TD 8

NB : Changement d'horaires : dès aujourd'hui : $9^h00 - 12^h15$.

À 9^h20. 6.1 (a) et (b).

Exo 6.1

(a) $X \sim \mathrm{Bern}(p)$ $\quad p \in]0,1[$.

Solution : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \overset{FdT}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k$

converge toujours pour $s \in [-1,1]$

Donc $G_X(s) = \mathbb{P}(X=0) \cdot s^0 + \mathbb{P}(X=1) \cdot s^1$

$$= 1-p + p \cdot s$$

Converge pour tout $s \in \mathbb{R}$. (Rayon de conv : $+\infty$)

b) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ $\quad X : \Omega \longrightarrow \{0,1,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Solution 1 : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \overset{FdT}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(p \cdot s)}_{a}{}^k \underbrace{(1-p)}_{b}{}^{n-k}$$

Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$= (1-p+ps)^n$$

Converge pour tout $s \in \mathbb{R}$ (Rayon de conv. $+\infty$)

Solution 2 : Rappel : si $X_1, \dots, X_n$ sont indép. et $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$ pour $i = 1, \dots, n$.

Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

Donc $G_X(s) = G_{X_1+\dots+X_n}(s)$

$$= G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2}(s) \cdots G_{X_n}(s)$$

$$\overset{(a)}{=} (1-p+p\cdot s)^n$$

Rappel : si X, Y v.a. indép, alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$

Cela donne aussi une preuve du fait que $X_1 + \dots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ en utilisant le fait que la fonc. gén. détermine la loi.

À $10^h 15$: (c) et (d)

(c) $X \sim \text{Géom}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

Solution : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot s^k$$

$$= p\, s \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} s^{k-1}$$

$$\overset{m=k-1}{=} p\, s \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left((1-p)\cdot s\right)^m}_{|(1-p)\cdot s| < 1}$$

$$= p \cdot s \cdot \frac{1}{1-(1-p)\cdot s} = \frac{p\,s}{1-(1-p)\cdot s}$$

Rayon de conv. $\frac{1}{1-p}$ (>1)

(d) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$

Solution : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot s^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot s)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Rayon de conv. $+\infty$.

Déf Rayon de conv. de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ où $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
est $\sup\{ r > 0 ; \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ converge pour tout $s \in]-r, r[\}$

ex. rdc de : $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ est 1. parce que
la somme converge ssi $s \in]-1, 1[$.

À $10^h 50$: l'exo 6.5

Exo 6.5 : X, Y v.a. indép $X \sim Poi(\lambda_1)$, $Y \sim Poi(\lambda_2)$.

$G_{X+Y}(s)$?

Solution :
$$G_{X+Y}(s) \overset{\text{indép.}}{=} G_X(s) \cdot G_Y(s) \overset{(6.1)}{=} e^{\lambda_1 \cdot (s-1)} e^{\lambda_2 \cdot (s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(s-1)}$$

Obs. 6.1 si $Z \sim Poi(\lambda_1+\lambda_2)$

alors $G_Z(s) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(s-1)} = G_{X+Y}(s)$

La fonc. gén. caractérise la loi, donc

$$X+Y \sim Poi(\lambda_1+\lambda_2).$$

À $11^h 11$: l'exo 6.6.

Exo 6.6 : $X_1, \dots, X_n$ v.a. indép. t.q. $X_i \sim Bern(\frac{\lambda}{n})$

$Y_n = X_1 + \dots + X_n$

a) La fonc. gén de Y_n.

Solution : Obs : $Y_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$

Donc par (6.1) : $G_{Y_n}(s) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} s\right)^n$

b) $\lim_{n \to +\infty} G_{Y_n}(s)$.

Solution :
$$\lim_{n\to+\infty} G_{Y_n}(s) \overset{(a)}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} s\right)^n$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\ln\left(1 + \underbrace{\frac{\lambda(s-1)}{n}}_{u}\right) \cdot n\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\left(\underbrace{\frac{\lambda(s-1)}{n}}_{u} + \underbrace{o\left(\frac{\lambda(s-1)}{n}\right)}_{o(u)}\right) \cdot n\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\lambda(s-1) + o(1)\right) = \exp(\lambda \cdot (s-1))$$

Indication :
$$\ln(1+u) \overset{u \downarrow 0}{=} u + o(u)$$

Rappel : c-à-d :
$$\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u) - u}{u} = 0$$

$f(u) = o(1)$ quand $u \to 0$ veut dire : $\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{1} = 0$ $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$

On a prouvé $\lim_{n\to\infty} G_{Y_n}(s) = \exp(\lambda.(s-1))$

Obs : $*$ $\exp(\lambda.(s-1))$ est la fonc. gén. d'une var. $Poi(\lambda)$.

$*$ Vu dans le cours : si on fixe $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \mathbb{P}(Z = k)$$

si $Z \sim Poi(\lambda)$.

À 11h50 : l'exo 6.8.

Exo 6.8 : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. indép. et de même loi dans $\mathbb{N}$.

Y v.a. indép de la collection $\{X_1, X_2, \dots\}$

$$W = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

a) Exprimer $G_{X_1+\dots+X_n}(s)$ en termes de G_{X_1}

Solution : $G_{X_1+\dots+X_n}(s) \overset{\text{indép.}}{=} G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2}(s) \cdots G_{X_n}(s)$

$\overset{\text{même loi}}{=} (G_{X_1}(s))^n$.

b) Pour $s \geq 0$ calculer $\mathbb{E}(s^W . \mathbb{1}_{\{Y=n\}})$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $G_W(s) = G_Y(G_{X_1}(s))$.

Solution :

$$\mathbb{E}(s^W . \mathbb{1}_{\{Y=n\}}) \overset{*}{=} \mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_n} . \mathbb{1}_{\{Y=n\}})$$

$$\overset{\text{indép}}{=} \underbrace{\mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_n})}_{G_{X_1+\dots+X_n}(s)} . \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=n\}})$$

$$\overset{(a)}{=} (G_{X_1}(s))^n . \mathbb{P}(Y=n)$$

$*$ Obs : les fonc.

$s^W . \mathbb{1}_{\{Y=n\}} : \Omega \to \mathbb{R}$

$s^{X_1+\dots+X_n} . \mathbb{1}_{\{Y=n\}} : \Omega \to \mathbb{R}$

sont égales : si $w \in \Omega$

$$s^W . \mathbb{1}_{\{Y=n\}}(w) = \begin{cases} 0 & Y(w) \neq n \\ s^{X_1(w)+\dots+X_n(w)} & Y(w) = n \end{cases}$$

$$s^{X_1+\dots+X_n} . \mathbb{1}_{\{Y=n\}}(w) = \begin{cases} 0 & Y(w) \neq n \\ s^{X_1(w)+\dots+X_n(w)} & Y(w) = n \end{cases}$$

Donc : $G_W(s) = \mathbb{E}(s^W 1) = \mathbb{E}(s^W . \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y=n\}}}_{=1})$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^W \mathbb{1}_{\{Y=n\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (G_{X_1}(s))^n . \mathbb{P}(Y=n) \overset{FdT}{=} \mathbb{E}((G_{X_1}(s))^Y) = G_Y(G_{X_1}(s))$$ si $G_{X_1}(s) \in [-1,1]$.

FdT $\mathbb{E}(f(Y)) = \sum_n \mathbb{P}(Y=n) \cdot f(n)$

Fait : Si $Z_1, Z_2, \dots$ sont des v.a. t.q. $0 \leq \mathbb{E}(Z_i) < +\infty$ $\forall i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z_i) < +\infty$ alors $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{\infty} Z_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z_i)$