TD 8

Exo 5.3

On lance deux dés réguliers. Les deux résultats X_1 et X_2 sont indép et unif. sur $\{1,\dots,6\}$

On pose : $Y = X_1 + X_2$ et $Z = X_1 - X_2$

donc $Y : \Omega \to \{2,\dots,12\}$ et $Z : \Omega \to \{-5,\dots,5\}$

a) Y et Z ne sont pas indép.

Solution : Rappel : si $V, W : \Omega \to \mathbb{N}$ deux v.a. alors elles sont indépendantes

ssi : $\mathbb{P}(V \in A \text{ et } W \in B) = \mathbb{P}(V \in A)\,\mathbb{P}(W \in B) \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{N}$.

ssi : $\mathbb{P}(V = k \text{ et } W = m) = \mathbb{P}(V = k)\,\mathbb{P}(W = m) \quad \forall k, m \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}(Y = 12 \text{ et } Z = 5) = 0$.

$\mathbb{P}(Y = 12) = \mathbb{P}(X_1 = 6 \text{ et } X_2 = 6) \overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 = 6) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 6) = \frac{1}{36}$.

$\mathbb{P}(Z = 5) = \mathbb{P}(X_1 = 6 \text{ et } X_2 = 1) \overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 = 6) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{36}$

et $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \neq 0$

b) $\mathrm{Cov}(Y, Z)$

Solution : Rappel : $\mathrm{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}\big((Y - \mathbb{E}(Y)) \cdot (Z - \mathbb{E}(Z))\big) = \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(Z)$.

On a $\mathrm{Cov}(Y, Z) = \mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1) - \mathrm{Cov}(X_2, X_2) = 0$.

$=0$

$=0$

variance dépend que de la loi.

$*$ $\mathrm{Cov}(V, W) = \mathrm{Cov}(W, V)$

$*$ $\mathrm{Cov}(V, V) = \mathrm{Var}(V)$

c) La densité discrète de $|Z|$? $\mathbb{E}(|Z|)$?

Solution : $\Omega = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 ;\ 1 \leq i, j \leq 6\}$ $\mathbb{P}$ uniforme.

k	$\{(i,j) \in \Omega ;\ \lvert i-j \rvert = k\}$	Densité discrète $\mathbb{P}(\lvert Z \rvert = k)$
0	$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$	$6/36 = 1/6$
1	$\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (6,5), (5,6)\}$	$10/36 = 5/18$
2	$\{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)\}$	$8/36 = 2/9$
3	$\{(1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3)\}$	$6/36 = 1/6$
4	$\{(1,5), (5,1), (2,6), (6,2)\}$	$4/36 = 1/9$
5	$\{(1,6), (6,1)\}$	$2/36 = 1/18$

$\mathbb{E}[|Z|] = 0 \cdot \frac{3}{18} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2\,\frac{4}{18} + 3 \cdot \frac{3}{18} + 4 \cdot \frac{2}{18} + 5 \cdot \frac{1}{18} = \frac{35}{18}$.

L'exo 5.6 : à 9h40.

Exo 5.6 : On considère une famille d'urnes indexés par $\mathbb{N}^*$

Dans urne n° k : * 1 boule noire

* k boules jaunes.

On tire unif. au hasard une boule dans urne n° 1, une dans urne n° 2, ..

de manière indép.

T : la première fois qu'on tire une boule noire.

a) $\mathbb{P}(T>n) = \frac{1}{n+1}$ en déduire $\mathbb{P}(T=+\infty)=0$.

Solution : A_k = " on tire une boule jaune la k-ème fois". Obs: $\mathbb{P}(A_k) = \frac{k}{k+1}$ (k : # boules jaunes dans l'urne n° k ; k+1 : # boules dans l'urne n° k)

$$\mathbb{P}(T>n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Obs: $\{T>n+1\} \subseteq \{T>n\}$

Donc:

$$\mathbb{P}(T=+\infty) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq 1}\{T>n\}\Big) \overset{\text{continuité}}{=} \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T>n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

b) La densité discrète de T et $\mathbb{E}(T)$?

Solution : $\mathbb{P}(T=n) \overset{*}{=} \mathbb{P}(T>n-1) - \mathbb{P}(T>n)$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} p_T(k)\cdot k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\cdot k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty.$$

$$* \quad \mathbb{P}(T>n-1) = \sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(T=k)$$

$$\mathbb{P}(T>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(T=k) \quad -$$

$$\mathbb{P}(T>n-1) - \mathbb{P}(T>n) = \mathbb{P}(T=n)$$

alternative: 1 $\mathbb{P}(T>n-1) = \mathbb{P}(\{T>n\}\cup\{T=n\})$

$$= \mathbb{P}(T>n) + \mathbb{P}(T=n)$$

2: si $A\subset B$ alors: $\mathbb{P}(B\setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

et donc

$$\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(\{T>n-1\}\setminus\{T>n\})$$

$$= \mathbb{P}(T>n-1) - \mathbb{P}(T>n)$$

À 10^h25 : l'exo 5.8

Exo 5.8 : $X \sim \mathrm{Bin}(n,\frac{1}{2})$

Rappel : $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ alors $X:\Omega\to\{0,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Donc $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$.

a) X et n−X ont la même loi. En déduire que $\mathbb{P}(X-\frac{n}{2}\geq k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X-\frac{n}{2}|\geq k)$ pour $k>0$.

Solution : $n-X : \Omega \to \{0,\ldots,n\}$

$$\mathbb{P}(n-X=k) = \mathbb{P}(X=n-k) = \binom{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^n} = \binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(X=k) \quad \forall k\in\{0,\ldots,n\}.$$

Densités discrètes sont les mêmes $\Rightarrow$ même loi.

$k>0$: $\{|X-\frac{n}{2}|\geq k\} = \{X-\frac{n}{2}\geq k\} \cup \{\frac{n}{2}-X > k\}$ union disjointe si $k>0$

$$\mathbb{P}(|X-\tfrac{n}{2}|\geq k) = \mathbb{P}(X-\tfrac{n}{2}\geq k) + \mathbb{P}(\tfrac{n}{2}-X\geq k)$$

$$= \mathbb{P}(X-\tfrac{n}{2}\geq k) + \mathbb{P}((n-X)-\tfrac{n}{2}\geq k) \qquad (n-X)-\tfrac{n}{2} = \tfrac{n}{2}-X$$

$$\overset{n-X\sim X}{=} 2\,\mathbb{P}(X-\tfrac{n}{2}\geq k)$$

Donc $\mathbb{P}(X-\frac{n}{2}\geq k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X-\frac{n}{2}|\geq k)$

b) Prouver que pour $k>0$: $\mathbb{P}(X-\frac{n}{2}\geq k)\leq n/8k^2$.

Solution :

$$\mathbb{P}(X-\tfrac{n}{2}\geq k) = \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(|X-\tfrac{n}{2}|\geq k)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq k)$$

$$\overset{BT}{\leq} \frac{1}{2}\,\frac{n/4}{k^2} = n/8k^2$$

Rappel : si $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$ alors

$\mathbb{E}(X) = np$

$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Bienaymé – Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

c) En France: 700 000 naissances
355 000 garçons
345 000 filles

Hypothèse: un nouveau-né ait autant de chance d'être un garçon qu'une fille.
Q°: raisonnable.

Solution: Obs: $\frac{355\,000}{700\,000} \approx 0{,}507$

Si l'hypothèse est vrai: $\#\text{garçon} \sim \text{Bin}(700\,000, \frac{1}{2})$

et $\mathbb{P}(\#\text{garçons} \geq 355\,000) = \mathbb{P}(\#\text{garçons} - 350\,000 \geq 5000) \overset{(b)}{\leq} \frac{700\,000}{8 \cdot 5000^2} = 0{,}0035.$

Donc l'hypothèse semble très peu probable.

3.7 A_1, A_2, B trois événements

a) Si $\mathbb{P}(A_1|B) \geq \mathbb{P}(A_2|B)$ et $\mathbb{P}(A_1|B^c) \geq \mathbb{P}(A_2|B^c)$ alors $\mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_2)$

Sol: $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_1|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c) \geq \mathbb{P}(A_2|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_2|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)$

$= \mathbb{P}(A_2)$

c) A_1 = réussir cette année
A_2 = réussir l'année dernière

B = être un homme.

À 12h05: l'exo 5.9.

Exo 5.9 Urne indexés par $\mathbb{N}^*$
urne n° k: 1 boule noire
k boules jaunes

X_n = # boules noires tirées lors des premiers n tours

a) Justifier $X_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$ A_k = "k-ème boule est noire"

$\mathbb{E}(X_n)$?

Solution: $\mathbb{1}_{A_k} = 1$ si la k-ème boule est noire
0 sinon

Donc $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$ compte # boules noires, donc X_n.

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

$\leq$

b) $\text{Var}(X_n)$ et $\text{Var}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_n)$

Solution:
$$\text{Var}(X_n) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\right) \overset{\text{indép}}{=} \sum_{k=1}^n \text{Var}(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\cdot\underbrace{(1-\mathbb{P}(A_k))}_{\leq 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

si $X \sim \text{Bern}(p)$ $\text{Var}(X) = p(1-p)$.

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)^2}$$

c) $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)} \quad \forall \varepsilon > 0.$

Solution : Bienaymé–Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n)) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}(X_n)^2} \overset{(b)}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}(X_n)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}(X_n)}$$

d) On admet $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.

Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \,]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = 1.$$

Solution :

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \,]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = \mathbb{P}\big((1-\varepsilon) \cdot \mathbb{E}(X_n) < X_n < (1+\varepsilon) \cdot \mathbb{E}(X_n)\big)$$

$$= \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n))$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(X_n))$$

$$\overset{(c)}{\geq} 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$$

Gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \,]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\right) = 1$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n+2) - \ln(2) \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \ln(n+1)$

Conclure que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$.

Solution : (a) : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x+1}\, dx$$

parce que : si $x \in [k, k+1]$ alors $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{k+1}$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x+1}\, dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x+1}\, dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_{x=1}^{x=n+1} = \ln(n+2) - \ln(2)$$

$$\ln(n+1) = \int_0^n \frac{1}{x+1}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+1}\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k+1}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \mathbb{E}(X_n).$$