TD 11

Exo 2.9 Ω ensemble fini (Ensemble d'états possible)

$H : \Omega \to \mathbb{R}$ (Énergie de l'état)

$\beta \geq 0$ paramètre fixé. $\left(\beta = \frac{1}{k_B \cdot T} \quad \begin{array}{l} k_B \text{ cste de Bolzmann} \\ T \text{ temperature} \end{array} \right)$

On définit une probabilité $\mathbb{P}_\beta$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (Ω fini donc on prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$)

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) := \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$

où $Z_\beta := \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$

a) Vérifier que $\forall \beta \geq 0$ $\mathbb{P}_\beta$ est une probabilité.

Solution : $\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$.

De plus
$$\mathbb{P}_\beta(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$
$$= \frac{1}{Z_\beta} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$
$$= \frac{1}{\sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$
$$= 1.$$

b) Si $\beta = 0$ alors $\mathbb{P}_\beta$ est uniforme sur Ω.

Solution: $Z_0 = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-0 \cdot H(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega} 1 = |\Omega|$

et donc : $\mathbb{P}_0(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_0} e^{-0 \cdot H(\omega)} = \frac{1}{|\Omega|}$.

Et donc si $A \in \mathcal{F}$ (c-à-d. $A \subseteq \Omega$)

alors $\mathbb{P}_0(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}_0(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Donc $\mathbb{P}_0$ est uniforme.

c) Considérons la limite $\beta \to +\infty$. On note $m = \min\{H(\omega);\ \omega \in \Omega\}$ et $M := \{\omega \in \Omega;\ H(\omega) = m\}$ $\neq \emptyset$.

* Prouver que pour $\omega \notin M$, $\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = 0$
* En déduire que $\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = 1$.

Solution: * $Z_\beta = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)} \geq \sum_{\omega \in M} e^{-\beta \cdot H(\omega)} = \underbrace{|M|}_{\geq 1} \cdot e^{-\beta \cdot m} \geq e^{-\beta \cdot m}$

Donc si $\omega \notin M$
$$0 \leq \lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \cdot H(\omega)} \leq \lim_{\beta \to +\infty} \frac{e^{-\beta \cdot H(\omega)}}{e^{-\beta \cdot m}}$$
$$= \lim_{\beta \to +\infty} e^{-\beta(\underbrace{H(\omega) - m}_{>0})} = 0.$$

* $\underline{\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = 1}$:
$$\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = \lim_{\beta\to+\infty} 1 - \mathbb{P}_\beta(M^c)$$
$$= 1 - \lim_{\beta\to+\infty} \sum_{\omega\notin M} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$$
$$\overset{\text{somme finie}}{=} 1 - \sum_{\omega\notin M} \lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$$
$$= 1 - 0 = 1.$$

d) Montrer que pour tout $\omega\in M$, on a
$$\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}$$

Solution: $\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta\cdot H(\omega)}$

Donc si $H(\omega) = H(\omega')$ alors $\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \mathbb{P}_\beta(\{\omega'\})$

$\forall \beta \geq 0$.
$$1 = \lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = \lim_{\beta\to+\infty} \sum_{\omega\in M} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$$
$$= \lim_{\beta\to+\infty} |M|\cdot \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) \qquad \forall\, \omega\in M$$
$$\Rightarrow \lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}.$$

À 11^h55 : l'exo 3.2.

Exo 3.2: Un étudiant fait un QCM.

L'étudiant connaît et donne la bonne réponse avec proba. p
s'il ne la connaît pas il choisit une des 5 possibilités unif. au hasard.

a) $\mathbb{P}$(l'étudiant donne la bonne réponse) ?

b) Si l'étudiant a donné la bonne réponse, quelle est la proba qu'il le connaissait?

A = choisir la rép. correcte

B = connaît pas

Solution: (a) $\mathbb{P}(\text{bonne réponse}) = \mathbb{P}(\text{connaît la réponse}) + \mathbb{P}\left(\underbrace{\text{il la ne connaît pas mais la choisit au hasard}}_{A\cap B}\right)$

$$= p + \mathbb{P}\Big(\underbrace{\text{il ne connaît pas la réponse}}_{B}\Big) \cdot \mathbb{P}\Big(\underbrace{\text{il choisit la réponse correcte}}_{A} \,\Big|\, \underbrace{\text{il ne connaît pas la réponse}}_{B}\Big)$$
$$= p + (1-p)\cdot \frac{1}{5} = \frac{4p+1}{5}$$

Rappel: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A\cap B) / \mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)$.

(b) $\mathbb{P}\left(\text{connaît} \,\middle|\, \text{il a donné la bonne réponse}\right) = \mathbb{P}\left(\text{connaît la bonne réponse et il la donne}\right) \Big/ \mathbb{P}\left(\text{il a donné la bonne réponse}\right)$
$$\overset{(a)}{=} p \Big/ \left((4p+1)/5\right) = \frac{5p}{4p+1}.$$

La prochaine séance : 11h00 3.3.