $\kappa^{-1}(Y)$ est rare dans $C(X)$, donc $\dim \kappa^{-1}(Y) \leq N-2$ et il existe (cf. Chap. III, § 5) un fermé analytique strict $F \subset Y$ tel que pour tout $y \in Y - F$ on ait l'inégalité $\dim \kappa^{-1}(y) \leq N-2-t$. D'après (Chap. IV, 6.1, a) ceci équivaut à : $P_k(X, y) = \emptyset$ pour $k \geq d-t$, c'est-à-dire $m_y(P_k(X, y)) = 0$ pour $k \geq d-t$. Par l'hypothèse d'équimultiplicité on a donc $m_o(P_k(X, 0)) = 0$, c'est-à-dire $P_k(X, 0) = \emptyset$ pour $k \geq d-t$ et d'après (Loc. cit.) $\dim \kappa^{-1}(0) \leq N-2-t$.

Démontrons maintenant l'assertion par récurrence sur $d-t$: Supposons d'abord $d-t = 0$; dans ce cas, Y est une composante irréductible de X , et dire que X est équimultiple le long de Y équivaut à dire que $Y = X$, donc $\kappa^{-1}(Y) = C(X)$ et $E_Y C(X) = \emptyset$, d'où $\zeta^{-1}(0) = \emptyset$.

Supposons maintenant $d-t \geq 1$. Remarquons d'abord que $\zeta^{-1}(Y)$ est un diviseur dans $E_Y C(X)$ qui est de dimension $N-1$ puisque $\dim C(X) = N-1$, donc $\dim \zeta^{-1}(Y) = N-2$. La fibre de $\zeta | \zeta^{-1}(Y) : \zeta^{-1}(Y) \rightarrow Y$ au-dessus d'un point général $y \in Y$ est de dimension $N-2-t$ et par semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme, on a $\dim \zeta^{-1}(0) \geq N-2-t$.

Examinons le cas où $d-t = 1$: D'après l'hypothèse i), comme nous l'avons vu, nous avons $\dim \kappa^{-1}(0) \leq N-2-t$. Par ailleurs, l'équimultiplicité de X le long de Y implique (Chap. I, 5.1) que e_Y est un morphisme fini. On en déduit aussitôt, puisque $\zeta^{-1}(0)$ est contenu dans $e_Y^{-1}(0) \times \kappa^{-1}(0)$, que $\dim \zeta^{-1}(0) \leq N-2-t$, d'où l'égalité, puisque l'inégalité inverse est un fait général comme nous venons de voir.

Supposons maintenant le résultat démontré pour $d-t \leq c-1$ et démontrons-le pour $d-t = c$.

On peut choisir une rétraction locale $\rho : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$ et considérer $(X, 0)$ comme plongé dans $Y \times \mathbb{C}^{N-t}$. Ainsi on peut considérer $E_Y(X)$ comme plongé dans $Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \mathbb{P}^{N-t-1}$. Considérons une stratification $E_Y(X) = \cup X'_\alpha$ de $E_Y(X)$ telle que $e_Y^{-1}(0)$ soit réunion de strates ainsi que chacune des images par $\kappa'_Y : E_Y(X) \rightarrow E_Y(X)$ des strates d'équidimensionnalité relative de κ'_Y (cf. Chap. III, § 5). Remarquons que puisque l'hypothèse i) implique $\dim \kappa^{-1}(0) \leq N-2-t$, il existe un ouvert de Zariski dense $U = \mathbb{P}^{N-1-t} - \kappa^{-1}(0)$ de l'espace $\mathbb{P}^{N-1-t} \subset \mathbb{P}^{N-1}$ des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant $T_{Y,0}$ tel que pour $H \in U$, H soit transverse à toutes les limites en 0 d'espaces tangents à X^0 . Soit $H_0 \subset \mathbb{C}^{N-t}$ un hyperplan, et soit H l'hyperplan $Y \times H_0 \subset Y \times \mathbb{C}^{N-t}$. La transformée stricte par e_Y de l'hypersurface H est $Y \times H'_0$ où $H'_0 \subset \mathbb{C}^{N-t} \times \mathbb{P}^{N-t-1}$ est l'espace éclaté de H_0 en 0, dont la fibre au-dessus de $0 \in \mathbb{C}^{N-t}$ est l'hyperplan $\text{Proj } T_{H_0,0}$ de \mathbb{P}^{N-t-1} correspondant à $T_{H_0,0}$. Choisissons H_0 de telle façon que d'une part $\text{Proj } T_{H_0,0}$ soit transverse dans \mathbb{P}^{N-t-1} à toutes les strates de la stratification de $E_Y(X)$ décrite ci-dessus qui sont contenues dans $e_Y^{-1}(0) \subset \mathbb{P}^{N-t-1}$, que d'autre part l'espace tangent $T_{H,0}$ en 0 à $H = Y \times H_0$ appartienne à l'ouvert U déterminé ci-dessus et pour tout k , $0 \leq k < d-t$, à l'image par la projection p_2 de l'ouvert de Zariski de I_Y dont l'existence a été prouvée en (Chap. IV, 5.4.3).

D'après (Chap. III, 4.2.5), pour tout représentant assez petit du germe $(X, 0)$ le sous-espace $Y \times H'_0$ de $Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \mathbb{P}^{N-t-1}$ est transverse à toutes les strates X'_α de $E_Y(X)$ et par conséquent, d'une part le transformé strict $E_Y[X \cap H]$ de $[X \cap H] = (X \cap H)_{\text{red}}$ par e_Y coïncide avec $E_Y X \cap (Y \times H'_0)$ (intersection dans $Y \times \mathbb{C}^{N-t} \times \mathbb{P}^{N-t-1}$), d'autre part, d'après (Chap. III, 5.1) le transformé strict de $E_Y[X \cap H]$ par le morphisme κ'_Y coïncide ensemblistement avec $\kappa'^{-1}_Y([X \cap H])$. Soit \mathcal{Y}_0 une composante irréductible de dimension maximale de $\zeta^{-1}(0)$, et soit $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{P}^{N-t-1}$ l'image par κ'_Y de \mathcal{Y}_0 . Si $\dim \mathcal{V}_0 = 0$, puisque, par construction, $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{V}_0 \times \kappa^{-1}(0)$, on a $\dim \mathcal{Y}_0 \leq N-2-t$ et par conséquent l'égalité $\dim \mathcal{Y}_0 = N-2-t$, puisque l'égalité inverse a toujours lieu. Si $\dim \mathcal{V}_0 > 0$, d'après le théorème

de Bezout, $\text{Proj } T_{H_0,0} \cap \mathcal{V}_0 \neq \emptyset$ et donc $\mathcal{V}_0 \cap E_Y[X \cap H] \neq \emptyset$. Puisque l'image réciproque par κ'_Y de $E_Y[X \cap H]$ coïncide ensemblistement avec son transformé strict, on en déduit que, notant $[X \cap H]'^{\sim}$ le transformé strict de $[X \cap H]$ par le morphisme ζ , qui n'est autre que le transformé strict par κ'_Y du transformé strict $E_Y[X \cap H]$ de $[X \cap H]$ par e_Y , on a :

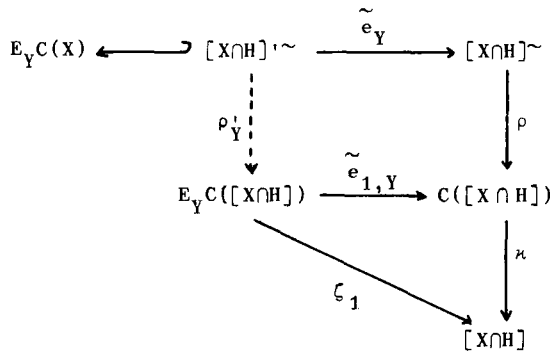
$$\mathcal{Y}_0 \cap [X \cap H]'^{\sim} \neq \emptyset .$$

Puisque $T_{H,0} \in U$, d'après (Chap. IV, 5.3.1), le morphisme naturel

$$\rho : [X \cap H]'^{\sim} \longrightarrow C([X \cap H])$$

du transformé strict de $[X \cap H]$ par κ dans l'espace conormal de $[X \cap H]$ est fini.

Considérons maintenant le diagramme



où κ est le morphisme conormal de $[X \cap H] \subset H$, $\tilde{e}_{1,Y}$ est l'éclatement de $\kappa^{-1}(Y)$ dans $C([X \cap H])$ et \tilde{e}_Y est le morphisme induit par le morphisme d'éclatement $E_Y C(X) \rightarrow C(X)$. En utilisant la propriété universelle de l'éclatement, on obtient une factorisation ρ'_Y , qui est en fait le transformé strict du morphisme ρ par l'éclatement $\tilde{e}_{1,Y}$, donc est un morphisme fini puisque ρ est fini. De plus, posant $\mathcal{Y}(0) = \zeta^{-1}(0)$ et $\mathcal{Y}_1(0) = \zeta_1^{-1}(0)$, on a l'égalité :

$$(*) \quad \rho'^{-1}_Y(\mathcal{Y}_1(0)) = \mathcal{Y}(0) \cap [X \cap H]'^{\sim} .$$

Montrons maintenant que $[X \cap H]$ satisfait aussi l'hypothèse de i), c'est-à-dire l'équimultiplicité des variétés polaires. Par notre choix de H_0 , pour un D_{d-k+1} assez général parmi ceux qui sont contenus dans H , on peut prendre $P_k(X, 0) = P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle$ et on a $m_0(P_k(X, 0)) = m_0(P_k(X, 0) \hat{\cap} H)$ (cf. Chap. IV, 5.4.3). Montrons que l'hypothèse d'équimultiplicité implique l'égalité $m_y(P_k(X, y)) = m_y(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle)$ pour $y \in Y$: considérons le diagramme d'inégalités :

$$\begin{array}{ccc} m_0(P_k(X, 0)) & = & m_y(P_k(X, y)) \\ \parallel & & \wedge \\ m_0(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle) & \geq & m_y(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle) \end{array}$$

où l'égalité horizontale vient de l'hypothèse, l'égalité verticale du choix de D_{d-k+1} , l'inégalité horizontale de la semi-continuité de la multiplicité, et l'inégalité verticale de l'argument de (Chap. IV, 6.1). Le résultat cherché en découle. De même le diagramme d'inégalités :

$$\begin{array}{ccc} m_0(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle) & = & m_y(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle) \\ \parallel & & \wedge \\ m_0(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H) & \geq & m_y(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H) \end{array}$$

dont la justification est analogue nous montre que d'une part $P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H$ est équimultiple le long de Y , et d'autre part H est transverse, au sens des multiplicités, à $P_k(X, y)$ en tout point $y \in Y$ assez voisin de 0. Comme H reste transverse aux limites en y d'espaces tangents à X^0 pour y assez proche de 0 et contient D_{d-k+1} , on a

$$P_k \langle (X, y); D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H = P_k \langle ([X \cap H], y); D_{d-k+1} \rangle$$

d'après (Chap. IV, 5.4.2).

Finalement, on a les égalités

$$m_y(P_k([X \cap H], y) = m_y(P_k(X, y) \hat{\cap} H) = m_y(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle \hat{\cap} H) =$$

$$m_y(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle) = m_o(P_k \langle (X, 0); D_{d-k+1} \rangle) = m_o(P_k(X, 0)) = m_o(P_k([X \cap H], 0))$$

d'où le résultat cherché.

Par l'hypothèse de récurrence, et puisque $\dim[X \cap H] = d-1$ et que $[X \cap H] \subset H$, on en déduit que l'on a l'égalité :

$$\dim \zeta_1^{-1}(0) = N-3-t \quad .$$

D'après l'égalité (*) ci-dessus, et la finitude du morphisme $\rho_Y^!$, on en déduit : $\dim \mathcal{Y}(0) \cap [X \cap H]^{\sim} = N-3-t$, et donc en particulier, en revenant à notre composante irréductible \mathcal{Y}_0 de $\mathcal{Y}(0)$, puisque nous savons que \mathcal{Y}_0 rencontre $[X \cap H]^{\sim}$, nous avons

$$\dim(\mathcal{Y}_0 \cap [X \cap H]^{\sim}) \leq N-3-t \quad .$$

Par ailleurs, $[X \cap H]^{\sim}$ est une union de composantes d'un sous-espace de $E_Y C(X)$ défini par une seule équation : celle de H composée avec ζ , par conséquent on a ([Bbk 3], § 3, No 1, Prop. 2) l'inégalité

$$\dim(\mathcal{Y}_0 \cap [X \cap H]^{\sim}) \geq \dim \mathcal{Y}_0 - 1$$

d'où finalement

$$\dim \mathcal{Y}_0 \leq N-2-t \quad ,$$

et le résultat cherché. ■

1.1.2 Remarque : Soient X et Y comme en 1.1. Nous venons de voir que si $M_{X,Y}^*$ est constant le long de Y au voisinage de 0 , il existe un ouvert de Zariski dense $A_k \subset G_k$ tel que pour $D_{d-k+1} \in A_k$, $P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle$ soit équivariant le long de Y . La réciproque de cet énoncé est vraie aussi. Soit en effet (cf. Chap. IV, 6.1.2) $F_k \subset Y$ un fermé analytique rare tel que $m_y(P_k(X,y))$ soit constante pour $y \in Y - F_k$. Si F_k est non vide, on coupe toute la situation par un sous-espace lisse de codimension $\dim Y - 1$ de \mathbb{C}^N rencontrant F_k en $\{0\}$, et l'on se ramène au cas où $\dim Y = 1$. On montre par un argument analogue à celui de (Chap. IV, 5.2.1) qu'il existe un ouvert de Zariski dense $D_k \subset G_k$ tel que si $D_{d-k+1} \in D_k$, on ait $m_y(P_k \langle (X,y); D_{d-k+1} \rangle) = m_y(P_k(X,y))$ pour $y \in Y - \{0\}$ assez proche de 0 . Comme il existe un ouvert de Zariski dense $C_k \subset G_k$ tel que la même égalité ait bien lieu pour $y = 0$, en prenant $A_k = D_k \cap C_k$, on obtient un ouvert de Zariski dense tel que

$$m_y(P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle) = m_y(P_k(X,y)) \quad \text{pour } y \in Y$$

d'où le résultat. ■

L'implication ii) \Rightarrow iii) n'est autre que le résultat de (Chap. III, 2.3.1).

L'implication iii) \Rightarrow iv) est évidente.

Prouvons iv) \Rightarrow i). Pour cela, nous allons tout d'abord montrer :

1.2.1 Proposition : Si le couple de strates (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en 0 , on a l'inégalité : $\dim \kappa^{-1}(0) \leq N - 2 - t$.

Démonstration : D'après (Chap. IV, 6.1), il suffit de prouver $P_{d-t}(X,0) = \emptyset$, et pour un plan H de \mathbb{C}^N de codimension $t-1$ passant par 0 et au demeurant assez général, d'une part l'intersection $Y \cap H$ sera non-singulière de dimension 1 , d'autre part d'après (Chap. III, 4.2.2), le couple $([X \cap H]^0, Y \cap H)$ satisfera en 0 les conditions de Whitney, et enfin (cf. Chap. IV, 6.2) on aura l'égalité de multiplicités : $m_o(P_{d-t}(X)) = m_o(P_{d-t}(X \cap H)_{\text{red}})$. Il suffit donc de prouver que $P_{d-t}((X \cap H)_{\text{red}}, 0)$ est vide, et puisque $\dim(X \cap H)_{\text{red}} = d-t$, nous voyons que

nous avons ramené la preuve de la Proposition à sa preuve dans le cas particulier où $t = 1$. Tout va reposer sur le lemme suivant :

1.2.2 Lemme-clé : Soient $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ un espace analytique complexe réduit purement de dimension d , et $(Y,0) \subset (X,0)$ une courbe non-singulière en 0 . Dans l'espace \mathbb{P} des projections linéaires $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$, il existe un ouvert constructible dense V tel que pour toute projection $p \in V$ on ait, en notant $P_{d-1}\langle p \rangle$ la fermeture dans X de l'ensemble des points critiques de $p|_{X^0}$:

i) L'ensemble $P_{d-1}\langle p \rangle$ est, au voisinage de 0 , un ensemble analytique fermé de dimension 1 , qui est une courbe polaire générale de $(X,0)$, et $|P_{d-1}\langle p \rangle \cap Y| = \{0\}$.

ii) La projection p est générale pour la courbe $P_{d-1}\langle p \rangle \cup Y$ en 0 , au sens de (Chap. I, § 6, Prop. 6.2.1).

Démonstration : On suppose toujours \mathbb{C}^N muni des coordonnées z_1, \dots, z_N et l'on munit \mathbb{C}^2 de coordonnées x et y . On peut pour prouver le Lemme se contenter de considérer les projections qui sont, à un automorphisme linéaire de \mathbb{C}^2 près, de la forme : $x = z_1 + \sum_3^N a_i z_i$, $y = z_2 + \sum_3^N b_i z_i$. On considère donc la famille de projections ci-dessus comme un morphisme $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{2(N-2)} \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{2(N-2)}$. D'après (Chap. IV, 1.3.1), il existe un fermé de Zariski $B \subset \mathbb{C}^{2(N-2)}$ tel que pour $(\underline{a}, \underline{b}) \in \mathbb{C}^{2(N-2)} - B$, le lieu critique de la restriction à X^0 de la projection correspondante soit une courbe, dont l'adhérence dans X est une courbe polaire générale.

Par ailleurs, remarquons que si Y est contenu dans le lieu singulier de X , on a $P_{d-1}\langle p \rangle \cap Y = \{0\}$ puisque d'après la définition des variétés polaires (Chap. IV, 1.3) et le fait que $P_{d-1}\langle p \rangle$ est une courbe, on a $P_{d-1}\langle p \rangle \cap \text{Sing } X = \{0\}$. Si Y n'est pas contenu dans $\text{Sing } X$, soit T la limite en 0 des espaces tangents à X^0 aux points de $Y - \{0\}$. Les projections p telles que $\text{Ker } p \cap T$ ne soit pas de codimension 2 dans T forment un fermé analytique rare B' de $\mathbb{C}^{2(N-2)}$, et pour tout projection $p \in \mathbb{C}^{2(N-2)} - (B \cup B')$, on aura

$P_{d-1} \langle p \rangle \cap Y = \{0\}$. Ceci achève d'établir le point i).

Grâce au lemme de transversalité des variétés polaires (Chap. IV, 5.1) il existe dans $\mathbb{C}^{2(N-2)} - (B \cup B')$ un ouvert V_1 , constructible et dense dans $\mathbb{C}^{2(N-2)}$ tel que, pour tout $p \in V_1$, le noyau $\text{Ker } p$ de p soit transverse au cône tangent en 0 à la courbe $P_{d-1} \langle p \rangle \cup Y$, c'est-à-dire ne contienne aucune des droites qui constituent le cône tangent. Comme nous l'avons déjà vu, nous pouvons choisir un système f_1, \dots, f_m , $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, 0}$ de générateurs de l'idéal définissant $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ tel que dans un voisinage de $0 \times V_1$ dans $\mathbb{C}^N \times V_1$, la réunion de $\text{Sing } X \times V_1$ avec $\bigcup_{p \in V_1} P_{d-1} \langle p \rangle$ soit définie par l'idéal engendré par les $(f_i)_{\underline{a}, \underline{b}}$

et par les déterminants jacobiens $\frac{\partial((f_1)_{\underline{a}, \underline{b}}, \dots, (f_{N-d})_{\underline{a}, \underline{b}})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N-d}})}$, tels que

$(i_1, \dots, i_{N-d}) \subset \{3, \dots, N\}$, où pour $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, 0}$ on a noté $h_{\underline{a}, \underline{b}}$ la fonction obtenue en substituant $x - \sum_{i=3}^N a_i z_i$ à z_1 et $y - \sum_{i=3}^N b_i z_i$ à z_2 , et l'on a pris pour coordonnées sur $\mathbb{C}^N \times V_1$ les fonctions $x, y, z_3, \dots, z_N, a_3, \dots, a_N, b_2, \dots, b_N$. Nous avons ainsi une famille analytique \mathcal{Z} de courbes de \mathbb{C}^N paramétrée par V_1 , dont l'image par le morphisme $\mathbb{C}^N \times V_1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \times V_1$ qui à $(x, y, z_3, \dots, z_N, \underline{a}, \underline{b})$ associe $(x, y, \underline{a}, \underline{b})$ est une famille analytique \mathcal{Z}_1 de courbes planes paramétrée par V_1 (l'image est toujours définie (cf. [Te 3], § 3) ici par l'idéal de Fitting $F_0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ du $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \times V_1}$ -module $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$).

D'après les résultats généraux (cf. [Te 2], I) sur la résolution simultanée, il existe un fermé analytique rare A de V_1 tel que au voisinage de tout point de $V_1 - A$, la famille $\mathcal{Z} \xrightarrow{\sigma} V_1$ (où σ est la section qui pique 0 dans chaque fibre) admette une normalisation simultanée qui de plus a la propriété que $|n^{-1}(\sigma(V_1))| \rightarrow \sigma(V_1)$ est étale, où $n: \bar{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{Z}$ est la normalisation.

Par ailleurs, d'après (Chap. I, 6.4.2), il existe un fermé analytique rare B de V_1 tel que la famille de courbes planes $\rho_1: \mathcal{Z}_1 \xrightarrow{\sigma_1} V_1$ (où σ_1 pique 0 dans chaque fibre) soit équisaturée en tout point de $V_1 - B$.

Examinons ce qui se passe au voisinage d'un point p_0 de $V_1 \setminus (A \cup B)$. La famille des courbes polaires $P_{d-1} \langle p \rangle$ admet une paramétrisation simultanée, c'est-à-dire

qu'elle peut être représentée comme l'image réduite d'un morphisme

$(\prod_{p=1}^r (\mathbb{C}, 0)) \times V_1 \rightarrow \mathbb{C}^N \times V_1$ où r est le nombre des composantes irréductibles de $P_{d-1} \langle p_0 \rangle \cup Y$ (ou de $(\mathcal{X}, \sigma(p_0))$, à cause du fait que $|n^{-1}(\sigma(V_1))| \rightarrow \sigma(V_1)$ est étale).

Donc si nous faisons un changement de coordonnées de sorte que les coordonnées \underline{a} , \underline{b} du point $p_0 \in V_1$ soient nulles, et notons dorénavant 0 pour p_0 , chaque com-

posante irréductible \mathcal{X}_ℓ de \mathcal{X} au voisinage de 0 peut être représentée paramétriquement comme suit : (cf. Chap. I, § 6) : $x = t_\ell^{n_\ell}$, $y = \nu(t_\ell, \underline{a}, \underline{b})$, $z_i = \zeta_i(t_\ell, \underline{a}, \underline{b})$ ($3 \leq i \leq N$) et $1 \leq \ell \leq r$. Noter que nous utilisons ici le fait que la projection de $P_{d-1} \langle p \rangle$ sur son image dans \mathbb{C}^2 est transversale pour $p \in V_1$, et que \mathcal{X}_1 est équimultiple le long de $\sigma_1(V_1 - A \cup B)$. Nous nous proposons de prouver que dans

l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$ on a les identités : $z_k = \frac{\partial \nu}{\partial b_k}$ pour $3 \leq k \leq N$. Il suffit de prouver que ces identités sont vérifiées dans le normalisé $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}} = \prod_{\ell=1}^r \{t_\ell, \underline{a}, \underline{b}\}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$.

Remarquons tout d'abord que sur la composante $Y \times V_1$ de \mathcal{X} , les identités sont vérifiées puisque la paramétrisation correspondante est donnée par des fonctions ζ_1, ξ, ν indépendantes de \underline{a} et \underline{b} et que par conséquent on est ramené à dériver par rapport à b_j l'identité $\nu(t) = z_2(t) + \sum_3^N b_j z_j(t)$ où $z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t)$ est une paramétrisation de Y .

Ecrivons maintenant les équations satisfaites par les autres composantes de \mathcal{X} , en utilisant la paramétrisation :

$$f_j(t_\ell) - \sum_3^N a_i \zeta_i(t_\ell, \underline{a}, \underline{b}), \nu(t_\ell, \underline{a}, \underline{b}) - \sum_3^N b_i \zeta_i(t_\ell, \underline{a}, \underline{b}), \zeta_3(t_\ell, \underline{a}, \underline{b}), \dots, \zeta_N(t_\ell, \underline{a}, \underline{b}) = 0$$

pour $1 \leq j \leq m$ et chaque ℓ ,

et, par définition des courbes polaires, sur ces composantes de \mathcal{X} s'annulent aussi des déterminants jacobiens :

$$\frac{\partial((f_1)_{\underline{a}, \underline{b}}, \dots, (f_{N-d})_{\underline{a}, \underline{b}})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N-d}})} \quad \text{avec } \{i_1, \dots, i_{N-d}\} \subset \{3, \dots, N\}$$

dérivons chacune des $N-d$ premières équations du premier groupe par rapport à b_k : nous obtenons un système d'équations linéaires que nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=3}^N \left(\left(\frac{\partial(f_j)_{\underline{a}, \underline{b}}}{\partial z_i} \right) \circ \lambda \right) \frac{\partial \zeta_i}{\partial b_k} + \left(\left(\frac{\partial(f_j)_{\underline{a}, \underline{b}}}{\partial y} \right) \circ \lambda \right) \left(\zeta_k - \frac{\partial \nu}{\partial b_k} \right) = 0 \quad (1 \leq j \leq N-d)$$

où λ désigne la paramétrisation de la ℓ -ième composante de \mathfrak{X} .

Utilisant l'annulation des déterminants jacobiens, la règle de Cramèr nous donne alors, pour chaque $\{i_2, \dots, i_{N-d}\} \subset \{3, \dots, N\}$, l'équation (dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, 0}$)

$$\left(\frac{\partial((f_1)_{\underline{a}, \underline{b}}, \dots, (f_{N-d})_{\underline{a}, \underline{b}})}{\partial(y, z_{i_2}, \dots, z_{i_{N-d}})} \circ \lambda \right) \cdot \left(\zeta_k - \frac{\partial \nu}{\partial b_k} \right) = 0 \quad .$$

Montrons qu'il est impossible que tous les mineurs jacobiens apparaissant dans ces équations s'annulent sur la composante de \mathfrak{X} que nous considérons. Si en effet tel était le cas, les règles de Cramèr nous montrent, au vu de la nullité des déterminants jacobiens qui s'annulent sur \mathfrak{X} , que l'espace tangent à X au point général de la ℓ -ième composante de la courbe polaire $\mathfrak{Z}(p_0)$ correspondant à notre point 0 serait contenu dans l'hyperplan $dx = 0$; en particulier, l'espace tangent à la courbe polaire elle-même serait contenu dans $dx = 0$ en ce point, ce que contredit aussitôt le Lemme de transversalité des variétés polaires (Chap. IV, 5.1). Ainsi nous avons bien, sur chaque composante de \mathfrak{X} , et donc dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, 0}$, les égalités

$$z_k = \frac{\partial \nu}{\partial b_k} \quad (3 \leq k \leq N) \quad .$$

Achevons maintenant la démonstration du Lemme-clé :

Au voisinage de tout point de $\sigma_1(V_1 - A \cup B)$, la famille de courbes planes $\mathfrak{X}_1 \rightarrow V_1$ est représentée paramétriquement par $x = t_\ell$, $y = \nu(t_\ell, \underline{a}, \underline{b})$ ($1 \leq \ell \leq r$) et est équisaturée. D'après ce que nous vu en (Chap. I, 6.4) les dérivations $\frac{\partial}{\partial b_k}$ de $\mathbb{C}\{\underline{a}, \underline{b}\}$ s'étendent en des dérivations D_k de $\overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1, p_0}} \simeq \prod_{\ell=1}^r \mathbb{C}\{t_\ell, \underline{a}, \underline{b}\}$ conservant l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1, 0}^{s(\rho_1)}$ saturé relatif, et vérifiant $D_k a_i = 0$, $D_k t_\ell = 0$. Puisque bien

sûr l'image $\prod_1^r \nu(t_\ell, \underline{a}, \underline{b})$ de y dans $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}}$ appartient au saturé relatif, nous avons ainsi prouvé les inclusions :

$$z_k \cdot \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}} \in \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}}^{s(\rho_1)} \quad (3 \leq k \leq N)$$

ce qui implique que le sous-anneau de $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}}$ engendré par $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}}$ et les $z_k \cdot \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}}$, sous-anneau qui n'est autre que $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}$, a le même saturé relatif que $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1, 0}}$, comme on le vérifie aussitôt. Nous avons donc démontré que le morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{X}_1$ qui est fini, est biméromorphe au voisinage de $\sigma(0)$, et induit un isomorphisme de saturés relatifs (à ρ_1 et $\rho = \rho_1 \circ p$). Par passage aux fibres au-dessus de 0 , on obtient donc (cf. Chap. I, 6.4.1) que le morphisme de la courbe $P_{d-1} \langle p_0 \rangle \cup Y$ sur son image par p_0 dans \mathbb{C}^2 s'étend en un isomorphisme des saturés, ce qui achève la démonstration du Lemme-clé.

Démontrons maintenant la Proposition, par l'absurde. Comme nous l'avons remarqué, il suffit de prouver que la variété polaire $P_{d-1}(X, 0)$ est vide, avec l'hypothèse : $\dim Y = 1$ et (X^0, Y) satisfait en 0 les conditions de Whitney. Choisissons une projection linéaire $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$ assez générale pour satisfaire aux conclusions du Lemme-clé ci-dessus, et choisissons une rétraction locale $\rho: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$ telle que, notant T_ρ l'application tangente à ρ en 0 , on ait l'inclusion $\text{Ker } p \subset \text{Ker } T_\rho$. D'après le Lemme-clé, on a $P_{d-1}(X, 0) = P_{d-1} \langle p \rangle$ et si cette courbe n'est pas vide, soit T une direction limite en 0 d'espace tangents à X^0 le long d'une des composantes irréductibles de cette courbe. Puisque pour chaque point $x \in P_{d-1}(X, 0) \cap X^0$, on a l'inégalité $\dim(T_{X, x} \cap \text{Ker } p) \geq d-1$, on a également l'inégalité $\dim(T \cap \text{Ker } p) \geq d(1)$. Soit ℓ une direction limite de sécantes $\overline{x_i \rho(x_i)}$ où x_i tend vers 0 le long de la même composante irréductible de $P_{d-1}(X, 0)$.

D'après le lemme-clé, ni ℓ ni $T_{Y, 0}$ n'est contenu dans $\text{Ker } p$, d'après la condition a) de Whitney, $T_{Y, 0} \subset T$, et d'après la condition b) de Whitney, $\ell \subset T$.

Il en résulte d'une part que $\dim(T \cap \text{Ker } p) = d-1$, car sinon $T \cap \text{Ker } p = T$, et on aurait $\ell \subset \text{Ker } p$ ce qui est exclu, et d'autre part les égalités :

$T = (T \cap \text{Ker } p) + \mathbb{C} \cdot T_{Y,0}$ et $T = (T \cap \text{Ker } p) + \mathbb{C} \cdot \ell$. Mais par construction de ℓ , nous avons $\ell \subset \text{Ker } T_\rho$, donc $\text{Ker } T_\rho = \text{Ker } p + \mathbb{C} \cdot \ell$, d'où l'on déduit aussitôt les égalités $\text{Ker } p + \mathbb{C} \cdot \ell + \mathbb{C} \cdot T_{Y,0} = \text{Ker } T_\rho + \text{Im } T_\rho = T_{\mathbb{C}^N,0}$, qui excluent que l'on ait l'inclusion $\ell \subset \text{Ker } p + \mathbb{C} \cdot T_{Y,0}$, et a fortiori l'inclusion $\ell \subset (T \cap \text{Ker } p) + \mathbb{C} \cdot T_{Y,0}$. Nous aboutissons donc à une contradiction, ce qui implique que $P_{d-1}(X,0)$ doit être vide, et achève la démonstration de la Proposition. ■

Remarque : On peut aussi comme dans ([Te 5]) commencer par démontrer, en utilisant la première inégalité métrique du Chapitre III, que si (X^0, Y) satisfait en 0 les conditions de Whitney, pour une projection $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ assez générale, le couple de strates $(p(X)^0, p(Y))$ satisfait en 0 les conditions de Whitney. On se ramène au cas des hypersurfaces, qui est un peu plus simple.

Terminons maintenant la preuve de l'implication iv) \Rightarrow i) du Théorème.

Montrons d'abord que nous pouvons nous ramener à prouver l'implication dans le cas particulier où $t = 1$.

D'une part, d'après la semi-continuité de la multiplicité des variétés polaires (Chap. IV, 6.1), pour chaque k , il existe un fermé analytique strict F_k d'un voisinage de 0 dans Y tel que, pour $y \in F_k$, $m_y(P_k(X, y))$ soit strictement supérieur à la valeur $m_{y'}(P_k(X, y'))$ pour $y' \in Y - F_k$, cette dernière ("multiplicité générique") étant indépendante de $y' \in Y - F_k$. D'autre part, d'après (Chap. IV, 5.4.2) et le lemme de transversalité des variétés polaires (Chap. IV, 5.2.1 et 5.4.3) pour tout couple j, k d'entiers tels que $j+k \leq d-1$ et tout plan D_j de codimension j dans \mathbb{C}^N assez général, passant par 0, on a égalité

$P_k(X, 0) \hat{\cap} D_j = P_k([X \cap D_j], 0)$ et $m_o(P_k([X \cap D_j], 0)) = m_o(P_k(X, 0))$. Or puisque d'après

la Proposition et (Chap. IV, 6.1), les variétés polaires $P_k(X, 0)$ sont vides

pour $k \geq d-t$, nous ne perdons aucune information en coupant X par un plan D_{t-1} de codimension $t-1$ général, qui aura en particulier la propriété que pour tout

k , $|D_{t-1} \cap F_k|$ est soit vide (si F_k l'est) soit réduit à $\{0\}$. D'après (Chap. III,

4.2.2), le couple de strates $((X \cap D_{t-1})^0, Y \cap D_{t-1})$ satisfera encore les conditions de Whitney en 0, et les variétés polaires de X seront équivariantes le

long de Y si et seulement si les variétés polaires de $[X \cap D_{t-1}]$ sont équi-
multiples le long de $Y \cap D_{t-1}$, qui est non-singulier de dimension 1, puisque
les multiplicité des variétés polaires $P_k(X, 0)$ de X sont nulles pour $k \geq d-t$,
et égales à celles de $(X \cap D_{t-1})_{\text{red}}$ pour $k < d-t$. ■

Plaçons-nous donc dans le cas où $t = 1$. Nous allons terminer la démonstration
par récurrence sur d ; si $d = 1$, Y est une des composantes irréductibles
de la courbe X , et nous allons voir que si $X \neq Y$, les conditions de Whitney pro-
voquent une contradiction. Soit en effet Γ une composante de X distincte de Y ,
et soit T la limite de long de Γ des tangentes à Γ . Soit $\rho : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$ une
rétraction locale, et soit ℓ la limite le long de Γ des sécantes $\overline{x \rho(x)}$: la
condition a) implique que $T = T_{Y,0}$ alors que la condition b) implique que $T = \ell$,
ce qui est impossible puisque $\ell \subset \text{Ker } T_\rho$ qui est un supplémentaire de $T_{Y,0}$.
Examinons maintenant (par curiosité) le cas où $d = 2$. Dans ce cas, la Proposi-
tion nous fournit le fait que $P_1(X) = \emptyset$, c'est-à-dire l'équimultiplicité de
 $P_1(X, Y)$ le long de Y , ou encore le fait que la dimension de la fibre $\kappa^{-1}(0)$ du
morphisme conormal $\kappa : C(X) \rightarrow X$ est $\leq N-3$. Il nous reste à prouver que X est
équimultiple le long de Y : D'après le Lemme 5.1.1, il existe un ouvert de
Zariski dense V de l'espace \mathbb{P}^{N-2} des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant $T_{Y,0}$ tel
que, pour $H \in V$, H ne contienne aucune limite en 0 d'espaces tangents à X . Nous
allons montrer que pour tout $H \in V$, on a $|H \cap X| = Y$, ce qui prouvera l'équimul-
tiplicité, d'après (Chap. I, 5.5). Supposons le contraire, et soit Γ une com-
posante irréductible, distincte de Y , de la courbe $|H \cap X|$; soit
 $\rho : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$ une rétraction locale, posons $T = \lim_{\substack{x \in X^0 \cap \Gamma \\ x \rightarrow 0}} T_{X,x}$ et
 $\ell = \lim_{\substack{x \in X^0 \cap \Gamma \\ x \rightarrow 0}} \overline{x \rho(x)}$. D'après la condition a) de Whitney, T contient $T_{Y,0}$, et
comme $T \cap H$ est de dimension 1, il faut que $T \cap H = T_{Y,0}$, mais d'après la condi-
tion b) de Whitney, ℓ appartient aussi à $T \cap H$, d'où une contradiction puisque
 $\ell \subset \text{Ker } T_\rho$, et que ce dernier est supplémentaire de $T_{Y,0}$. Il faut donc que
l'on aie l'égalité $|H \cap X| = Y$.

Supposons maintenant le résultat iv) \Rightarrow i) démontré pour les espaces de
dimension au plus $d-1$, où $d = \dim X$.

Pour notre espace X , la Proposition 1.2.1 nous fournit l'inégalité $\dim \kappa^{-1}(0) \leq N-3$ et par conséquent $U = \mathbb{P}^{N-2} - \kappa^{-1}(0)$ est un ouvert de Zariski dense de l'espace projectif \mathbb{P}^{N-2} des hyperplans de \mathbb{C}^N contenant $T_{Y,0}$ tel que tout $H \in U$ soit transverse à toutes les limites en 0 d'espaces tangents à X^0 . Il nous faut montrer que les multiplicités $m_y(P_k(X,y))$ sont constantes sur Y au voisinage de 0 pour $0 \leq k \leq d-2$, puisque nous savons déjà que $m_0(P_{d-1}(X,0)) = 0$. D'après (Chap. IV, 5.4.3), il existe un ouvert de Zariski dense de couples (D_{d-k+1}, H) tels que $D_{d-k+1} \subset H = H_0 \times T_{Y,0}$, que $P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle$ ait la multiplicité de la variété polaire générique, et que l'on ait

$P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle^{\hat{H}} = P_k \langle ([X \cap H], 0); D_{d-k+1} \rangle$ pourvu que $k \leq d-2$. On peut supposer D_{d-k+1} général dans H , et donc $P_k \langle [X \cap H], 0 \rangle; D_{d-k+1} \rangle = P_k \langle [X \cap H], 0 \rangle$ et par ailleurs puisque H est transverse aux limites en 0 d'espaces tangents à X , le couple $([X \cap H]^0, Y)$ satisfait les conditions de Whitney. Par l'hypothèse de récurrence, $P_k \langle [X \cap H]; D_{d-k+1} \rangle$ est équimultiple le long de Y au voisinage de 0 (cf. Remarque 1.1.2 plus haut). D'après (Chap. IV, 5.2.1 et 5.4.3) on a $m_y(P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle) = m_y(P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle^{\hat{H}})$ pour $y \in Y$ et donc pour $k < d-2$, $P_k \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle$ est équimultiple au voisinage de 0. Il nous reste à prouver que $P_{d-2} \langle (X,0); D_3 \rangle$ est équimultiple le long de Y au voisinage de 0 pour presque tout D_3 . Pour cela, il suffit (Chap. I, 5.5) de prouver que l'on a $|P_{d-2} \langle (X,0); D_3 \rangle \cap H| = Y$ pour presque tout hyperplan H contenant Y , et en fait (cf. la preuve de loc. cit.) il suffit que cette égalité ait lieu pour un hyperplan H tel qu'il existe une projection linéaire $\rho: \mathbb{C}^N \rightarrow Y$ telle que pour tout $y \in Y - \{0\}$ voisin de 0, $\rho^{-1}(y) \cap H$ soit transverse à $\rho^{-1}(y) \cap P_{d-2} \langle (X,0); D_{d-k+1} \rangle$ en y . Or, d'après (Chap. IV, 5.2.1) il existe un ouvert de Zariski dense W_{d-2} dans la grassmannienne des plans de codimension 2 dans \mathbb{C}^N tel que pour $D_2 \in W_{d-2}$, on ait, pour $y \in Y - \{0\}$, $|D_2 \cap C_y(P_{d-2} \langle (X,y); D_{d-k+1} \rangle)| = \{0\}$, et nous pouvons supposer $D_3 \subset D_2$. Posons $H = D_2 \times Y$, et choisissons D_2 de telle façon que H ne contienne aucune limite en 0 d'espaces tangents à X^0 . Soit $\rho: \mathbb{C}^N \rightarrow Y$ une projection telle que $\text{Ker } \rho \supset D_2$.

Puisque $D_3 \subset D_2$, on a $P_{d-2} \langle (X,0); D_3 \rangle \cap H \cap X^0 = P_{d-2} \langle ([X \cap H], 0); D_3 \rangle \cap X^0$

mais puisque $([X \cap H]^0, Y)$ satisfait les conditions de Whitney, la courbe polaire de $[X \cap H]$ en 0 est vide, donc le terme de droite est vide. Nous avons donc un ouvert de Zariski W'_{d-2} tel que pour $D_2 \in W'_{d-2}$, on ait

$$P_{d-2} \langle (X, 0); D_3 \rangle \cap (D_2 \times Y) \cap X^0 = \emptyset .$$

Puisque l'ensemble $(\text{Sing } X) \cap P_{d-2} \langle (X, 0); D_3 \rangle$ est de dimension ≤ 1 (Chap. IV, 1.3) et que D_3 ne rencontre son cône tangent qu'en $\{0\}$ (Chap. IV, 5.1), il est possible de choisir $D_2 \supset D_3$ de telle façon que

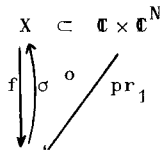
$P_{d-2} \langle (X, 0); D_3 \rangle \cap (D_2 \times Y) \cap \text{Sing } X \subset Y$, et par conséquent

$P_{d-2} \langle (X, 0); D_3 \rangle \cap (D_2 \times Y) \cap X^0 = \emptyset$ implique que $|P_{d-2} \langle (X, 0); D_3 \rangle \cap (D_2 \times Y)| = Y$, ce qu'il fallait démontrer.

1.3 Remarque : En chemin, nous avons vu que si (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en $0 \in Y$, pour tout plongement local $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ et toute hypersurface non-singulière $H \subset \mathbb{C}^N$ contenant Y et assez générale, le couple $([X \cap H]^0, Y)$ satisfait encore les conditions de Whitney. Ceci répond affirmativement à une question de [Te 11], à laquelle V. Navarro avait déjà apporté une réponse affirmative dans le cas particulier où $\dim Y = 1$ (cf. [Na 1]).

§ 2. Version relative.

2.1 Théorème : Soit $f : (X, 0) \xrightarrow{\sigma} (\mathbb{C}, 0)$ un morphisme muni d'une section σ , dont toutes les fibres sont réduites et purement de dimension d . Posons $Y = \sigma(\mathbb{C}) \subset X$ et supposons donné un \mathbb{C} -plongement local :



tel que $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) L'hyperplan $K = 0 \times \mathbb{C}^N$ est transverse à toutes les limites en 0 d'espaces tangents à X^0 et l'application $Y \rightarrow \mathbb{N}^{d+1}$ définie par $y \rightarrow (m_y(X), m_y(P_1(f, y)), \dots, m_y(P_d(f, y)))$ est constante sur Y au voisinage de 0.
- ii) Le couple de strates (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en 0

(resp. les conditions de Whitney strictes au voisinage de 0, comme en 1.2, ii)).

Prouvons i) \Rightarrow ii). Soit $\kappa_f : C_f(X) \rightarrow X$ le morphisme conormal associé à f est au plongement local $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$. Puisque $\dim \kappa_f^{-1}(Y) < \dim C_f(X)$, on a $\dim \kappa_f^{-1}(Y) \leq N-1$ et donc pour $Y \in Y - \{0\}$ assez proche de 0, $\dim \kappa_f^{-1}(y) \leq N-2$, donc (cf. Chap. IV, 6.1) $P_d(f, y) = \emptyset$. Par l'hypothèse d'équimultiplicité, on a donc $P_d(f, 0) = \emptyset$ d'où $\dim \kappa_f^{-1}(0) \leq N-2$. Ainsi il existe un ouvert de Zariski dense $U = \mathbb{P}^{N-1} - \kappa_f^{-1}(0)$ de l'espace \mathbb{P}^{N-1} des hyperplans de \mathbb{C}^N tel que tout $H_0 \in U$ soit transverse à toutes les limites en 0 d'espaces tangents aux fibres de f . Montrons d'abord que les hypothèses impliquent $P_d(X, 0) = \emptyset$. Considérons le morphisme conormal absolu

$$\begin{array}{ccc}
 & & \check{\mathbb{P}}^N \\
 & \nearrow \lambda & \uparrow \\
 C(X) & \hookrightarrow & X \times \check{\mathbb{P}}^N \\
 \downarrow \kappa & & \\
 X & \subset & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N
 \end{array}$$

D'après (Chap. IV, § 4) il nous faut montrer que $\lambda^{-1}(L^1) = \emptyset$, où L^1 est une droite projective de $\check{\mathbb{P}}^N$ assez générale pour être transverse à toutes les strates d'une certaine stratification de $\kappa^{-1}(0)$. Or l'hypothèse implique que le point $K \in \check{\mathbb{P}}^N$ correspondant à l'hyperplan $0 \times \mathbb{C}^N$ n'est pas contenu dans $\kappa^{-1}(0)$. Par conséquent une droite L^1 de $\check{\mathbb{P}}^N$ contenant K et au demeurant assez générale sera transverse aux strates d'une stratification donnée de $\kappa^{-1}(0)$. Cela signifie que nous pouvons calculer $P_d(X, 0)$ comme $P_d\langle(X, 0); D_2\rangle$ où D_2 est un plan de codimension 2 de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ contenu dans $0 \times \mathbb{C}^N$. Or si $P_d\langle(X, 0); D_2\rangle$ n'était pas vide, il existerait un chemin analytique $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, 0)$, tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset X^0$ et que en tout point $x(t) \in h(\mathbb{D} - \{0\})$ on ait

$$\dim(T_{X, x(t)} \cap D_2) \geq d-1 .$$

Mais puisque $K = 0 \times \mathbb{C}^N$ n'est pas limite d'espaces tangents à X , et que $D_2 \subset 0 \times \mathbb{C}^N$, ceci équivaut à

$$\dim(T_{X, x(t)} \cap K \cap D_2) \geq d-1, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\dim(T_{f^{-1}(f(x(t)))} \cap D_2) \geq d-1 \quad (\text{et } x(t) \text{ non critique pour } f)$$

ce qui implique, puisque D_2 est général, $P_d(f, 0) \neq \emptyset$ contrairement à l'hypothèse. D'après (Chap. IV, 6.1) nous avons donc

$$\dim \kappa^{-1}(0) \leq N-2$$

ce qui implique que l'ensemble $V = \sum \mathbb{P}^{N-1} - \kappa^{-1}(0)$ des hyperplans de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ contenant $\mathbb{C} \times \{0\}$ et transverses aux limites en 0 d'espaces tangents à X^0 est un ouvert de Zariski dense.

Montrons maintenant que pour un hyperplan assez général $D_2 = H_0 \subset \mathbb{C}^N$ (de codimension 2 dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$), posant $H = \mathbb{C} \times H_0$, l'espace $[X \cap H] = (X \cap H)_{\text{red}}$, satisfait encore les hypothèses de i) le long de $\mathbb{C} \times \{0\}$. Du fait que H et K sont transverses aux limites en 0 d'espaces tangents à X^0 , et que H_0 est transverse aux limites d'espaces tangents aux fibres de f , on déduit que $0 \times H_0$ est transverse aux limites en 0 d'espaces tangents à $[X \cap H]^0$. En effet une telle limite peut s'écrire $T \cap H$ où T est une limite en 0 d'espaces tangents à X^0 . Puisque K est transverse à T , $T \cap K$ est une limite d'espaces tangents aux fibres de f , donc on a $\dim(T \cap K \cap H_0) = \dim(T \cap H_0) \leq d-1$. Par contre si H_0 contenait $T \cap H$ on aurait $\dim(T \cap H_0) = d$, d'où la contradiction voulue. Les variétés polaires $P_k(f|_{[X \cap H]}, y)$ sont équi multiples le long de Y pour $0 \leq k \leq d-1$ d'après (Chap. IV, 5.4.3), et d'après le même résultat, l'on a $P_k([X \cap H], 0) = P_k(X, 0) \cap H$ pour $0 \leq k \leq d-1$, et les multiplicités sont préservées. Il nous suffit maintenant de prouver par récurrence sur d que l'on a l'égalité

$$m_0(P_k(f, 0)) = m_0(P_k(X, 0)) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq d.$$

Si $d = 1$, d'après ce que nous venons de voir, nous avons $P_0(f, 0) = P_0(X, 0)$ et $P_1(f, 0) = P_1(X, 0) = \emptyset$ d'où le résultat. Supposons l'avoir prouvé pour les morphismes dont les fibres sont de dimension $\leq d-1$. D'après ce que nous venons de voir, nous avons

$$m_0(P_k(f, 0)) = m_0(P_k(f|_{[X \cap H]}, 0)) = m_0(P_k([X \cap H], 0)) = m_0(P_k(X, 0))$$

pour $0 \leq k \leq d-1$, la seconde égalité venant de l'hypothèse de récurrence, et

$$P_d(X, 0) = P_d(f, 0) = \emptyset \text{ d'après ce que nous avons vu au début.}$$

L'espace X satisfait donc l'hypothèse i) du Théorème 5.2, d'où ii) d'après le Théorème.

Prouvons ii) \Rightarrow i). La condition a) de Whitney implique aussitôt que toute limite en 0 d'espaces tangents à X^0 est transverse à K . Par le même argument que plus haut on peut calculer $P_k(X, 0)$ comme $P_k\langle X, 0; D_{d-k+1} \rangle$ avec $D_{d-k+1} \subset K$, et pour $D_{d-k+1} \subset K$ assez général, on a l'égalité $P_k\langle f; D_{d-k+1} \rangle = P_k\langle X; D_{d-k+1} \rangle$ comme on le vérifie aussitôt, d'où le résultat, puisque d'après le Théorème 5.2, les $P_k\langle X, D_{d-k+1} \rangle$ sont équimultiples le long de Y . ■

*
* *

C H A P I T R E V I

CONSEQUENCES

Introduction. Dans ce chapitre, j'indique brièvement quelques-unes des conséquences des résultats du chapitre précédent. La plus importante me semble être la "réciproque du théorème de Thom-Mather".

§ 1. Exemples.1.1 Le cas des familles d'hypersurfaces à singularité isolée.

Soit $F(y, z_1, \dots, z_{d+1}) = 0$ une équation pour une hypersurface $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1}$ telle que chacune des fibres $X(y) = (\{y\} \times \mathbb{C}^{d+1}) \cap X$ soit une hypersurface à singularité isolée en 0. Soit $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^{d+1}$ un sous-espace vectoriel de codimension $d-k+1$. Choisissons les coordonnées de façon qu'il soit défini par $z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$. Notons $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ la projection induite par $\text{pr}_1: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ et σ la section qui pique 0 dans chaque fibre. L'hypothèse implique que $(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}}) \supset (z_1, \dots, z_{d+1})^N$ pour N assez grand, et que $(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}})$ définit un sous-espace de codimension $d+1$ de \mathbb{C}^{d+2} , donc est une suite régulière. Pour un choix assez général de D_{d-k+1} , on vérifie d'après (Chap. IV, 1.3) que la variété polaire relative $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$ pour $0 \leq k \leq d-1$ est le sous-espace de X défini dans \mathbb{C}^{d+1} par l'idéal engendré par $(F, \frac{\partial F}{\partial z_{d-k+2}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}})$. Pour la même raison que plus haut, si $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle \neq \emptyset$, ce système de générateurs est une suite régulière. Pour $k = d$, la variété polaire relative est la réunion des composantes irréductibles de la courbe Γ définie par l'idéal $(F, \frac{\partial F}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}})$ qui ne sont pas contenues dans $\mathbb{C} \times \{0\}$. Aucune de ces composantes irréductibles ne peut être contenue dans l'hyperplan $0 \times \mathbb{C}^{d+1}$.

Si tel était le cas, on aurait en effet un arc analytique $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X(0), 0)$, non constant et tel qu'en un point général x de son image $T_{X(0), x} \subset D_1$, où D_1 est un hyperplan général de \mathbb{C}^{d+1} ; on vérifie cela en utilisant le fait que $F(0, z_1, \dots, z_{d+1}) = 0$ est à singularité isolée. Or un hyperplan général de \mathbb{C}^{d+1} ne peut être limite d'espaces tangents à $X(0)^0$, puisque la fibre de la modification de Nash de $X(0)$ est de dimension $\leq d-1$. Par conséquent la suite $(F, \frac{\partial F}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}}, y)$ est encore une suite régulière, et le morphisme $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ induit par y est un morphisme fini et plat, et la somme des longueurs d'anneaux artiniens

$$\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(y), x})$$

est indépendante de $y \in \mathbb{C}$.

D'après [Te 1, Chap. II], pour $x \in \varphi^{-1}(y) \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(y), x}) = \mu^{(d+1)}(X(y)) + \mu^{(d)}(X(y))$$

où $\mu^{(i)}(X(y))$ est le nombre de Milnor en 0 de l'intersection de $X(y)$ avec un plan de dimension i assez général de $\mathbb{C}^{d+1} \simeq \{y\} \times \mathbb{C}^{d+1}$ passant par 0. Par différence il vient

$$m_0(P_d(f; 0)) = \mu^{(d+1)}(X(0)) + \mu^{(d)}(X(0)) - (\mu^{(d+1)}(X(y)) + \mu^{(d)}(X(y)))$$

pour $y \neq 0$ assez petit.

Un argument analogue permet de vérifier que pour $y \in \mathbb{D}$ on a, en notant \underline{y} le point $\{y\} \times 0$ de $\mathbb{C} \times \{0\}$

$$m_{\underline{y}}(P_k(f; 0)) = \mu^{(k+1)}(X(y)) + \mu^{(k)}(X(y)) .$$

On voit que dans ce cas particulier le Théorème 2.1 du Chapitre V signifie que l'on a équivalence entre

1) La suite $\mu_y^* = (\mu^{(d+1)}(X(y)), \dots, \mu^{(0)}(X(y)))$ est indépendante de $y \in \mathbb{C}$ au voisinage de 0.

2) Le couple $(X^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfait les conditions de Whitney en 0 (resp. les conditions de Whitney strictes au voisinage de 0).

1.2 Le cas d'une famille de courbes où la dimension de plongement saute.

Considérons la surface $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$ définie par les deux équations

$$F_1 = z_2^2 - z_1^3 + yz_3 = 0$$

$$F_2 = z_3^2 - z_1^5 z_2 = 0 \quad .$$

Soit $f: X \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}$ le morphisme induit par la projection $\text{pr}_1: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ et soit σ la section définie par $\sigma(y) = (y, 0, 0, 0)$.

La fibre $X(0)$ est la courbe monomiale donnée paramétriquement par $z_1 = t^4$, $z_2 = t^6$, $z_3 = t^{13}$, alors que pour tout $y \neq 0$, la fibre $X(y)$ est isomorphe à la courbe plane d'équation $(z_2^2 - z_1^3)^2 - z_1^5 z_2 = 0$ qui a deux exposants caractéristiques de Puiseux ($3/2$ et $7/4$). Il est clair que X est équimultiple de multiplicité 4 le long de $\mathbb{C} \times \{0\}$. Le lecteur est prié de vérifier que la courbe polaire $P_1(X, 0)$ est vide. Par conséquent le couple $(X^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfait les conditions de Whitney, bien que la dimension de plongement des fibres saute pour $t = 0$.

1.2.1 Remarque : La théorie d'où est tiré cet exemple se trouve dans l'appendice à [Z 2]. On pourrait aussi, au vu de (Loc. cit.) vérifier que (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en utilisant (Chap. III, Prop. 5.2.3). Le lecteur pourra vérifier qu'une résolution simultanée forte des singularités de X est décrite par : $z_1 = t^4$, $z_2 = t^6 - \frac{y}{2} t^7 + \frac{y^2}{16} t^{16} + \dots$, $z_3 = t^{13} - \frac{y}{4} t^{15} + \dots$

§ 2. Réponse à une question de Zariski.

Dans ([Z 3], § 3, Question C) Zariski demande si, étant donné deux sous-espaces X et Y d'un espace analytique non-singulier Z , l'ensemble $B(X, Y)$ des

points $y \in Y$ en lesquels le couple (X^0, Y) ne satisfait pas les conditions de Whitney est un sous-ensemble analytique fermé de Y . (En fait Zariski étudie le cas où X est une hypersurface, et il avait prouvé que la réponse est affirmative si $\dim X = \dim Y + 1$.)

2.1 Proposition : Etant donné un sous-ensemble analytique fermé Y d'un espace analytique réduit équidimensionnel X , l'ensemble $B(X, Y)$ des points $y \in Y$ en lesquels le couple (X^0, Y) ne satisfait pas les conditions de Whitney est un sous-ensemble analytique fermé rare de Y .

Démonstration : Décomposant Y en composantes irréductibles, on voit que l'on peut supposer Y équidimensionnel. La question est locale sur Y . On peut donc choisir un plongement local $X \subset \mathbb{C}^N$ et considérer le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 E_Y C(X) & \xrightarrow{\tilde{e}_Y} & C(X) \\
 \kappa'_Y \downarrow & \searrow \zeta & \downarrow \kappa \\
 E_Y X & \xrightarrow{e_Y} & X \subset \mathbb{C}^N
 \end{array}$$

où κ est le morphisme conormal, c_Y l'éclatement de Y dans X et κ'_Y le morphisme transformé strict de κ par e_Y .

D'après l'existence de stratifications par l'équidimensionnalité des fibres (cf. [Le-T 2]) l'ensemble $C(X, Y) = \{z \in \zeta^{-1}(Y) / \dim_z \zeta^{-1}(\zeta(z)) > N - 2 - \dim Y\}$ est un sous-ensemble analytique fermé de $E_Y C(X)$. Puisque le morphisme ζ est propre, son image $\zeta(C(X, Y))$ est un sous-ensemble analytique fermé de Y , rare dans Y puisque $\dim \zeta^{-1}(Y) = N - 2$. D'après (Chap. V, 1.2) l'ensemble $B(X, Y)$ des points où (X^0, Y) ne satisfait pas les conditions de Whitney est :

$$B(X, Y) = (\text{Sing } Y) \cup \zeta(C(X, Y))$$

d'où le résultat. ■

Remarque : Dans le cas où X est une hypersurface et Y son lieu singulier, supposé non singulier, une réponse affirmative avait été donnée dans [B-H-S].

§ 3. La stratification de Whitney canonique d'un espace analytique.

Rappelons la construction de [Lê-Te 1, 6.1.5] (voir aussi Chap. III, § 3). Notons comme en (Chap. IV, 3.2) $M_{X,x}^*$ la suite $(m_x(X), m_x(P_1(X,x)), \dots, m_x(P_{d-1}(X,x)))$ des multiplicités des variétés polaires associées au germe (X,x) .

Etant donné un espace analytique complexe réduit localement équidimensionnel X définissons par récurrence une filtration de X par des sous-espaces analytiques fermés :

$$X = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_k \supset \dots$$

comme ceci :

$F_0 = X$; soit $X = \cup F_{0,j}$ la décomposition de X en composantes irréductibles
 $F_1 = \cup_j \{x \in F_{0,j} / M_{X,x}^* \text{ ne prend pas la valeur qu'il prend en un point général de } F_{0,j}\}$.

Notons que cette valeur est $(1,0,0,\dots,0)$ avec $\dim F_{0,j} - 1$ zéros et que

$$F_1 = \text{Sing } X.$$

Supposons avoir défini F_0, F_1, \dots, F_{k-1} , et définissons F_k :

$F_k = \bigcup_{0 \leq i \leq k-2} B(F_i, F_{k-1})$ avec la notation introduite au § 2 ci-dessus, et l'on

vérifie au moyen de (Chap. V, 1.2) que l'on peut aussi définir F_k comme ceci :

soit $F_{k-1} = \cup F_{k-1, j_{k-1}}$ la décomposition de F_{k-1} en ses composantes irréductibles ;

F_k est la réunion du lieu singulier de F_{k-1} et des sous-ensembles analytiques

fermés en nombre fini définis comme suit: $\{x \in F_{k-1, j_{k-1}} / \text{l'une des suites}$

$M_{X,x}^*, M_{F_1, j_1, x}^*, \dots, M_{F_{k-2}, j_{k-2}, x}^* \text{ ne prend pas en } x \text{ la valeur qu'elle prend en un point général de } F_{k-1, j_{k-1}}\}$.

D'après (Chap. V, 1.2) on a donc :

3.1 Proposition-Définition : La réunion des composantes connexes des $F_j - F_{j+1}$ ($0 \leq j$) est une stratification de Whitney de X , appelée stratification de Whitney canonique de X .

Il suffit de remarquer que puisque F_{k+1} est rare dans F_k , la filtration stationne localement, et en fait globalement si X est de dimension bornée, et les composantes connexes des $F_j - F_{j+1}$ sont bien des sous-ensembles analytiques non-singuliers constructibles dans X .

3.2 Proposition : Etant donné une stratification de Whitney quelconque $X = \cup X_\alpha$ de X , chacun des fermés F_i définis plus haut est réunion de strates X_α .

Démonstration : On peut supposer les X_α connexes. Remarquons d'abord que si un fermé $F \subset X$ est réunion de strates d'une stratification de Whitney (X_α), chaque composante irréductible de F est aussi réunion de strates. En effet chaque composante de F contient une strate X_α qui est dense dans cette composante, et donc si la strate X_β rencontre cette composante, elle rencontre l'adhérence de X_α , et donc est dedans, d'après la condition de frontière. L'espace entier $X = F_0$ est réunion de strates. Supposons, par récurrence, avoir montré que F_k est réunion de strates pour $k < i_0$ et montrons que F_{i_0} est réunion de strates. Pour cela, il suffit de prouver que si $X_\alpha \cap F_{i_0} \neq \emptyset$, on a $X_\alpha \subset F_{i_0}$. Or si $X_\alpha \cap F_{i_0} \neq \emptyset$, d'après l'hypothèse de récurrence, X_α est une strate d'une stratification de Whitney de chaque F_k , $k < i_0$, et même de chaque composante irréductible F_{k,j_k} de F_k qui le contient, puisque X_α est connexe. Supposons d'abord que $X_\alpha \cap \text{Sing}(F_{i_0-1}) \neq \emptyset$. Si X_α n'est pas tout entier contenu dans $\text{Sing}(F_{i_0-1}) \subset F_{i_0}$, la fonction $M_{F_{i_0-1,j}}$ de la composante irréductible $F_{i_0-1,j}$ de F_{i_0-1} qui contient X_α ne saurait être constante le long de X_α , contrairement à l'hypothèse selon laquelle X_α est une strate de $F_{i_0-1,j}$. Nous pouvons donc supposer que $X_\alpha \cap \text{Sing}(F_{i_0-1}) = \emptyset$. Par conséquent si $X_\alpha \cap F_{i_0} \neq \emptyset$, par définition de F_{i_0} , cela signifie que pour un $k < i_0$, la fonction $M_{F_{k,j_k}}^*$ d'une composante irréductible F_{k,j_k} de F_k ne prend pas en $x_0 \in X_\alpha \cap F_{i_0}$ la valeur qu'elle prend en un point général d'une composante $F_{i_0-1,j}$. En particulier

$x_\alpha \in F_{k, j_k}$ par semi-continuité (cf. Chap. IV, 6.1) et donc $X_\alpha \subset F_{k, j_k}$ d'après la remarque. Si la valeur que prend la fonction $M_{F_{k, j_k}}^*$ en un point général de X_α est égale à celle qu'elle prend en un point général de $F_{i_0-1, j}$, nous obtenons aussitôt une contradiction si $X_\alpha \not\subset F_{i_0}$ puisque $M_{F_{k, j_k}}^*$ doit être constante le long de X_α . Sinon, on a l'inclusion $X_\alpha \subset F_{k+1}$, donc la fonction $M_{F_{k+1, j_{k+1}}}^*$ doit être constante le long de X_α , où $F_{k+1, j_{k+1}}$ est la composante irréductible de F_{k+1} qui contient X_α . On répète l'argument ci-dessus, ce que l'on peut faire tant que $k \leq i_0 - 1$, et l'on prouve ainsi finalement l'inclusion $X_\alpha \subset F_{i_0}$. ■

Remarque : Cela signifie que la stratification canonique est minimale parmi toutes les stratifications de Whitney de X .

Remarque : Le concept de stratification de Whitney canonique a été introduit par J. Mather (cf. [Ma], § 4) : il construit une stratification canonique, par un procédé dont celui décrit ici est un avatar, et montre que toute stratification de Whitney moins fine que la stratification canonique coïncide avec elle. On vient de voir, dans le cas analytique complexe, un résultat beaucoup plus précis : toute stratification de Whitney est plus fine que la stratification canonique.

§ 4. Réciproque du théorème de Thom-Mather (Tout ce paragraphe présente un travail en collaboration avec Lê D.T.).

D'abord quelques rappels :

4.1 Proposition ([Lê-Te], Prop. 6.1.8) : Soient X un espace analytique réduit, purement de dimension d , et $X = \cup X_\alpha$ une stratification de Whitney de X . Soient $x \in X_\alpha$ et $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, x)$ un plongement local de X au voisinage de x . Pour chaque entier $i \geq d_\alpha$, où $d_\alpha = \dim X_\alpha$, il existe un ouvert de Zariski dense W de la grassmannienne des plans de codimension i de \mathbb{C}^N , et pour chaque $L_\alpha \in W$ un nombre réel $\eta > 0$ et un ouvert dense U de la boule de centre x et de rayon η dans \mathbb{C}^N , un nombre réel $\varepsilon \ll \eta$ tels que, notant \mathbb{B}_ε la boule de centre x et

de rayon ε dans \mathbb{C}^N , on ait : pour $t \in U$, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X \cap (L_0 + t) \cap B_\varepsilon)$ ne dépend que de (X, X_α) . On la notera $\chi_{i-d_\alpha}(X, X_\alpha)$. (Ici $L_0 + t$ représente un plan parallèle à la direction L_0 , passant par le point t

4.2 Théorème ([Lê-Te], Th. 6.1.9) : Soit $X = \cup X_\alpha$ une stratification de Whitney de X , et soit X_α la strate contenant $x \in X$. On a l'égalité

$$\chi_1(X, X_\alpha) - \chi_2(X, X_\alpha) = \sum_{\beta \neq \alpha} (-1)^{d_\beta - d_\alpha - 1} m_x(P_{d_\beta - d_\alpha - 1}(\bar{X}_\beta, x))(1 - \chi_1(X, X_\beta)) .$$

Remarques : 1) Dans (Loc. cit.) ce théorème est énoncé pour la stratification canonique. La preuve vaut en fait pour n'importe quelle stratification de Whitney.

2) Le cas particulier $i = d_\alpha + 1$ de la construction de 4.1, c'est-à-dire l'intersection $X \cap (L_0 + t) \cap B_\varepsilon$ avec $\text{codim } L_0 = \dim X_\alpha + 1$ est ce que Goresky et MacPherson appellent le "complex link" de (X, X_α) , objet important dans leur théorie de Morse sur les espaces singuliers, (cf. [G-M]).

3) Le Théorème 4.2 est la généralisation des formules de ([Te 1], Chap. I et II et [Te 12]) exprimant la multiplicité des variétés polaires relatives d'une hypersurface à singularité isolée $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ en fonction de la suite μ^* des nombres de Milnor (cf. [Mi]) des sections planes générales de X par des plans généraux passant par 0. ($\mu^{(i)} = \mu(X \cap H^i, 0)$ où $\dim H^i = i$). Soit $f : (\mathbb{C}^{d+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un morphisme dont $(X, 0)$ est la fibre. On a

$$P_k(X, 0) = P_k(f, 0) \cap X \quad \text{pour } 0 \leq k \leq d-1$$

et dans (Loc. cit.) on prouve :

$$m_0(P_k(X, 0)) = \mu^{(k+1)}(X, 0) + \mu^{(k)}(X, 0) .$$

Par ailleurs, en adaptant ([Mi]) on prouve que

$$\chi_i(X, \{0\}) = 1 + (-1)^{d-i} \mu^{(d+1-i)}(X, 0) \quad (\text{avec les notations de 4.1})$$

ce qui vérifie bien le Théorème 4.2 dans ce cas, avec $X_\alpha = \{0\}$, $X_\beta = X - \{0\}$.

4.3 Rappelons maintenant le Théorème de Thom-Mather.

4.3.1 Théorème (Thom-Mather dans le cas particulier des espaces analytiques complexes (cf. [Th], [Ma]) : Soit $X = \cup X_\alpha$ un espace analytique muni d'une stratification de Whitney. Pour tout point $x \in X_\alpha$, tout plongement local $X \subset \mathbb{C}^N$ au voisinage de x , toute rétraction locale $\rho: \mathbb{C}^N \rightarrow X_\alpha$, il existe un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{C}^N tel que, en posant $V = U \cap X_\alpha$ on ait : il existe un homéomorphisme compatible avec ρ et

$$\begin{array}{ccc} X \cap U & \simeq & (\rho^{-1}(x) \cap X \cap U) \times V \\ \rho|_{X \cap U} \searrow & & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & V \end{array}$$

induisant pour chaque \bar{X}_β contenant X_α un homéomorphisme analogue

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_\beta \cap U & \simeq & (\rho^{-1}(x) \cap \bar{X}_\beta \cap U) \times V \\ \rho|_{\bar{X}_\beta \cap U} \searrow & & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & V \end{array}$$

Remarquons maintenant que d'après (Chap. V, 1.2) on a, en posant $d_\alpha = \dim X_\alpha$

4.3.2 Proposition : Si (X_β, X_α) satisfait les conditions de Whitney, pour tout plongement local $(\bar{X}_\beta, x) \subset (\mathbb{C}^N, x)$ au voisinage de $x \in X_\alpha \subset \bar{X}_\beta$, il existe un ouvert de Zariski dense N de l'espace des drapeaux

$$\mathcal{B} : T_{X_\alpha, x} \subset D_{N-d_\alpha-1} \subset D_{N-d_\alpha-2} \subset \dots \subset D_0 = \mathbb{C}^N$$

d'espaces vectoriels contenant $T_{X_\alpha, x}$ tel que pour $\mathcal{B} \in W$ et tout sous-espace non-singulier H_i de codimension i contenant X_α et tel que $T_{H, x} = D_i$, on ait :

le couple de strates $([X_\beta \cap H_i]^0, Y)$ satisfait les conditions de Whitney.

En aboutant 4.3.2 à 4.3.1, on voit que l'on peut renforcer le théorème de Thom-Mather : Si (X_α) est une stratification de Whitney, non seulement chaque \bar{X}_β est localement topologiquement trivial le long de X_α , au sens de 4.3.1, mais encore pour tout sous-espace non-singulier assez général H_i contenant X_α , l'intersection $\bar{X}_\beta \cap H_i$ est aussi localement topologiquement triviale le long de X_α . C'est cet énoncé renforcé qui admet une réciproque.

4.4 Théorème (Lê-Teissier) : Soit X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d , et soit $X = \cup X_\alpha$ une partition de X en sous-espaces analytiques non-singuliers constructibles dans X .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $x \in X_\alpha$ et tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, x)$ il existe un ouvert de Zariski dense W de l'espace des drapeaux

$$\mathcal{B} : T_{X_\alpha, x} \subset D_{N-d_\alpha-1} \subset \dots \subset D_1 \subset D_0 = \mathbb{C}^N$$

tel que pour $\mathcal{B} \in W$ et H_i non singulier de codimension i contenant X_α et avec $T_{H_i, x} = D_i$, $\bar{X}_\beta \cap H_i$ soit localement topologiquement trivial le long de X_α en x , pour tout X_β et $0 \leq i \leq N-d_\alpha-1$.

2) La décomposition $X = \cup X_\alpha$ est une stratification de Whitney de X .

La démonstration détaillée sera donnée ailleurs. Nous venons de voir comment 2) \Rightarrow 1) résulte du Théorème de Thom-Mather. La preuve de 1) \Rightarrow 2) s'appuie essentiellement sur les résultats du Chapitre V et le Théorème 4.2 ci-dessus.

Remarque : Il serait plus simple de ne regarder que les plongements locaux $X \subset \mathbb{C}^N$ tels que l'image de X_α soit linéaire et de regarder alors les intersections $X \cap D_i$.

4.5 Réalisation de la partie B) du programme (cf. Introduction). Etant donné un espace analytique complexe X muni d'une stratification de Whitney $X = \cup X_\alpha$ il résulte de l'égalité de 4.2 par une récurrence facile que la collection des $X_i(X_\beta, X_\alpha)$ où $x \in X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$ détermine la collection des multiplicités $m_x(P_k(\overline{X_\beta}, x))$ en x des variétés polaires des adhérences de strates $\overline{X_\beta}$ et est déterminée par elle. Ainsi la suite $M_{X,x}^*$ est bien déterminée par la topologie de l'ensemble stratifié X et de ses sections planes locales générales, au voisinage de x .

§ 5. Rapport avec le cas des hypersurfaces.

5.1 Proposition : Soient $X \subset \mathbb{C}^N$ un espace analytique réduit purement de dimension d , $Y \subset X$ un sous-espace analytique fermé réduit et $0 \in Y$ un point non-singulier de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Le couple (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en 0 .
- ii) Il existe un ouvert de Zariski dense U de l'espace des projections linéaires $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ tel que pour $p \in U$, en posant $X_1 = p(X)$ on ait : X_1 est une hypersurface réduite de \mathbb{C}^{d+1} , $Y_1 = p(Y)$ est non-singulier en $0 = p(0)$ et le couple (X_1^0, Y_1) satisfait les conditions de Whitney en 0 .

Démonstration : Cela résulte aussitôt de (Chap. V, 2.1 et Chap. IV, 5.5). On pourrait aussi utiliser les inégalités métriques de (Chap. III, 2.1).

Remarque : On prendra bien garde que l'inclusion $X_1^0 \subset p(X^0)$ est en général stricte : la projection p "crée des singularités" et en particulier des points doubles évanescents sur X_1 .

§ 6. Sur l'équisingularité à la Zariski (cf. [Z 1], [Z 4]).

Très sommairement, étant donné $X \subset \mathbb{C}^N$, un objet essentiel pour la théorie de Zariski est l'image Δ_1 par une projection générique $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^d$ de la variété polaire $P_{1\langle p \rangle}$ (cf. Chap. IV, § 1). A priori, un avantage du point de vue des variétés polaires est que l'on n'a pas à prendre d'image, donc on n'a pas à

faire d'élimination, et elles sont plus calculables. Dans les cas très simples, par exemple lorsque Y est de codimension 1, la variété polaire $P_1\langle p \rangle$ (resp. Δ_1) n'intervient que par le fait d'être vide ou non, et les résultats de transversalité du Chapitre IV font que les deux théories sont pratiquement interchangeables. Un excellent texte à consulter pour la généralisation du critère discriminant de Zariski au cas d'une famille de courbes quelconque est [Bu]. Dans le cas général, le rapport est encore bien mystérieux mais je crois qu'une conséquence des résultats de ce travail-ci est que dans le cas général le fait que $Y \subset X$ soit une strate d'une stratification de Whitney de X est beaucoup plus faible que le fait que X soit équisingulier "à la Zariski" le long de Y .

De ce point de vue, le problème de déterminer le rapport entre les conditions de Whitney et l'équisingularité à la Zariski, et le problème de caractériser "numériquement" l'équisingularité à la Zariski, (voir [B-H]) ou l'équisingularité au sens de la résolution simultanée forte (cf. Chap. III, 5.3.1) comme j'ai réussi à le faire ici pour les conditions de Whitney, restent largement ouverts. Il me semble que les variétés polaires locales joueront encore un rôle dans ces questions et je veux terminer par un problème dont la solution ferait, je crois, avancer l'étude du rapport entre variétés polaires et équisingularité à la Zariski.

Définition : Soit $Z \subset \mathbb{C}^N$ un sous-espace analytique réduit de dimension pure c dans \mathbb{C}^N . Soit $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{c+1}$ une projection linéaire. Nous dirons que p est une projection générale pour Z , relativement à une définition de l'équisingularité, si pour tout morphisme $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{P}$, où \mathcal{P} désigne l'espace des projections linéaires de \mathbb{C}^N dans \mathbb{C}^{c+1} , telle que $h(0) = p$, la famille des images $(h(t)(Z), t) \subset \mathbb{C}^{c+1} \times \mathbb{C}$ est équisingulière le long de $0 \times \mathbb{C}$ en 0×0 .

Problème : Etant donné $X \subset \mathbb{C}^N$, montrer que pour tout k , $0 \leq k \leq d-1$, il existe un ouvert de Zariski dense W_k de l'espace des projections linéaires $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ tel que pour $p \in W_k$, la projection p soit générale pour la variété polaire $P_k\langle p \rangle$, du point de vue des conditions de Whitney, ou mieux encore

de la résolution simultanée forte.

Remarque : Le cas $k = d-1$ est une partie essentielle du Lemme-clé du Chapitre V, et est dû à Briançon-Henry dans le cas $d = 2$, singularité isolée [B-H].

B I B L I O G R A P H I E

- [A1] A.D. ALEKSANDROV : Theory of mixed volumes, 4 articles dans Mat. Sbornik 44 (N.S., t.2), p.947-972 et 1205-1238, et 45 (N.S., t. 2), p. 27-46 et 227-251. Une traduction par le Prof. J. Firey, en 1966-67, (Dept. of Math. University of Oregon) m'a aimablement été envoyée par le Prof. R. Schneider.
- [Bbk 1] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Chap. V, § 1, Hermann, Paris.
- [Bbk 2] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Chap. VI, § 1, Hermann, Paris.
- [Bbk 3] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Chap. VIII, Masson, Paris (en préparation).
- [B-C] F. BRUHAT et H. CARTAN : Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 244 (1957) 988-990.
- [B-G-G] J. BRIANÇON, A. GALLIGO et J.M. GRANGER : Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites, Mémoire de la Société Mathématique de France, Nouvelle série, N^o 1, 1980.
- [B-H] J. BRIANÇON et J.P.G. HENRY : Equisingularité générique des familles de surfaces à singularités isolées, Bull. S.M.F., 108, 2 (1980) 259-281.
- [B-H-S] J. BRIANÇON, J.P.G. HENRY et J.P. SPEDER : Les conditions de Whitney en un point sont analytiques, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (1976) 279.
- [Bo] E. BÖGER : Zur theorie der saturation bei analytischen algebren, Math. Annalen, 221 (1974) 119-143.
- [B-S] J.P. BRASSELET et M.H. SCHWARTZ : Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, Astérisque N^o 82-83 (1981) 93-147 (S.M.F.).
- [B-Sk] J. BRIANÇON et H. SKODA : Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de \mathbb{C}^4 , Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (1974) 949-951.
- [Bu] R.O. BUCHWEITZ : On Zariski's criterion for equisingularity and non-smoothable monomial curves, Thèse d'Etat, Paris VII (1981), voir

aussi Proc. A.M.S. Symp. on Singularities, Arcata 1981 (à paraître).

- [Ca] Séminaire H. CARTAN 1960-1961, Publications de l'Institut Henri Poincaré.
- [Ch] D. CHENIOT : : Sur les sections transversales d'un ensemble stratifié, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (1972), 915-916.
- [G-H] P. GRIFFITHS et J. HARRIS : Principles of algebraic geometry, John Wiley, 1978.
- [G-He] M. GIUSTI et J.P.G. HENRY : Minorations de nombres de Milnor, Bull. S.M.F., 108 (1980) 17-45.
- [G-M] M. GORESKY et R. MacPHERSON : Morse theory on singular spaces, Preprint, Brown University 1980.
- [Gr-R] L. GRUSON et M. RAYNAUD : Critères de platitude et de projectivité, Inventiones Math., 13 (1971) 1-89.
- [H 1] H. HIRONAKA : Normal cones in analytic Whitney stratifications, Publ. Math. I.H.E.S. N° 36, P.U.F. 1970 (volume dédié à O. Zariski).
- [H 2] H. HIRONAKA : Stratification and flatness, in Proc. Nordic Summer School "Real and complex singularities", Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff 1977.
- [H 3] H. HIRONAKA : Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps, Publ. Istituto Matematico "L. Tonelli" dell'Università di Pisa, Pisa (1973).
- [H-L-T] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER : Platicateur local et aplatissement local en géométrie analytique, in "Singularités à Cargèse", 1972, Astérisque N° 7-8 (1973).
- [H-M] J.P.G. HENRY et M. MERLE : Limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires, Actes de cette Conférence.
- [Ke] G. KEMPF : On the geometry of a theorem of Riemann, Annals of Math., 98 (1973) 178-185.
- [K1 1] S. KLEIMAN : On the transversality of a general translate, Compositio Math. 28 (1974) 287-297.
- [K1 2] S. KLEIMAN : The enumerative theory of singularities, in Proc. Nordic Summer School "Real and complex singularities", Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff 1977.
- [Le-T 1] M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER : Dépendance intégrale sur les idéaux et équisingularité, Séminaire Ecole Polytechnique 1974, Publ. Inst. Fourier, St. Martin d'Hères F-38402 (1975).

- [Le-T 2] M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER : Normal cones and sheaves of relative jets, *Compositio Math.* 28, 3 (1974) 305-331.
- [Lê-Te 1] LÊ DŨNG TRÁNG et B. TEISSIER : Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Annals of Math.*, 114 (1981) 457-491.
- [Li 1] J. LIPMAN : Reduction, blowing-up and multiplicities, Preprint Purdue University 1980, à paraître in *Proceedings Conference on transcendental methods in Commutative algebra*, George Mason University 1979.
- [Li 2] J. LIPMAN : Relative Lipschitz saturation, *American J. of Math.*, 97, 3 (1975) 791-813.
- [Li-S] J. LIPMAN et A. SATHAYE : Jacobian ideals and a theorem of Briançon-Skoda, *Michigan Math. J.*, 28 (1981) 199-222.
- [Li-T] J. LIPMAN et B. TEISSIER : Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda, *Michigan Math. J.*, 28 (1981) 97-116.
- [Ma] J. MATHER : Stratifications and mappings, in "Dynamical Systems", Academic Press 1973.
- [Mi] J. MILNOR : Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press 1968.
- [Na] M. NAGATA : Note on a paper of Samuel, *Mem. Coll. Sc. Univ. of Kyoto*, t. 30 (1956-57).
- [Na 1] V. NAVARRO : Conditions de Whitney et sections planes, *Inventiones Math.*, 61, 3 (1980), 199-266.
- [Na 2] V. NAVARRO : Sur les multiplicités de Schubert locales des faisceaux algébriques cohérents, Preprint Univ. Politecnica de Barcelona
- [No] A. NOBILE : Some properties of the Nash blowing-up, *Pacific J. Math.* 60 (1975), 297-305.
- [P] F. PHAM : Fractions lipschitziennes et saturation de Zariski, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970, tome 2, p. 649-654, Gauthier-Villars, Paris 1971.
- [P-T] F. PHAM et B. TEISSIER : Fractions lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe et saturation de Zariski, Preprint Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 1969.
- [Pi] R. PIENE : Polar classes of singular varieties, *Ann. Sc. E.N.S.*, 11 (1978).
- [Ra] C.P. RAMANUJAM : On a geometric interpretation of multiplicity, *Inventiones Math.*, 22 (1973) 63-67.

- [Re] D. REES : A-transform of local rings and a theorem on multiplicities, Proc. Camb. Phil. Soc., 57 (1961) 8-17.
- [R-S] D. REES et R.Y. SHARP : On a theorem of B. Teissier on multiplicities of ideals in local rings, J. London Math. Soc. 2nd Series, Vol. 18, part 3 (1978) 449-463.
- [Sa] P. SAMUEL : Some asymptotic properties of powers of ideals, Annals of Math. Serie 2, t. 56 (1955).
- [Se] J.P. SERRE : Algèbre locale et multiplicités, Springer Lecture Notes, N° 11 (1965).
- [Te 1] B. TEISSIER : Cycles évanescents sections planes et conditions de Whitney in "Singularités à Cargèse", 1972, Astérisque N° 7-8 (1973).
- [Te 2] B. TEISSIER : Cycles évanescents et résolution simultanée, I et II, in "Séminaire sur les singularités des surfaces 1976-77", Springer Lecture Notes N° 777 (1980).
- [Te 3] B. TEISSIER : The hunting of invariants in the geometry of discriminants, Proc. Nordic Summer School "Real and complex singularities", Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff 1977.
- [Te 4] B. TEISSIER : Jacobian Newton polyhedra and equisingularity, Proc. R.I.M.S. Conference on Singularities, April 1978, R.I.M.S Publ., Kyoto, Japon, 1978.
- [Te 5] B. TEISSIER : Variétés polaires locales et conditions de Whitney, Note aux C.R. Acad. Sc., t. 290 (5 Mai 1980) 799.
- [Te 6] B. TEISSIER : Variétés polaires locales : quelques résultats, in "Journées complexes", Nancy 1980, Publ. de l'Institut Elie Cartan, Nancy.
- [Te 7] B. TEISSIER : Sur une inégalité à la Minkowski, Annals of Math., 106, 1 (1977) 38-44.
- [Te 8] B. TEISSIER : On a Minkowski-type inequality for multiplicities, II, in : "C.P. Ramanujam, a tribute", Tata Institute, Bombay 1978, 347-361.
- [Te 9] B. TEISSIER : Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (17 Janvier 1979).
- [Te 10] B. TEISSIER : Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry, in "Seminar in Differential geometry (S.T. Yau)", Annals of Math. Studies 102, Princeton Univ. Press (1981) 85-105 (à paraître).
- [Te 11] B. TEISSIER : Introduction to equisingularity problems, Proc. A.M.S.

Symp. in Pure Math., N° 29, Arcata 1974.

- [Te 12] B. TEISSIER : Variétés polaires, I : Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces, *Inventiones Math.*, 40, 3 (1977) 267-292.
- [Th] R. THOM : Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. A.M.S.*, 75 (1969) 240-284.
- [Ve] J.L. VERDIER : Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, *Inventiones Math.*, 36 (1976) 295-312.
- [W] H. WHITNEY : Tangents to an analytic variety, *Annals of Math.*, 81 (1964) 496-549.
- [Z 1] O. ZARISKI : Foundations of a general theory of equisingularity ... *Amer. J. of Math.*, 101, 2 (1979) 453-514.
- [Z 2] O. ZARISKI : Modules de branches planes, *Publications du Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, 1973.*
- [Z 3] O. ZARISKI : Some open questions in the theory of singularities, *Bull. A.M.S.*, 77, 4 (July 1971) 481-491.
- [Z 4] O. ZARISKI : *Collected papers, vol. IV : Equisingularity on algebraic varieties, MIT Press 1979.*
- [Z 5] O. ZARISKI et P. SAMUEL : *Commutative algebra, vol. I, Van Nostrand, New York 1960.*

* * *

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique
 F 91128 Palaiseau Cedex - France
 "Laboratoire Associé au C. N. R. S. No 169"