TD 11

Exo 5.6 : On considère une famille d'urnes indexées par les nombres naturels non-zéro.
Dans la $k^{\text{ème}}$ urne : * k boules jaunes
* 1 boule noire.

On tire successivement (de manière indép) une boule d'urne #1, une boule d'urne #2, …
T : la première fois qu'on tire une boule noire.

a) $\mathbb{P}(T>n)$? $\Rightarrow \mathbb{P}(T=+\infty)=0$.

Solution : $A_k :=$ "k-ème boule est jaune"

Donc $\mathbb{P}(T>n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n)$.

et $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{k}{k+1}$ ← # boules jaunes dans la k-ème urne ; ← # boules dans la k-ème urne.

Donc $\mathbb{P}(T>n) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

$\mathbb{P}(T=+\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\{T>n\}\right) \overset{\text{continuité}}{=} \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\{T>n\}) = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$.

Obs : $\{T>n+1\} \subseteq \{T>n\}$

b) La densité discrète de T ? $\mathbb{E}(T)$?

Solution :
$p_T(n) = \mathbb{P}(T=n) \overset{*}{=} \mathbb{P}(T>n-1) - \mathbb{P}(T>n) \overset{(a)}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

(*) $\mathbb{P}(T>n-1) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(T=k)$

$\mathbb{P}(T>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(T=k)$ $-$

$\mathbb{P}(T>n-1) - \mathbb{P}(T>n) = \mathbb{P}(T=n)$

$\mathbb{E}(T) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} p_T(n)\cdot n = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}\cdot n = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+1} = +\infty$.

Exo 5.8 $\boxed{\text{à } 11^h30}$

Exo 5.8 $X \sim Bin(n, \frac{1}{2})$

Rappel: $X : \Omega \to \{0, .., n\}$ $\quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot (1-\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$.

a) Prouver: * X et $n-X$ ont la même loi

* En déduire : $\mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k)$

Solution : Obs: $n-X : \Omega \to \{0, .., n\}$

et $\mathbb{P}(n-X=k) = \mathbb{P}(X=n-k) = \binom{n}{n-k}\frac{1}{2^n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(X=k)$.

De plus, $\mathbb{P}(|X-\frac{n}{2}| \geq k) = \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k \text{ ou } \frac{n}{2} - X \geq k)$

$$\overset{\text{disjointes}}{=} \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) + \mathbb{P}(\frac{n}{2} - X \geq k)$$

$$= \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) + \mathbb{P}((n-X) - \frac{n}{2} \geq k)$$

$$\overset{X \sim n-X}{=} 2 \cdot \mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k)$$

Donc,
$$\mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k)$$

b) Prouver : pour $k > 0$: $\mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) \leq n/8k^2$.

Solution : $\mathbb{P}(X - \frac{n}{2} \geq k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| \geq k)$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{Var(X)}{k^2}$$

$$= \frac{n}{8k^2}$$

Rappel: $\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{1}{2}$

$\mathbb{V}ar(X) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = n \cdot \frac{1}{4}$.

Bienaymé – Tchebychev:

$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

c) En France il y eu 700 000 naissances en 2019

* 355 000 garçons
* 345 000 filles

Est-ce que l'hypothèse que "la probabilité qu'un nouveau-né est un garçon est 50 %" est raisonnable ?

Solution: Obs: si l'hypothèse est correcte: $\#\text{garçons} \sim Bin(n, \frac{1}{2})$, où n est le nombre de nouveau-nés. (700 000)

(Obs. aussi : $\frac{355000}{700\,000} \approx 0{,}507..$)

Si $\#\text{garçons} \sim Bin(700\,000, \frac{1}{2})$ alors

$$\mathbb{P}(\#\text{garçons} \geq 355\,000) = \mathbb{P}(\#\text{garçons} - 350\,000 \geq 5000)$$

$$\overset{(b)}{\leq} \frac{700\,000}{8 \cdot 5000^2} = 0{,}0035.$$

Donc l'hypothèse est très peu probable.

l'exo 5.9: $\boxed{\text{à } 12^h15}$

Exo 5.9. Famille d'urnes numérotés par $\mathbb{N}^*$.

$k^{\text{ème}}$ urne : * k boules jaunes

* une boule noire

X_n : # boules noires tirées lors les premiers n tours

a) Expliquer : $X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ et calculer $\mathbb{E}(X_n)$

où A_k = "la k-ème boule tirée est noire"

Solution : Rappel : $\mathbb{1}_{A_k} = 1$ ssi la k-ème boule tirée est noire.

donc $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ compte le nbre de boules noires tirées pendant le premiers n tours,

donc X_n.

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} .$$

$\leq$ $\longrightarrow$ donc $Var(X_n) \leq \mathbb{E}(X_n)$.

b) Calculer $Var(X_n)$, prouver que $Var(X_n) \leq \mathbb{E}(X_n)$.

Solution :
$$Var(X_n) = Var\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right) \overset{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^{n} Var(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \cdot \underbrace{(1 - \mathbb{P}(A_k))}_{\leq 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$$