TD 11

Nom: Bram Petri
e-mail: bram.petri@imj-prg.fr
site web: webusers.imj-prg.fr/~bram.petri
↳ Teaching → Introduction to probability theory

À 11:15 : Exo 1.2.

Exo 1.2

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} ;\ u_n \in \mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

a) $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{u\in E;\ u_n\in\{0,1\}\}}_{\text{le } n\text{-ème élément est "0" ou "1"}} = \{u\in E;\ u_n\in\{0,1\}\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

= l'ensemble de suites à valeurs dans $\{0,1\}$.

$$B = \bigcap_{M\in\mathbb{R}} \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{\bigcap_{m\geq n} \underbrace{\{u\in E;\ u_m\geq M\}}_{n\text{-ème élt.} \geq M}}_{m\text{-ème élt.} \geq M\ \forall m\geq n} \Big)}_{\text{suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ t.q. } \exists n\in\mathbb{N}:\ \forall m\geq n\ u_m\geq M}$$

$= \{u\in E;\ \forall M\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m\geq n:\ u_m\geq M\}$

= suites t.q. $\forall M\in\mathbb{R}$: après un certain indice n : $u_m \geq M$

= suites qui tendent vers $+\infty$.

$$C = \bigcup_{M\in\mathbb{R}} \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{u\in E;\ u_n\geq M\}}_{\text{suites desquelles tous les éléments sont au moins } M.}$$

= ensembles de suites minorées.

b) F = suites stationaires

$= \{u\in E;\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.q. } u_m = u_n\ \forall m\geq n\}$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{u\in E;\ \forall m\geq n:\ u_m=u_n\}$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \{u\in E;\ u_m=u_n\}$

$\cancel{\bigcap_{m\geq n} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\ \ldots\ \}}$

G = suites qui convergent $= \{u\in E;\ \exists \ell\in\mathbb{R}\ \lim_{n\to+\infty} u_n=\ell\}$

$= \{u\in E;\ \exists \ell\in\mathbb{R} \text{ t.q. } \forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ t.q. } \forall n\geq N\ |u_n-\ell|<\varepsilon\}$

$= \bigcup_{\ell\in\mathbb{R}} \{u\in E;\ \forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ t.q. } \forall n\geq N\ |u_n-\ell|<\varepsilon\}$

$= \bigcup_{\ell\in\mathbb{R}} \bigcap_{\varepsilon>0} \{u\in E;\ \exists N \text{ t.q. } \forall n\geq N\ |u_n-\ell|<\varepsilon\}$

$= \bigcup_{\ell\in\mathbb{R}} \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \{u\in E;\ \forall n\geq N\ |u_n-\ell|<\varepsilon\}$

$= \bigcup_{\ell\in\mathbb{R}} \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{u\in E;\ |u_n-\ell|<\varepsilon\}$

Bonus :

Rappel : * $u \in E$ converge ssi u est une suite de Cauchy

* $u \in E$ est une suite de Cauchy ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m,n \geq N : |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Donc :

$$G = \{ u \in E \ ; \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m,n \geq N : |u_m - u_n| < \varepsilon \}$$

$$= \{ u \in E \ ; \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m,n \geq N : |u_m - u_n| \leq \tfrac{1}{k} \}$$

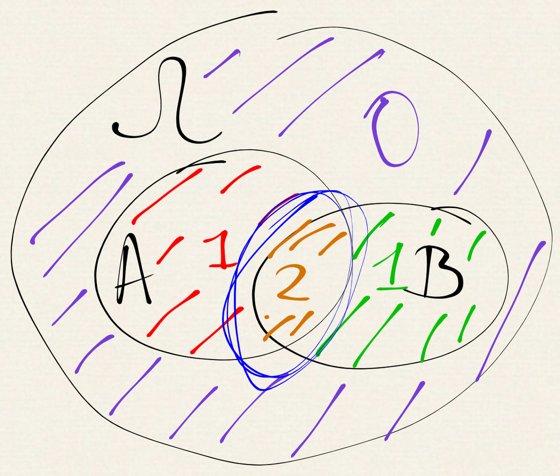
$$= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m,n \geq N} \{ u \in E \ ; \ |u_m - u_n| \leq \tfrac{1}{k} \}$$

À 12:13 Exo 1.3.

Exo 1.3 : $A, B \subset \Omega$. Déterminer si la fonction donnée est une fonction indicatrice

a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$

Solution :

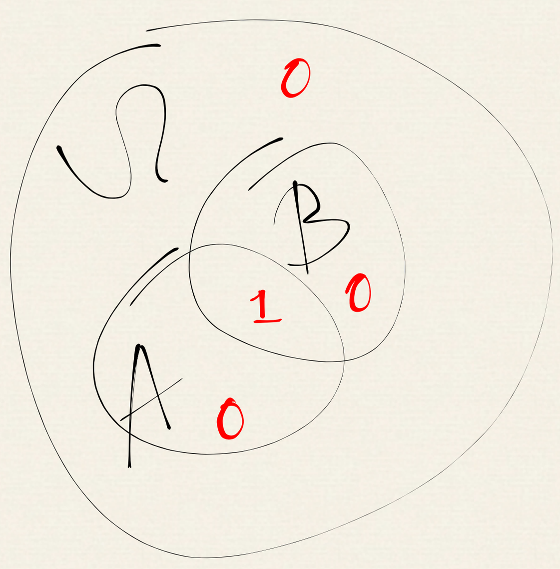


Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)(\omega) = 2 \ \forall \omega \in A \cap B$
donc ce n'est pas une fonction indicatrice

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}$

$$\mathbb{1}_{A \Delta B}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \text{ et } \omega \notin B \\ 1 & \text{si } \omega \in B \text{ et } \omega \notin B \\ 0 & \text{si } \omega \in A \cap B \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \text{ et } \omega \notin B \end{cases}$$

b) $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$



$$(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \cap B \\ 0 & \text{sino} \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}$$

c) $$|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in A \cap B \\ 1 & \text{si } \omega \in A \text{ et } \omega \notin B \\ 1 & \text{si } \omega \notin A \text{ et } \omega \in B \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \text{ et } \omega \notin B \end{cases} = \mathbb{1}_{A \Delta B}(\omega)$$

Rappel : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

d) $$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \overset{(b)}{=} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B} \overset{(a)}{=} \mathbb{1}_{A \cup B}$$