TD 11

Exo 6.5

X, Y v.a. indép. $X \sim Poi(\lambda_1)$ $Y \sim Poi(\lambda_2)$

$G_{X+Y}(s)$.

Solution: $G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) \overset{\text{indép}}{=} \mathbb{E}(s^X) \cdot \mathbb{E}(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$

Donc par (6.1) : $G_{X+Y}(s) = e^{\lambda_1 \cdot (s-1)} \cdot e^{\lambda_2 \cdot (s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(s-1)}$

Rappel: * G caractérise la loi.
* $Z \sim Poi(\mu)$ alors $G_Z(s) = e^{\mu \cdot (s-1)}$.

Donc $X+Y \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

À 9h30 : l'exo 6.6.

Exo 6.6.

$X_1, \dots, X_n$ v.a. indép. $X_i \sim Bern(p_n)$ $\forall i = 1, \dots, n$ $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

$Y_n = X_1 + \dots + X_n$

a) G_{Y_n}.

Solution: Obs. $Y_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$

Donc par (6.1) : $G_{Y_n}(s) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} s\right)^n$.

b) $\lim_{n \to +\infty} G_{Y_n}(s)$?

Solution: $\lim_{n\to+\infty} G_{Y_n}(s) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}(s-1)\right)^n$

$= \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\ln\big(1 + \underbrace{\tfrac{\lambda}{n}(s-1)}_{u}\big) \cdot n\Big)$

$\overset{(i)}{=} \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\left(\frac{\lambda}{n}(s-1) + o\left(\frac{\lambda}{n}(s-1)\right)\right) \cdot n\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\lambda \cdot (s-1) + o(1)\right)$

$= \exp(\lambda \cdot (s-1))$

Rappel:

(i) $\ln(1+u) = u + o(u)$ quand $u \to 0$

c-à-d :

$\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u) - u}{u} = 0$.

(ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(n) = o(1)$ quand $n \to +\infty$

veut dire que

$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{1} = \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$

Obs: c'est la fonc. gén. d'une v.a. $Poi(\lambda)$.

Rappel (cours): $k \in \mathbb{N}$: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$= \mathbb{P}(Z = k)$

où $Z \sim Poi(\lambda)$.

À 10h10 : l'exo 6.8.

Exo 6.8

$(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. indép. de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Y v.a. indép. de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$W = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

a) $G_{X_1+\dots+X_n}(s)$ en termes de $G_{X_1}(s)$.

Solution: $G_{X_1+\dots+X_n}(s) \overset{\text{indép.}}{=} G_{X_1}(s)\cdot G_{X_2}(s)\cdots G_{X_n}(s) \overset{\text{même loi}}{=} G_{X_1}(s)^n$.

b) Calculer $\mathbb{E}(s^W\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}})$. Pour $s\geq 0$: $G_W(s) = G_Y(G_{X_1}(s))$

Solution:

$s^W\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est la même fonction

$s^{X_1+\dots+X_n}\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Parce que si $\omega\in\Omega$ et $Y(\omega)\neq n$ alors $\mathbb{1}_{\{Y=n\}}(\omega)=0$ et donc $(s^W \mathbb{1}_{\{Y=n\}})(\omega)=0$
$= (s^{X_1+\dots+X_n}\cdot\mathbb{1}_{\{Y=n\}})(\omega)$

si $Y(\omega)=n$ alors $W(\omega) = X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega)$
donc $(s^W\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}})(\omega) = (s^{X_1+\dots+X_n}\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}})(\omega)$

Donc
$$\mathbb{E}(s^W\cdot\mathbb{1}_{\{Y=n\}}) = \mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_n}\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}})$$
$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_n})\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=n\}})$$
Bernoulli
$$\overset{(a)}{=} (G_{X_1}(s))^n\cdot \mathbb{P}(Y=n)$$

Et: $\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} = 1$.

$$G_W(s) = \mathbb{E}(s^W) = \mathbb{E}\Big(s^W\cdot\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{\{Y=n\}}\Big) \overset{\substack{s\geq 0 \\ \text{donc} \\ s^W\cdot\mathbb{1}_{\{Y=n\}} \\ \text{v.a. positive}}}{=} \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}(s^W\cdot \mathbb{1}_{\{Y=n\}})$$

$$= \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(Y=n)\cdot(G_{X_1}(s))^n$$

$$\overset{\text{FdT}}{=} \mathbb{E}\big((G_{X_1}(s))^Y\big) \overset{\text{déf}}{=} G_Y(G_{X_1}(s))$$

le reste : la semaine prochaine.