TD 11

Exo 1.4

E ensemble, $A_1, \dots, A_n \subseteq E$.

a) Prouver que :
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

Preuve : Obs : si $A \subseteq E$ alors

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right\} = \mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A^c \\ 1 & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

On a : $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$

Donc :
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \mathbb{1}_{(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c}$$
$$= 1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n A_i^c}$$

Rappel : Exo 1.3 (b)

si $A, B \subseteq E$ alors $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

et en général :
$$\mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \mathbb{1}_{A_1} \cdot \mathbb{1}_{A_2} \cdots \mathbb{1}_{A_n}$$

Donc :
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^c}$$
$$\overset{\text{Obs ci-dessus}}{=} 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

27

(b) Prouver que :
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

Preuve : Rappel : si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ alors
$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$
$$= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_1x_2 + x_1x_3 + \dots$$
$$+ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots$$
$$+ \dots$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Donc
$$\prod_{i=1}^n (1 \overbrace{- \mathbb{1}_{A_i}}^{x_i}) = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} (-1)^k \prod_{j=1}^k \mathbb{1}_{A_{i_j}}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^k \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

Donc
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \cancel{1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

27

À 11^h32 : l'exo 2.1

Exo 2.1 : On lance simultanément un dé à $\underline{m}$ faces (deuxième dé) et un dé à $\underline{n}$ faces, avec $m \leq n$.

a) Proposer un espace proba. pour décrire l'expérience.

Sol : On cherche : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

univers Ω = ensemble de résultats possibles de l'expérience.

$$= \{ (i,j) \in \mathbb{N} ; \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array} \}$$

Ω fini $$= \{1, .., n\} \times \{1, .., m\}$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ = l'ensemble de parties de Ω.

$\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme

c-à-d $\mathbb{P}(A) = |A| / |\Omega|$ $\forall A \in \mathcal{F}$ (c-à-d. $\forall A \subseteq \Omega$)

b) la proba que le résultat du premier dé est inférieur ou égal au résultat du deuxième dé.

Sol : l'événement " ... " correspond au sous-ens.

$$A = \{ (i,j) \in \Omega ; i \leq j \}$$

Donc, il faut calculer :

$$\mathbb{P}(A) = |A| / |\Omega|$$

On a : $|\Omega| = |\{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}| = n \cdot m$

$|A|$? On va écrire $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$

avec $A_k = \{(i,j) \in A ; j = k\} = \{(i,j) \in \Omega ; \begin{array}{l} (i,j) \in A \\ j = k \end{array}\}$

$$= \{ (i,j) \in \Omega ; \begin{array}{l} i \leq j \\ j = k \end{array} \}.$$

Obs : si $k \neq l$ alors $A_k \cap A_l = \emptyset$.

donc : $|A| = \sum_{k=1}^{m} |A_k|$

De plus : $|A_k| = k$ (toutes les possibilités pour i étant donné $j = k$. NB : on utilise que $n \geq m$)

Donc : $|A| = \sum_{k=1}^{m} k = \binom{m+1}{2} = \frac{(m+1)m}{2}$. Donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{(m+1)m}{2 \cdot m \cdot n} = \frac{m+1}{2n}$.

À 12^h15 : l'exo 2.7.

Exo 2.7 :

$(A_k)_{k\geq 1}$ suite d'événements

a) Prouver que si $\mathbb{P}(A_k)=0 \ \forall k\geq 1$

alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) = 0$.

Preuve :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \overset{\text{sous-additivité}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A_k)}_{=0} = 0.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) = 0.$$

b) Si $\mathbb{P}(A_k) = 1 \ \forall k\geq 1$ alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) = 1$

Preuve :

On a : $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right)^c\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\right)$$

Et $$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\right) \overset{\text{s.add.}}{\leq} \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k^c)$$
$$= \sum_{k\geq 1} \underbrace{1 - \mathbb{P}(A_k)}_{=0}$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) = 1 - 0 = 1. \qquad \square$$