TD 8

Exo 6.8. $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. indép. de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$

Y v.a. indép de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$W = \sum_{i=1}^{Y} X_i$

Rappel: * si $Z : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. alors $G_Z(s) = \mathbb{E}(s^Z) \overset{FdT}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z=k)\cdot s^k$

* si Z_1, Z_2 v.a. indép. alors $G_{Z_1+Z_2}(s) = G_{Z_1}(s)\cdot G_{Z_2}(s)$

a) $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = (G_{X_1}(s))^n$

b) $\mathbb{E}(s^W \mathbb{1}_{\{Y=n\}}) = (G_{X_1}(s))^n \cdot \mathbb{P}(Y=n)$

$\Rightarrow$ si $s\geq 0$ alors $G_W(s) = G_Y(G_{X_1}(s))$

la dernière fois.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(W)$ en termes de $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X_1)$

Solution :

Rappel: Z v.a. alors $\mathbb{E}(Z) = \lim_{s\to 1^-} G_Z'(s)$

Donc $\mathbb{E}(W) \underset{(cours)}{=} \lim_{s\to 1^-} G_W'(s) \overset{(b)}{=} \lim_{s\to 1^-} \left(G_Y(G_{X_1}(s))\right)' = \lim_{s\to 1^-} G_Y'(G_{X_1}(s))\cdot G_{X_1}'(s)$

On a : $G_{X_1}(1) = 1$. Donc :

$$\mathbb{E}(W) = \lim_{t\to 1^-} G_Y'(t) \cdot \lim_{s\to 1^-} G_{X_1}'(s) = \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1)$$

Preuves du fait que $G_{X_1}(1)=1$)

$G_{X_1}(s) = \mathbb{E}(s^{X_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1=k)\cdot s^k$

* $G_{X_1}(1) = \mathbb{E}(1^{X_1}) = \mathbb{E}(1) = 1.$

la v.a. cste égale à 1.

* Alternativement: $G_{X_1}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1=k)\cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1=k) = 1.$

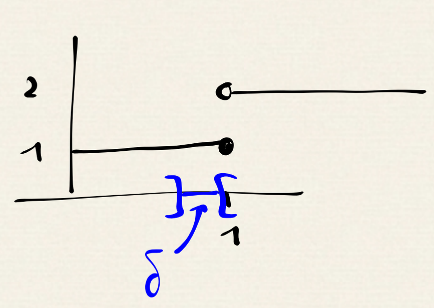
Rappel: $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

"$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a$" veut dire que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $x \in]1-\delta, 1[$ alors $|f(x) - a| < \varepsilon$

Comparaison: $\lim_{x\to 1} f(x) = a$: " " si $x \in]1-\delta, 1+\delta[$ " "

Exemple:



$f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ déf par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $\mathbb{E}(W\cdot(W-1))$ et $\mathrm{Var}(W)$

Solution:

Rappel: Z v.a. alors $\mathbb{E}(Z(Z-1)) = \lim_{s\to 1^-} G_W''(s)$

Donc : $\mathbb{E}(W\cdot(W-1)) = \lim_{s\to 1^-} \left(G_Y(G_{X_1}(s))\right)'' = \lim_{s\to 1^-} \left(G_Y'(G_{X_1}(s))\cdot G_{X_1}'(s)\right)' = \lim_{s\to 1^-} G_Y''(G_{X_1}(s))\cdot (G_{X_1}'(s))^2 + G_Y'(G_{X_1}(s))\cdot G_{X_1}''(s)$

$= \lim_{t\to 1^-}\lim_{s\to 1^-} G_Y''(t)\cdot (G_{X_1}'(s))^2 + G_Y'(t)\cdot G_{X_1}''(s) = \mathbb{E}(Y(Y-1))\cdot\mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1\cdot(X_1-1))$

$= \mathbb{E}(Y^2)\cdot\mathbb{E}(X_1)^2 - \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(Y^2)\cdot\mathbb{E}(X_1)^2 - \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(Y)\cdot\mathrm{Var}(X_1)$

Donc: $\mathrm{Var}(W) = \mathbb{E}(W^2) - \mathbb{E}(W)^2 = \mathbb{E}(W\cdot(W-1)) + \mathbb{E}(W) - \mathbb{E}(W)^2 = \boxed{\mathbb{E}(Y^2)\cdot\mathbb{E}(X_1)^2} - \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(Y)\cdot\mathrm{Var}(X_1)$

$+ \mathbb{E}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1) - \boxed{\mathbb{E}(Y)^2\cdot\mathbb{E}(X_1)^2} = \mathbb{E}(Y)\cdot\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Y)\cdot\mathbb{E}(X_1)^2$

e) $X_i \sim \text{Bern}(p)$, $p \in]0,1[$

Determiner la loi de W si

i) $Y \sim \text{Poi}(\lambda)$

ii) $Y \sim \text{Géom}_0(q)$

Déf: $Y \sim \text{Géom}_0(q)$ $\quad Y : \Omega \to \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Y=k) = (1-q)^k\, q \qquad k \in \mathbb{N}$$

Donc: $G_Y(s) = \mathbb{E}(s^Y) \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k)\cdot s^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k \cdot q \cdot s^k$

$$= q \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-q)\cdot s\right)^k = q \cdot \frac{1}{1-(1-q)\cdot s}$$

Solution: $G_{X_1}(s) \overset{(6.1)}{=} 1-p+ps.$

Donc $G_W(s) = G_Y(G_{X_1}(s)) = G_Y(1-p+p\cdot s)$

i) $Y \sim \text{Poi}(\lambda)$ donc $G_Y(s) = e^{\lambda\cdot(s-1)}$ $\quad$ (6.1)

$$G_W(s) = e^{\lambda\cdot(1-p+ps-1)} = e^{\lambda p(s-1)}$$ donc $W \sim \text{Poi}(\lambda \cdot p)$

ii) $Y \sim \text{Géom}_0(q)$

Donc: $G_Y(s) = \dfrac{q}{1-(1-q)\cdot s}$

donc $$G_W(s) = \frac{q}{1-(1-q)\cdot(1-p+ps)} = \frac{q}{1-(1-p+ps-q+qp-qps)} = \frac{q}{p+q-qp-ps+qps}$$

$$= \frac{q/(p+q-qp)}{1-\frac{p-qp}{p+q-qp}\cdot s} = \frac{q/(p+q-qp)}{1-\frac{p+q-qp-q}{p+q-qp}\, s} = \frac{q/(p+q-qp)}{1-\left(1-\frac{q}{(p+q-qp)}\right)\cdot s}$$

Donc: $W \sim \text{Géom}_0\left(\dfrac{q}{p+q-qp}\right)$

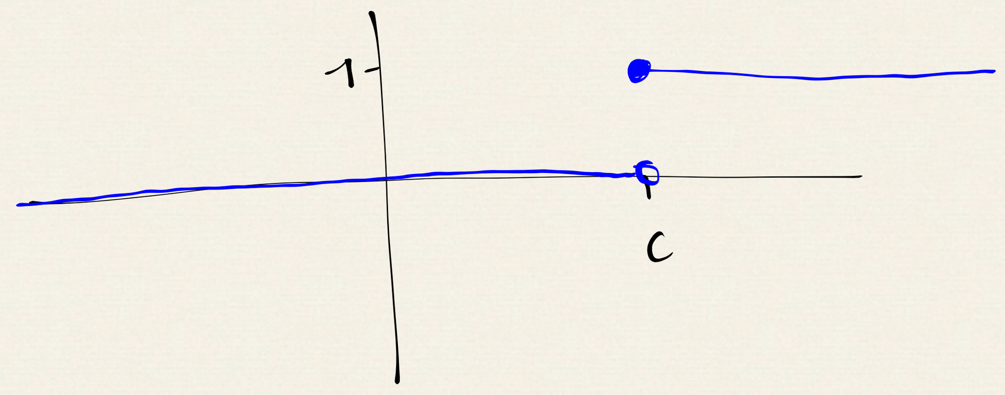
À 10^h20 : l'exo 7.1.

Exo 7.1

le graphe de $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

a) X v.a. constante égale à $c \in \mathbb{R}$.

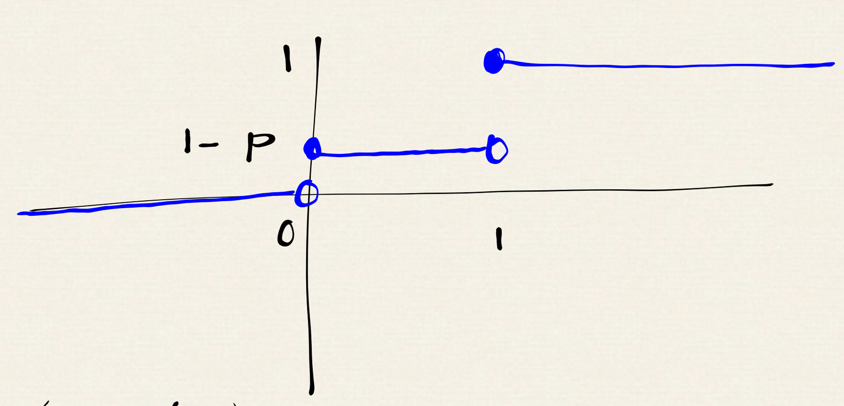
Solution: $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$



b) $X \sim \text{Bern}(p)$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

exemple: $\mathbb{P}(X \leq 2) = 1$



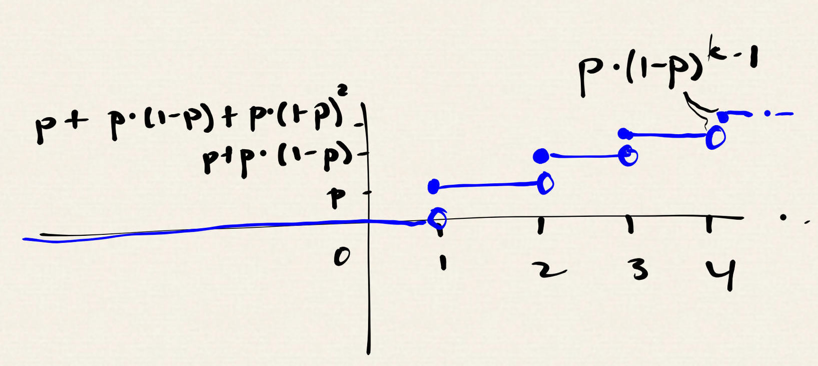
c) $X \sim \text{Géom}(p)$

partie entière de x

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} p\cdot(1-p)^{k-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

$\|$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{\text{valeurs } k \text{ poss.} \\ \text{de } X \text{ t.q. } k \leq x}} \mathbb{P}(X=k)$$



À 10^h55 : l'exo 7.2.

$x \geq y$
$\mathbb{P}(X \leq x) \geq \mathbb{P}(X \leq y)$

"$\mathbb{P}(X \leq -\infty) = 0$" "$\mathbb{P}(X \leq +\infty) = 1$"

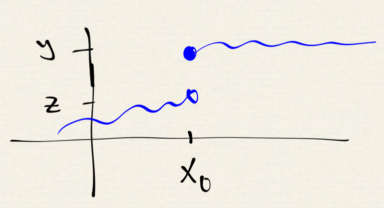
Rappel (cours) : Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, continue à droite et t.q. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
Alors il existe une v.a. X t.q. $F = F_X$. $\mathbb{P}(X \leq x)$

* Continue : $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

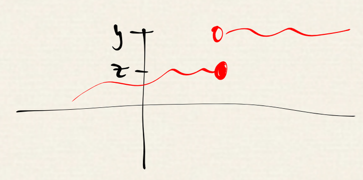
Continue à droite : $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Donc formellement : $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ t.q. $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\ : \ |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$.

(pour une limite normale : $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$)



Continue à droite mais pas continue



Continue à gauche mais pas à droite.

$\lim_{x \to x_0^-} F(x) = z \neq y$

$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = y = F(x_0)$

$\lim_{x \to x_0^-} F(x) = z = F(x_0)$

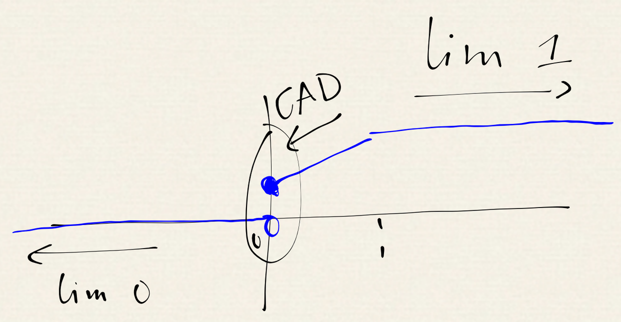
$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = y \neq z$

Exo 7.2

Est la fonction une fonction de répartition ?

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Solution



Oui : parce que :

* croissante : si $x \leq y \in [0,1]$ alors $F(y) - F(x) = \frac{y+1}{2} - \frac{x+1}{2} = \frac{y-x}{2} \geq 0$

et aussi vrai si x ou $y \notin [0,1]$

* CAD : continue partout sauf à $x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} = F(0)$. Donc CAD partout

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$

* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + 2\lfloor x \rfloor} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

* Croissante : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante

$t \mapsto \frac{t}{1+2t}$ est aussi croissante

$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+2t}\right) = \frac{(1+2t) \cdot 1 - t \cdot 2}{(1+2t)^2} = \frac{1}{(1+2t)^2} \geq 0$

Donc F est une composition de deux fonc. croissantes et donc croissante.

* CAD : $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ CAD

$t \mapsto \frac{t}{1+2t}$ continue $(t \geq 0)$

donc F est CAD.

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$

* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + 2 \cdot \lfloor x \rfloor} = \frac{1}{2}$ ↯

$= \frac{\frac{1}{2} + \lfloor x \rfloor}{1 + 2\lfloor x \rfloor} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + 2\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 + 4\lfloor x \rfloor}$

Donc F n'est pas une fonc. de répartition.

c) $F(x) = \exp(-\exp(-x))$

Solution : * Croissante : si $x \nearrow$ alors $\exp(-x) \searrow$ et donc $-\exp(-x) \nearrow$

et donc $F(x) = \exp(-\exp(-x)) \nearrow$.

* CAD : composition de foncs continues donc CAD.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(-\exp(-x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(-\underbrace{\exp(x)}_{\substack{\to +\infty \\ \text{si } x \to +\infty}}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(-x)$

$= 0$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(-\underbrace{\exp(-x)}_{\substack{\to 0 \\ \text{si } x \to +\infty}}) = \lim\limits_{x \to 0} \exp(-x) = 1$.

À 11^h50 : l'exo 7.5

Exo 7.5 X v.a. indép. d'elle même.

a) $F_X(x) \cdot (1 - F_X(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Solution : $\{X \leq x\}$ indép de lui-même.

Donc : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{X \leq x\})$

$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)^2$

Donc $0 = F_X(x) - F_X^2(x) = F_X(x) \cdot (1 - F_X(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $F_X = \mathbb{1}_{[c, +\infty[}$ et qu'est-ce qu'on peut dire de X ?

Solution : $F_X(x) \cdot (1 - F_X(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $F_X(x) = 0$ ou $F_X(x) = 1$

Obs : si $F_X(x) = 1$ et $y \geq x$ alors, vu que F_X est croissante,

$F_X(y) = 1. \Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \cancel{\cup \{\pm\infty\}}$ t.q.

si $x > c$ alors $F_X(x) = 1$

si $x < c$ alors $F_X(x) = 0$

$c \neq +\infty$ parce que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

$c \neq -\infty$ parce que $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

CAD $F_X(c) = \lim\limits_{x \to c^+} F_X(x)$

$= \lim\limits_{x \to c^+} 1 = 1$

Donc $F_X = \mathbb{1}_{[c, +\infty[}$

On a $\mathbb{P}(X = c) = \left(\lim\limits_{x \to c^+} F_X(x)\right) - \left(\lim\limits_{x \to c^-} F_X(x)\right) = 1 - 0 = 1$ donc X presque surement égale à c.

si $x > y$

$$F_X(x) - F_X(y) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(y < X \leq x)$$

$$\lim_{x \to c^+} F_X(x) - \lim_{y \to c^-} F_X(x) = \lim_{\substack{x \to c^+ \\ y \to c^-}} \mathbb{P}(y < X \leq x) = \mathbb{P}(X = c)$$

Le 7.7 et 7.11 la prochaine fois.