TD 11

À $9^h 10$: l'exo 2.8

Exo. 2.8.

$A_1, \dots, A_n$ des événements

alors : $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

Preuve: si $n=2$: $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

hérédité: $n \rightsquigarrow n+1$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right)$$

hypothèse

$$\geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right)$$

sous-additivité:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1})}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

$\square$

À $9^h 50$: l'exo 2.3.

Exo 2.3

On tire 5 cartes d'un paquet de 52 cartes de Poker.

a) $\mathbb{P}$(on a au moins une paire)

Solution : $\mathcal{C}$ = "ensemble de cartes"

$$= \left\{ (c,h) \in \mathbb{N}^2 ;\ \begin{matrix} 1 \le c \le 4 \\ 1 \le h \le 13 \end{matrix} \right\} = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,\dots,13\}$$

$$\Omega = \{ T \subset \mathcal{C} ;\ |T| = 5 \}$$

Donc $|\Omega| = \binom{52}{5}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ = la proba uniforme.

A = "avoir au moins une paire"

$$= \left\{ T \in \Omega ;\ \begin{matrix} \exists\, (c,h) \neq (c',h') \in T \\ \text{t.q. } h = h' \end{matrix} \right\}$$

$$\mathbb{P}(A) = |A| / |\Omega| = 1 - |A^c| / |\Omega|$$

A^c = "avoir aucune paire" $= \left\{ T \in \Omega ;\ \begin{matrix} \nexists\, (c,h) \neq (c',h') \in T \\ \text{t.q. } h = h' \end{matrix} \right\}$

$$|A^c| = \binom{13}{5} \cdot 4^5$$

$\binom{13}{5}$: # choix pour les hauteurs

4^5 : # choix pour les couleurs.

Donc : $\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}4929\dots$

b) $\mathbb{P}$(avoir exactement une paire)

Solution : B = " ... "

On a $|B| = \underbrace{13}_{\text{hauteur de la paire}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{couleurs de la paire}} \cdot \underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{hauteurs des autres cartes}} \cdot \underbrace{4^3}_{\text{couleurs des autres cartes}}$

Donc : $\mathbb{P}(B) = 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3 / \binom{52}{5} \approx 0{,}4226\dots$

<u>Exo 2.9</u> : correction la prochaine fois.