TD 11

Exo 3.12 : la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

But : pour $s \in]1, +\infty[$ on a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Context : l'hypothèse de Riemann.

Théorie des nombres : $x \in \mathbb{R}$

$$\pi(x) = \#\{ p \leq x ;\ p \text{ premier} \}$$

Q'n : Comment augmente $\pi(x)$ comme fonction de x ?

Reponse (Hadamard, de la Vallée Poussin)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1 \quad \text{(Théorème de nbres premiers)}$$

Point de vue proba. la proba qu'un nbre naturel $\leq x$ (pris unif au hasard) est $\approx \frac{1}{\ln(x)}$.

Riemann : $*$ $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ bien définie pour $s \in \mathbb{C}$, si $Re(s) > 1$

$*$ On peut continuer analytiquement ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$*$ $\zeta(s) = 0$ si $s = \underbrace{-2, -4, -6, \dots}_{\text{zéros triviales}}$.

$*$ Formule explicite pour $\pi(x)$ en termes des zéros non-triv.

l'hypothèse de Riemann : Si $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ est un zéro non-triv de $\zeta(s)$, alors $Re(s) = \frac{1}{2}$.

(Ouvert, Clay Millenium Problems)

$\hookrightarrow$ Conséquence : $\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} \right| < Cste \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(x)$.

Solution à l'exo : $s \in]1,+\infty[$.

$$\Omega = \mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$$
$$\mathbb{P} \text{ déf par : } \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$

Obs : $0 < \zeta(s) < +\infty$ donc $\mathbb{P}(\{n\}) > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}^*$

et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = \frac{1}{\zeta(s)} \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}}_{\zeta(s)} = 1$

a) On définit : $M_k = \{k, 2k, 3k, \dots\}$.

Montrer $\mathbb{P}(M_k) = \frac{1}{k^s}$.

Solution : $\mathbb{P}(M_k) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(\{ik\}) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{(ik)^s}$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{k^s} \underbrace{\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^s}}_{\zeta(s)} = \frac{1}{k^s}.$$

b) $p_1, \dots, p_\ell$ des premiers distincts.

Alors on a $M_{p_1} \cap M_{p_2} \cap \dots \cap M_{p_\ell} = M_{p_1 p_2 \cdots p_\ell}$

En déduire que les événements $(M_p)_{p \in \mathcal{P}}$, où $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}^*$ est l'ensemble de nbres premiers, sont indep.

Solution : $M_{p_1} \cap \dots \cap M_{p_\ell} = \{n \in \mathbb{N}^* ;\; p_i \mid n,\; i = 1, \dots, \ell\}$ (divise)

$$= \{n \in \mathbb{N}^* ;\; p_1 p_2 \cdots p_\ell \mid n\}$$

unicité de l'écriture de chaque nbre naturel comme produit de premiers

$$= M_{p_1 p_2 \cdots p_\ell}.$$

Rappel : Si $(A_i)_{i \in I}$ sont des événements, alors ils sont indep. ssi $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$

pour tous $i_1, \dots, i_k \in I$ distincts, pour tout $k \geq 2$.

On a :

$$\mathbb{P}(M_{p_1} \cap \dots \cap M_{p_\ell}) = \mathbb{P}(M_{p_1 \cdots p_\ell}) = \frac{1}{(p_1 \cdots p_\ell)^s} = \frac{1}{p_1^s} \cdot \frac{1}{p_2^s} \cdots \frac{1}{p_\ell^s}$$
$$= \mathbb{P}(M_{p_1}) \cdot \mathbb{P}(M_{p_2}) \cdots \mathbb{P}(M_{p_\ell})$$

□

c) $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$

Prouver que : $\mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \dots \cap M_{p_n}^c) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \quad \forall n \geq 1.$

Solution :

$$\mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap \dots \cap M_{p_n}^c) \overset{\text{indép.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(M_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(M_{p_i}))$$

$$\overset{(a)}{=} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \qquad \square$$

d) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Conclure : $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.

Solution : On écrit $D_n = \bigcap_{i=1}^{n} M_{p_i}^c$

Obs : * $D_{n+1} \subset D_n$ (parce que $D_{n+1} = D_n \cap M_{p_{n+1}}^c$)

* $\bigcap_{n \geq 1} D_n = \{m \in \mathbb{N}^* \mid p \nmid m, \forall p \in \mathcal{P}\}$

$$= \{1\}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\{1\}) \overset{\text{continuité}}{=} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D_n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \dots \cap M_{p_n}^c)$$

$$\overset{(c)}{=} \lim_{n \to +\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

$$= \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})$$

$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$

On a aussi : $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{1^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$

Donc $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s}) \Rightarrow \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.

$\underline{\text{À } 12^h00}$: l'exo 4.4.

$\underline{\text{Rappel}}$: si $x \in]-1,1[$ alors $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

$\underline{\text{Exo}}$: $X \sim \text{Géom}(p)$, où $p \in]0,1[$.

$\underline{\text{Rappel}}$: X à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p.$$

a) $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\underline{\text{Solution}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>n) &= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{i=n+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p \\
&= p \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{n+j} \\
&= p(1-p)^n \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \\
&= p \cdot (1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p \cdot (1-p)^n}{p} \\
&= (1-p)^n \qquad \square
\end{aligned}$$

b) $\mathbb{P}(\underbrace{X \text{ est un multiple de } k}_{A_k})$ pour $k \geq 2$

$\underline{\text{Solution}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(X \in \{k, 2k, 3k, \dots\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ik) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{ik-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{+\infty} ((1-p)^k)^i = \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-(1-p)^k} - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1-p} \left[\frac{1}{1-(1-p)^k} - \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)^k} \right] = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)^k} \qquad \square
\end{aligned}$$

$\underline{\text{La prochaine fois}}$: l'exo 4.9.