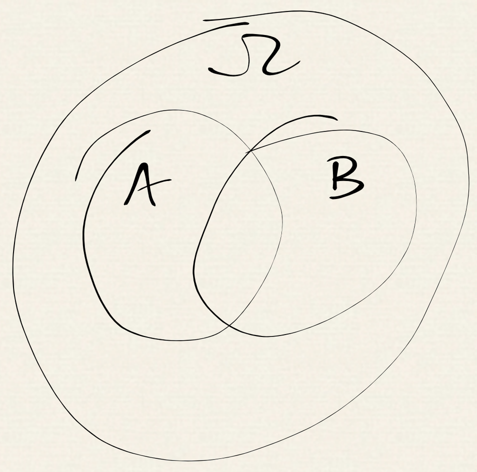
TD II

$A, B \subset \Omega$.

Exo 1.3 : Sont les fonctions données des fonc. indicatrices?

(e) $$(\max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\})(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \quad \omega \notin B \\ 1 & \omega \in A \quad \omega \notin B \\ 1 & \omega \notin A \quad \omega \in B \\ 1 & \omega \in A \quad \omega \in B \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cup B}(\omega)$$



(f) $$\min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \quad \omega \notin B \\ 0 & \omega \in A \quad \omega \notin B \\ 0 & \omega \notin A \quad \omega \in B \\ 1 & \omega \in A \quad \omega \in B \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega)$$

À 9h17 : L'exo 1.11

Exo 1.11

Ω ensemble.

a) Ω n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\Omega)$.

Preuve : On suppose que
$\varphi : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$
est une bijection

On va considérer l'ens.
$$A = \{\omega \in \Omega ; \underbrace{\omega}_{\text{élément de } \Omega} \notin \overbrace{\varphi(\omega)}^{\text{sous ens. de } \Omega}\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

φ bijective $\Rightarrow \varphi$ surjective $\Rightarrow$ Il existe $a \in \Omega$ t.q. $\varphi(a) = A$.

Q'n : Est-ce que $a \in A$?

Option 1 : Oui, $a \in A$
Alors $a \in A = \varphi(a)$ donc, par déf de A, $a \notin A$.

Option 2 : Non, $a \notin A$
Alors $a \notin A = \varphi(a)$ et donc $a \in A$. $\lightning$

Obs : On a une application injective
$\varphi : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$ déf par
$\varphi(\omega) = \{\omega\}$
et cette application n'est pas surjective.

Cela ne prouve pas que Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$ ne sont pas en bijection.

Contre-ex : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x$ injective mais pas surj.

Mais $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont quand-même en bijection :

$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ déf par :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x/2 & \text{si } x \text{ est paire et } x \neq 0 \\ -\frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impaire} \end{cases}$$

ψ est injective :

supposons que $\psi(x) = \psi(y)$

si $\psi(x) = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

si $\psi(x) > 0$ alors x et y sont paires et $x/2 = y/2 \Rightarrow x = y$.

si $\psi(x) < 0$ x et y impaires et $-\frac{x+1}{2} = -\frac{y+1}{2} \Rightarrow x = y$.

ψ surjective : c-à-d $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{N}$ avec $\psi(x) = y$.

Si Ω est fini

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} > |\Omega|.$$

b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable :

Preuve : Rappel : X est dénombrable ssi $|X| < +\infty$ ou $\exists$ bijection $\mathbb{N} \to X$.

$*$ $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ n'est pas fini parce que $\{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$*$ (a) $\Rightarrow \nexists$ bijection $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

$\boxed{\text{À } 10^h06 : \text{l'exo 1.6}}$

Exo 1.6 :

Théorème de Newton: $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = 0^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) $$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!\,\underbrace{(n-k)!}_{((n-1)-(k-1))!}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}$$

$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \overset{(a)}{=} n \cdot 2^{n-1}$$

Solution alternative : $n \geq 1$:

$$n(1+x)^{n-1} = \frac{d}{dx}\left((1+x)^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \cdot x^{k-1}$$

Donc, si on met $x=1$:

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{\substack{k=1 \\ k=0}}^{n} k \binom{n}{k}$$

d) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!\,\underbrace{(n-k)!}_{(n+1-(k+1))!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

Solution alternative :

$$\frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^t = \int_0^t (1+x)^n dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k+1} t^{k+1}$$

On met $t=1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

La séance prochaine :
la correction de l'exo 1.4.