TD 8

Exo 7.7 X, Y v.a. réelles indép. $W = \max(X,Y)$, $Z = \min(X,Y)$

F_W et F_Z en termes de F_X et F_Y.

Solution : Rappel : $F_W(x) = \mathbb{P}(W \leq x)$.

Donc $F_W(x) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x \text{ et } Y \leq x)$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq x) = F_X(x) \cdot F_Y(x).$$

$$\{Z \leq x\} = \{X \leq x \text{ ou } Y \leq x\}$$

mais $\{Z > x\} = \{X > x \text{ et } Y > x\}$

$$1 - F_Z(x) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(X > x \text{ et } Y > x)$$

$$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X > x) \cdot \mathbb{P}(Y > x) = (1 - F_X(x)) \cdot (1 - F_Y(x))$$

$$F_Z(x) = 1 - (1 - F_X(x)) \cdot (1 - F_Y(x)) = F_X(x) + F_Y(x) - F_X(x) \cdot F_Y(x).$$

À 9^h30 : l'exo 7.11.

Exo 7.11 X v.a. réelle, Y v.a. de loi $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$.

indép. $Z = X \cdot Y$

La fonc. gén. de moments M_Z en termes de M_X.

Solution : Rappel : $M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ})$

Donc
$$M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tXY}) = \mathbb{E}\left(e^{tXY} \cdot \left(\mathbb{1}_{\{Y=1\}} + \mathbb{1}_{\{Y=-1\}}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{tXY} \cdot \mathbb{1}_{\{Y=1\}}\right) + \mathbb{E}\left(e^{tXY} \cdot \mathbb{1}_{\{Y=-1\}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{tX} \cdot \mathbb{1}_{\{Y=1\}}\right) + \mathbb{E}\left(e^{-tX} \cdot \mathbb{1}_{\{Y=-1\}}\right)$$

Fait si X, Y v.a. réelles indép. et $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ indép.

$\mathbb{1}_{\{Y=1\}} \sim \mathrm{Bern}(\frac{1}{2})$ $\qquad$ $\mathbb{1}_{\{Y=-1\}} \sim \mathrm{Bern}(\frac{1}{2})$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{E}(e^{tX}) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=-1\}})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(M_X(t) + M_X(-t)\right)$$

$\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$.

Donc :
$\mathbb{P}(f(X) \in A \text{ et } g(Y) \in B)$
$= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A) \text{ et } Y \in g^{-1}(B))$
$= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) \cdot \mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B))$
$= \mathbb{P}(f(X) \in A) \cdot \mathbb{P}(g(Y) \in B)$

Détails techniques : $\forall A, B$ mesurable, il faut supposer que f, g sont mesurables.

À 10^h05 : l'exo 8.3.

Exo 8.3 $\quad U \sim \mathrm{Unif}(]0,1[)$ $\quad$ (Rappel : $\mathbb{P}(U\in A) = \int_A \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx \quad, A\subseteq\mathbb{R}$)

a) $n\in\mathbb{N}^*$, $\lfloor n\cdot U\rfloor$ est unif sur $\{0,1,\dots,n-1\}$

Solution : $\lfloor n\cdot U\rfloor : \Omega \to \{0,1,\dots,n-1\}$ $\quad$ c-à-d : $\lfloor nU\rfloor$ est à valeurs dans $\{0,\dots,n-1\}$

$$\mathbb{P}(\lfloor nU\rfloor = k) = \mathbb{P}(nU\in[k,k+1[) = \mathbb{P}\left(U\in\left[\tfrac{k}{n},\tfrac{k+1}{n}\right[\right)$$

$$= \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx = \int_{k/n}^{(k+1)/n} dx = \frac{k+1}{n}-\frac{k}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall k\in\{0,\dots,n-1\}$$

Donc $\lfloor nU\rfloor$ est unif. sur $\{0,\dots,n-1\}$.

b) $a>0$, déterminer la loi de $-\frac{1}{a}\ln(U)$.

Solution. U à valeurs dans $]0,1[$ donc $\ln(U)$ à val. $\in]-\infty,0[$ donc $-\frac{1}{a}\ln(U)$ à val. $\in]0,+\infty[$

Méthode 1 : La fonc. de répartition.

$$F(t) = \mathbb{P}\left(-\tfrac{1}{a}\ln(U)\le t\right) = \begin{cases} 0 & t\le 0 \\ \mathbb{P}(\ln(U)\ge -at) & t>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t\le 0 \\ \mathbb{P}(U\ge e^{-at}) & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t\le 0 \\ \int_{\underbrace{e^{-at}}_{<1}}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx & t>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t\le 0 \\ 1-e^{-at} & t>0 \end{cases}$$

Donc $-\frac{1}{a}\ln(U)$ est une v.a. exponentielle de param. a.

Méthode 2 : En utilisant la formule de transfert.

Rappel (Cours) : Une v.a. X est absolument continue et admet pour densité f_X ssi

$\forall h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et bornée on a

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\cdot f_X(x)\,dx.$$

Donc on suppose que $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, bornée.

$$\mathbb{E}\left(h\left(-\tfrac{1}{a}\ln(U)\right)\right) \overset{\text{FdT pour } U}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(-\tfrac{1}{a}\ln(x)\right)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx = \int_0^1 h\left(-\tfrac{1}{a}\ln(x)\right)dx$$

$$= -\int_0^{\infty} h(y)\cdot -a e^{-ay}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\cdot a e^{-ay}\cdot\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\,dy$$

$x = e^{-ay}$

$y = -\frac{1}{a}\ln(x)$

$dx = \frac{dx}{dy}dy = -a\cdot e^{-ay}$

bornes : $x=0 \to y \text{ "="} \infty$

$x=1 \to y=0$

Donc la densité de $-\frac{1}{a}\ln(U)$ est $a\cdot e^{-ay}\cdot\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$.

donc elle est exponentielle de param. a.

À 11h10 : l'exo 8.5.

Exo 8.5.

X v.a. à densité f_X

Déterminer si les v.a. suivantes sont à densité et déterminer la densité.

a) $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha \cdot X + \beta = Y$

Solution :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-\beta}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)$$

Donc $F_Y(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\beta}{\alpha}} f_X(y)\, dy$

donc on change la var. $\quad y = \frac{x-\beta}{\alpha} \Rightarrow$

bornes : $-\infty \longrightarrow -\infty$

$y = \frac{t-\beta}{\alpha} \rightsquigarrow x = t$

$dy = \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{\alpha} dx$

Donc $F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\alpha}\, dx$

Donc Y est à densité $f_Y(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot f_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)$

b) $Y = e^X$.

Solution : $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée

$$\mathbb{E}(h(Y)) \overset{\text{FdT pour } X}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(e^x) \cdot f_X(x)\, dx$$

Changement de variables :

$y = e^x \qquad x = \ln(y)$

bornes : $x = -\infty \rightsquigarrow y = 0$

$x = \infty \rightsquigarrow y = \infty$

$dx = \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{y} dy$

$$= \int_0^{\infty} h(y) \cdot \frac{1}{y} f_X(\ln(y))\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)\, dy.$$

Donc Y est à densité $f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)$.

c) $Y = X^2$.

Solution : $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(x)\, dx & \end{cases}$

$$\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{t}} f_X(x)\, dx + \int_{-\sqrt{t}}^{0} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^t f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy - \int_0^t f_X(-\sqrt{y}) \cdot -\frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \int_0^t \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

1ère intégrale :

$\sqrt{y} = x \qquad x^2 = y$

bornes : $0 \to 0$

$\sqrt{t} \to t$

$dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

2ème

$x = -\sqrt{y}$

bornes : $0 \rightsquigarrow 0$

$-\sqrt{t} \rightsquigarrow t$

$dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} dy = \frac{-1}{2\sqrt{y}} dy$

Donc : $F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\, dy$

Donc Y est à densité $f_Y(y) = \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$.

d) $Y = |X|$.

Solution : $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée continue.

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(|X|)) \overset{\text{FdT pour } X}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(|x|)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} h(x) f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} h(-x)\, f_X(x)\, dx.$$

$$= \int_0^{\infty} h(x) f_X(x)\,dx - \int_0^{\infty} h(y) \cdot -1 \cdot f_X(-y)\, dy$$

Changement de var. pour la 2ème int.

$y = -x$

bornes : $-\infty \rightsquigarrow \infty$

$0 \rightsquigarrow 0$

$dx = \frac{dx}{dy}\, dy = -dy$

$$= \int_0^{\infty} h(x) f_X(x)\,dx + \int_0^{\infty} h(x) f_X(-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot \left(f_X(x) + f_X(-x)\right) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\, dx.$$

Y à densité $\left(f_X(x) + f_X(-x)\right) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

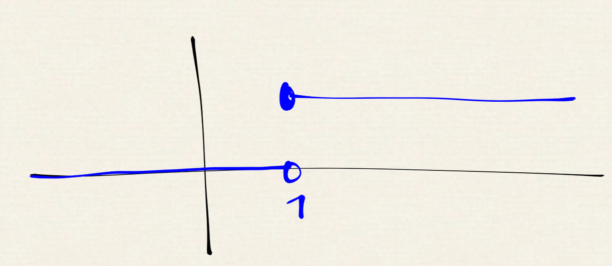
Exemple :

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est déf par $h(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

X v.a. réelle à densité.

$h(X)$ v.a. avec $\mathbb{P}(h(X) = 1) = 1$

donc $F_{h(X)}(t) = \mathbb{P}(h(X) \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$



$\nexists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $\int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$

À 12h00 : l'exo 8.8.

Exo 2.2:

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

a) $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) \quad t \in \mathbb{R}.$

Solution:

$$M_X(t) \overset{\text{FdT}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{f_X(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty} e^{-\frac{x^2-2tx}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2-t^2}{2}} dx = e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx$$

Changement de var.

$y = x - t$

$dx = \frac{dx}{dy} dy = dy$

bornes ne changent pas.

$$= e^{t^2/2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}}_{\text{densité d'une v.a. } \sim \mathcal{N}(0,1)} dy}_{= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1} = e^{t^2/2}$$

b) $\mathbb{E}(X^k)$?

Solution:

Rappel $M_X(t) \overset{\text{FdT}}{=} \int_{-\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tx)^k f_X(x)\, dx$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\, dx \overset{\text{FdT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}(X^k)$$

$$M_X(t) = e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{t^{2k}}{2^k}$$

Donc tous les coefficients devant les puissances de t sont les mêmes.

Donc: si k est impaire: $\mathbb{E}(X^k) = 0.$

si $k = 2m$: $\frac{1}{(2m)!} \mathbb{E}(X^{2m}) = \frac{1}{m!} \frac{1}{2^m}$

$$\text{donc } \mathbb{E}(X^{2m}) = \frac{(2m)!}{m!\, 2^m} = \frac{2m\,(2m-1)\cdots 2 \cdot 1}{m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 2^m} = \frac{2m\,(2m-1) \cdots 2 \cdot 1}{2m\,(2m-2) \cdots 4 \cdot 2}$$

$$= (2m-1)(2m-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

c) la prochaine.