TD11

Exo 7.2 : Sont les fonctions suivantes des fonc. de répartition ?

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solution :

Rappel : * si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. alors sa fonc. de répartition est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf. par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$.

* Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction t.q.

1) F continue à droite

2) F croissante

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Alors il existe une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ t.q. $F = F_X$.

De l'autre côté si X est une v.a. alors F_X satisfait (1) – (4).

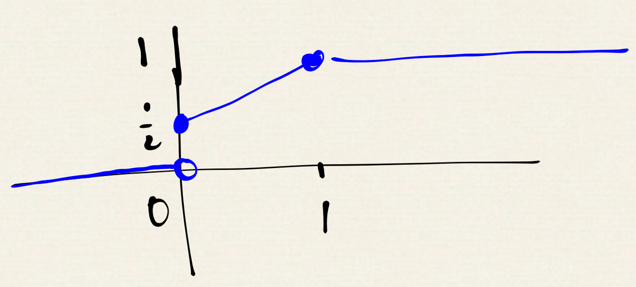
Et : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue à droite si $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$$

c-à-d : $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $y \in]x, x+\delta[$ alors

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

différence avec la limite normale.

a) 

On a : (1) F est CAD parce que :

* F continue à x si $x \neq 0$

* $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2} = F(0)$

(2) F est croissante

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$

(4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$

Donc F est une fonc. de répartition.

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + 2\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

partie entière

Solution * CAD parce que : $F = g \circ h$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est déf par $g(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$h(x) = \lfloor x \rfloor$.

Obs : g est continue, parce que $\frac{t}{1+2t}$ continue sur $[0, \infty[$ et $\frac{0}{1+2\cdot 0} = 0$

h est CAD donc F est la composition de deux fonc. CAD

donc F est CAD.

* F croissante : h est croissante.

g est croissante : $\left(\frac{t}{1+2t}\right)' = \frac{1\cdot(1+2t) - t\cdot 2}{(1+2t)^2} = \frac{1}{(1+2t)^2} \geq 0$

Donc F est la composition de deux fonc. croissantes.

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. * MAIS : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + 2\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{2}$. Donc F n'est pas une fonc. de répartition.

c) $F = \exp(-\exp(-x))$

Solution: * CAD : oui, composition de fonctions continue, donc F est continue donc aussi CAD.

* si $x \nearrow$, $\exp(-x) \searrow$, $-\exp(-x) \nearrow$, $\exp(-\exp(-x)) \nearrow$ donc F croissante

* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(-\exp(-x)) = \lim\limits_{x \to \infty} \exp(-\exp(x))$

$$= \lim_{x \to \infty} \exp(-x) = 0$$

* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(-\exp(-x)) = \lim\limits_{x \to 0} \exp(-x) = \exp(0) = 1.$

Donc F est une fonc. de répartition.

À 11^h35 : l'exo 7.5.

Exo 7.5. Soit X une v.a. réelle indépendante d'elle même.

a) Montrer que $F_X(x) \cdot (1 - F_X(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Solution : X est indép. d'elle même $\Rightarrow$ $\{X \leq x\}$ est indép. d'elle même $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{X \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)^2$$

Donc $\quad 0 = F_X(x) - F_X(x) = F_X(x) \cdot (1 - F_X(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) En déduire que $F_X = \mathbb{1}_{[c, +\infty[}$ pour une certaine $c \in \mathbb{R}$.

Qu'est-ce qu'on peut conclure sur X ?

Solution : Vu que $F_X(x) \cdot (1 - F_X(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $F_X(x)$ est 0 ou 1.

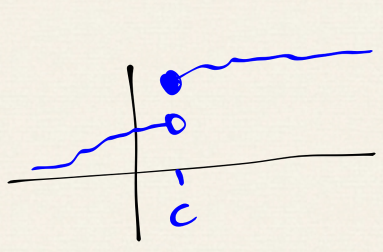
F_X croissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x < c \quad F_X(x) = 0$

$\forall x > c \quad F_X(x) = 1.$

Pour $F_X(c)$: F_X est CAD :

$$F_X(c) = \lim_{x \to c^+} F_X(x) = \lim_{x \to c^+} 1 = 1.$$



Donc $F_X = \mathbb{1}_{[c, +\infty[}$

Donc, $\quad \mathbb{P}(X = c) \overset{(\text{cours})}{=} F(c) - \lim\limits_{x \to c^-} F_X(x) = 1 - 0 = 1$

donc X est presque sûrement égale à c.

À 12h05 : l'exo 7.7.

Exo 7.7

X, Y deux v.a. réelles indéps.

$W = \max(X,Y)$, $Z = \min(X,Y)$.

Exprimer les fonc. F_W et F_Z en termes de F_X et F_Y.

Solution : $F_W(t) = \mathbb{P}(W \le t) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \le t) = \mathbb{P}(X \le t \text{ et } Y \le t)$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \le t) \cdot \mathbb{P}(Y \le t) = F_X(t) \cdot F_Y(t).$$

On a : $\{Z \le t\} = \{X \le t \text{ ou } Y \le t\}$.

$\{Z > t\} = \{X > t \text{ et } Y > t\}$

De plus : $\mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(Z \le t) = 1 - F_Z(t)$

$$= \mathbb{P}(X > t \text{ et } Y > t) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X > t) \cdot \mathbb{P}(Y > t)$$

$$= (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_Y(t))$$

Donc : $F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_Y(t)) = F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t) \cdot F_Y(t)$.

L'exo 7.11 : la prochaine fois.