TD 8

Nom: Bram Petri
e-mail: bram.petri@imj-prg.fr
Page web: webusers.imj-prg.fr/~bram.petri
↳ Teaching → Introduction to probability theory.

[L'exo 1.2 à 9h13.]

Exo 1.2

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} ;\ u_n \in \mathbb{R}\}$

a) $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{u \in E;\ u_n \in \{0,1\}\}}_{\text{suites dont le n-ème élément est 0 ou 1.}}$ = suites à valeurs dans $\{0,1\}$.

$= \{u\in E;\ u_n \in\{0,1\}\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

Si $A,B \subset \Omega$ alors $A\cap B = \{\omega\in\Omega;\ \omega\in A \text{ et } \omega\in B\}$

Donc, si on écrit: $A_n = \{u\in E;\ \boxed{u_n \in\{0,1\}}\}$

alors $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{u\in E;\ \boxed{u\in A_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}\}$

$= \{u\in E;\ u_n\in\{0,1\}\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

$B = \bigcap_{M\in\mathbb{R}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \underbrace{\{u\in E;\ u_m \geq M\}}_{m\text{-ème élt.} \geq M}$

après rang n tous les élts. sont $\geq M$.

$\{u\in E;\ \exists n \text{ t.q. } \forall m\geq n : u_m \geq M\}$

$B = \{u\in E;\ \forall M\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m\geq n : u_m \geq M\}$

= suites qui tendent vers $+\infty$

(Rappel: on dit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ssi $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m\geq n : u_m \geq M$)

$C = \bigcup_{M\in\mathbb{R}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{u\in E;\ u_n\geq M\}$

$= \bigcup_{M\in\mathbb{R}} \{u\in E;\ \forall n\in\mathbb{N} : u_n \geq M\}$

$= \{u\in E;\ \exists M\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N} : u_n\geq M\}$

= "suites minorées".

Exemple d'une intersection vide:

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{u\in E;\ u_3 \leq -n\}}_{Q_n}$

$u\in Q_1$ ssi $u_3 \leq -1$
donc par ex. chaque suite qui commence par $(\overset{u_0}{1}, \overset{u_1}{1}, \overset{u_2}{1}, \overset{u_3}{-3}, \ldots)$ est dans Q_1

$= \{u\in E;\ u_3\leq -n\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

$= \emptyset$.

b) $F =$ suites stationnaires.

$$= \{u \in E ;\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq m : u_n = u_m\}$$

$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{u \in E ;\ \forall n \geq m : u_n = u_m\}$$

$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \{u \in E ;\ u_n = u_m\}$$

$G =$ suites qui convergent

$$= \{u \in E ; \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell\}$$

$$= \{u \in E ;\ \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N\ |u_n - \ell| < \varepsilon\}$$

$$= \bigcup_{\underbrace{\ell \in \mathbb{R}}_{\text{pas dénombrable}}} \bigcap_{\underbrace{\varepsilon > 0}_{\text{pas dénombrable}}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{u \in E ;\ |u_n - \ell| < \varepsilon\}$$

__Rappel__ si X est une ensemble, alors X est dénombrable ssi $\exists$ bijection $f : \mathbb{N} \to X$ ou X est fini

__exemples__ : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^k$, $\mathbb{Q}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$

__non-exemples__ : $\mathbb{R}$, $]0,1[$, $[a,b]$ (avec $a<b$) $]0,+\infty[$

__Rappel__ : $*$ $u \in E$ converge ssi u est une suite de Cauchy

$*$ $u \in E$ est une suite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m,n \geq N\ \ |u_m - u_n| < \varepsilon$

__Donc__ :

$$G = \{u \in E ;\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m,n \geq N : |u_m - u_n| < \varepsilon\}$$

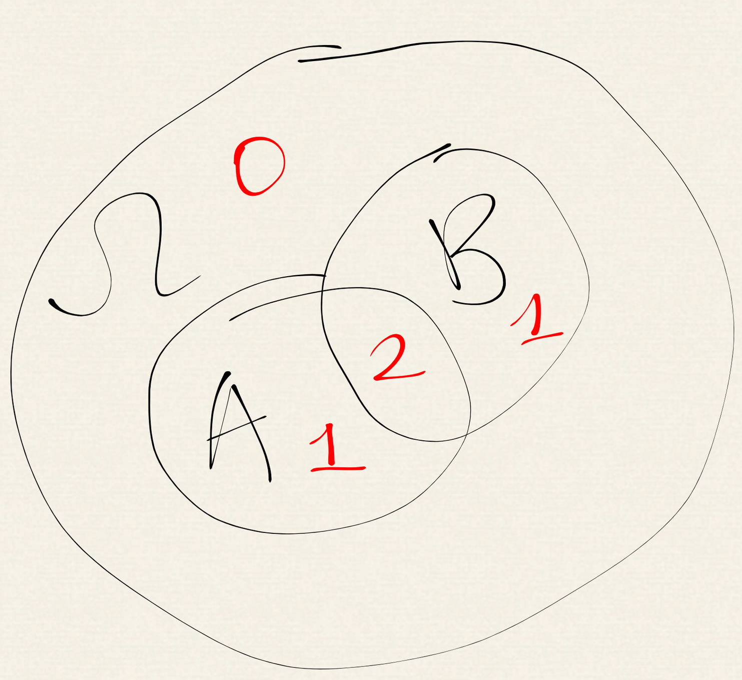
$$= \{u \in E ;\ \forall k \in \mathbb{N}^*\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m,n \geq N : |u_m - u_n| < \tfrac{1}{k}\}$$

$$= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m,n \geq N} \{u \in E ;\ |u_m - u_n| < \tfrac{1}{k}\}$$

__L'exo 1.3 à 10h20.__

__Exo 1.3__ $A, B \subset \Omega$. Les fonc suivantes, sont elles des fonc. indicatrices?

a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$



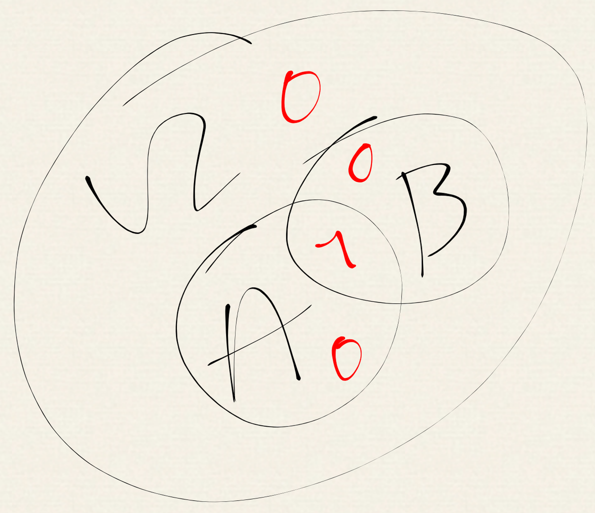
$$(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \text{ et } \omega \notin B \\ 1 & \omega \in A \text{ et } \omega \notin B \\ 1 & \omega \notin A \text{ et } \omega \in B \\ 2 & \omega \in A \cap B \end{cases}$$

__Donc__ : si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ n'est pas une fonc. ind.

si $A \cap B = \emptyset$

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}$$

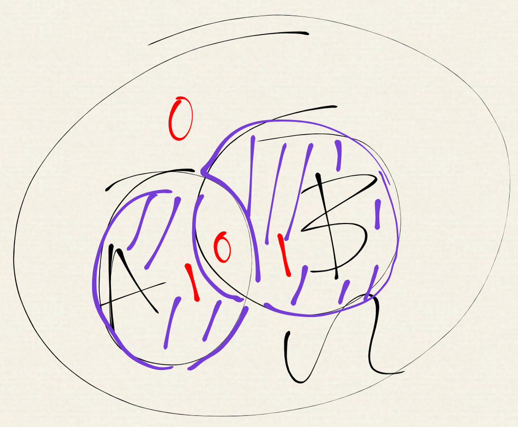
b) $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$



$$(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \cap B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega)$$

Obs : si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\emptyset}$ = fonction cste égale à 0.

c) $$|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A, \omega \notin B \\ 1 & \omega \in A, \omega \notin B \\ 1 & \omega \notin A, \omega \in B \\ 0 & \omega \in A \cap B \end{cases} = \mathbb{1}_{A \Delta B}(\omega)$$



Rappel: $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$

d) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \overset{(b)}{=} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

Donc : $$(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B})(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A, \omega \notin B \\ 1 & \omega \in A \quad \omega \notin B \\ 1 & \omega \notin A \quad \omega \in B \\ 1 & \omega \in A, \omega \in B \end{cases} = \mathbb{1}_{A\cup B}(\omega)$$

e) $$\max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A, \omega \notin B \\ 1 & \omega \in A \quad \omega \notin B \\ 1 & \omega \notin A \quad \omega \in B \\ 1 & \omega \in A \cap B \end{cases} = \mathbb{1}_{A\cup B}(\omega)$$

f) $$\min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A, \omega \notin B \\ 0 & \omega \in A, \omega \notin B \\ 0 & \omega \notin A, \omega \in B \\ 1 & \omega \in A \cap B \end{cases} = \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega)$$

$\boxed{\text{À } 11^h15 : \text{ Exo } 1.11}$

Rappel : Si $f : X \to Y$ est une fonct. et $W \subseteq Y$ alors $f^{-1}(W) = \{x \in X ;\ f(x) \in W\}$

Exo 1.11.

Ω un ensemble

a) Prouver que Ω n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subseteq \Omega\}$

Preuve : Par l'absurde, on suppose que
$$\varphi : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$$
est une bijection.

On considère $A = \{\underbrace{\omega}_{\text{élément de } \Omega} \in \Omega ;\ \omega \notin \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{sous-ensemble de } \Omega}\}$.

φ est bijective $\Rightarrow$ φ est surjective, donc $\exists\, a \in \Omega$ t.q. $\varphi(a) = A$.

Q'n : est-ce que $a \in A$?

Option 1 : oui, $a \in A$.

Mais, si $a \in A = \varphi(a)$ alors $a \notin A$ (parce que A est l'ens. d'éléments de Ω qui n'appartiennent pas à leur image sous φ) $\lightning$

Option 2 : $a \notin A$

Mais, si $a \notin A = \varphi(a)$ alors $a \in A$ $\lightning$ contradiction

Donc, φ ne peut pas être surjective $\square$

b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Preuve:

On veut montrer: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ni fini, ni en bijection avec $\mathbb{N}$.

* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pas fini parce que $\{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
* (a) $\Longrightarrow$ $\mathbb{N}$ n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\square$

À 12h00 : l'exo 1.6

Exo 1.6

Rappel : théorème binomial de Newton.

$a, b \in \mathbb{R}$: $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, 1^{n-k} = (1+-1)^n = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}.$$

$n = 0$: $\quad \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} \cdot (-1)^0 = 1.$

c) $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,\underbrace{(n-k)}_{=(n-1)-(k-1)}!} = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Solution alternative :

$$\frac{d}{dx}\left((1+x)^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

On met $x = 1$ et on obtient : $\quad \sum_{\substack{k=1 \\ k=0}}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$

d) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\underbrace{(n-k)!}_{=((n+1)-(k+1))!}} \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(-\binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

Alternative : $$\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{n+1} = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^t = \int_0^t (1+x)^n \, dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

On met $t = 1$: $\quad \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}.$