TD 8:

Rappel: Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire et il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx$$

Alors X est une v.a. à densité f_X.

Exo 8.8

$X \sim N(0,1)$. Rappel: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

a) Calculer $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$. Solution: $M_X(t) = e^{t^2/2}$

b) En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ $\forall k \geq 0$. Solution: $\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} 0 & k \text{ impaire} \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & k = 2m, m \in \mathbb{N} \end{cases}$ la dernière fois.

c) Soit $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

i) la loi de $\frac{1}{\sigma}(Y - \mu)$?

ii) En déduire $M_Y(t)$.

Solution: Rappel: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. S'il existe une fonc. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx \qquad \text{(Formule de transfert)}$$

alors X est à densité f.

i) Donc on prend h continue et bornée

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{1}{\sigma} \cdot (Y - \mu)\right)\right) \overset{\text{FdT pour } Y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{1}{\sigma}(y - \mu)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma x)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sigma\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

Changement de var.

$x = \frac{1}{\sigma}(y - \mu)$, $y = \sigma x + \mu$

bornes: ne changent pas

$dy \leadsto \frac{dy}{dx} dx = \sigma\, dx$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est la densité d'une v.a. $N(0,1)$.

Donc $\frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim N(0,1)$.

ii) $M_Y(t)$? $\qquad \mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{\sigma}(Y-\mu)t}\right) = M_{\frac{1}{\sigma}(Y-\mu)}(t) \overset{(a)}{=} e^{t^2/2}$ $\qquad$ But: $\mathbb{E}(e^{tY})$

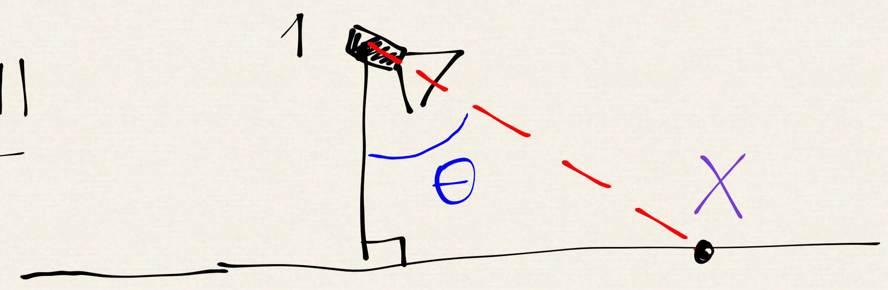
$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{\sigma}tY} e^{-\mu t/\sigma}\right) = e^{-\mu t/\sigma}\, \mathbb{E}\left(e^{(t/\sigma) \cdot Y}\right)$$

Donc si on met $t' = t/\sigma$:

$$M_Y(t') \cdot e^{-\mu t'} = e^{(\sigma t')^2/2} \qquad \text{donc: } M_Y(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu \cdot t}$$

À 9h55 : l'exo 8.11.

Exo 8.11

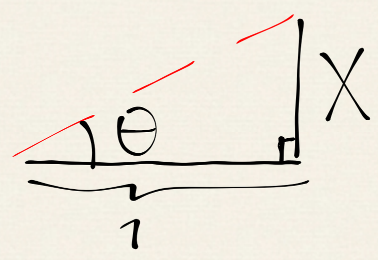


$\Theta \sim \text{Unif}(]-\pi/2, \pi/2[)$

X : le point marqué sur le sol.

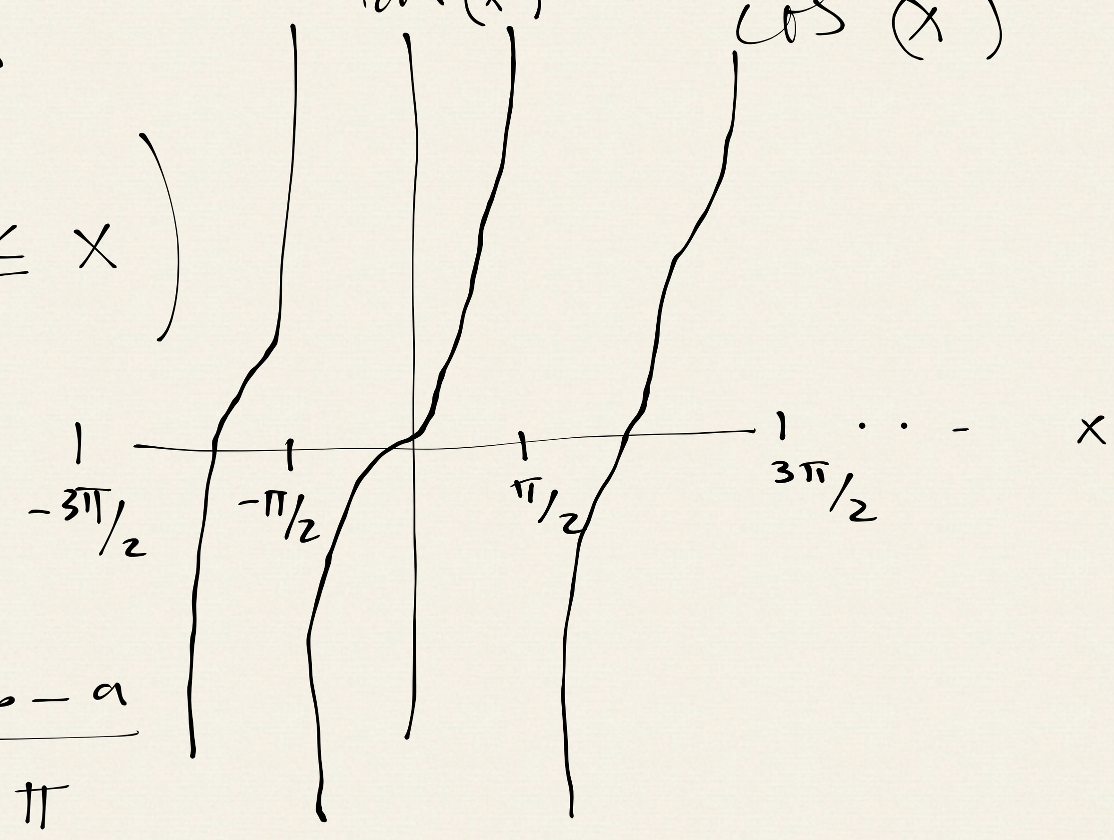
La densité de la loi de X ?

Solution :



donc $\tan(\theta) = \frac{X}{1} = X$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



Donc : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\tan(\Theta) \le x)$

$= \mathbb{P}(\Theta \le \arctan(x))$

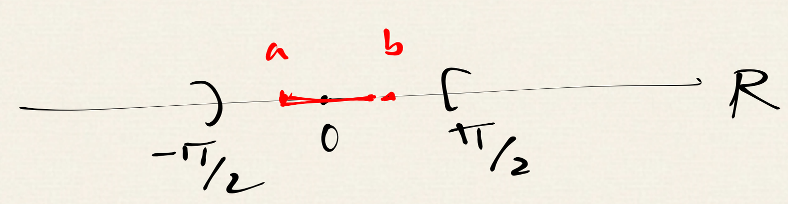
$\Theta \sim \text{Unif}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ donc $\mathbb{P}(a \le \Theta \le b) = \frac{b-a}{\pi}$

Donc $\mathbb{P}(\Theta \le \arctan(x)) = \frac{\arctan(x) - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$

[Obs : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$ donc $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$.]

Donc $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

Donc X est une variable de Cauchy.



$\Theta \sim \text{Unif}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ donc si $a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors

$\mathbb{P}(a \le \Theta \le b) = \frac{b-a}{\pi}$

Par déf : $f_\Theta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{]-\pi/2, \pi/2[}(x)$

donc : $\mathbb{P}(a \le \Theta \le b) = \int_a^b f_\Theta(x)\,dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathbb{1}_{]-\pi/2, \pi/2[}(x)\,dx$

$\overset{a<b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}{=} \frac{1}{\pi} \int_a^b 1\,dx = \frac{1}{\pi}(b-a)$

donc : $\mathbb{P}(\Theta \le b) = \int_{-\infty}^{b} f_\Theta(x)\,dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{b} \mathbb{1}_{]-\pi/2, \pi/2[}(x)\,dx$

$\overset{b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{b} 1\,dx = \frac{b-(-\pi/2)}{\pi}$

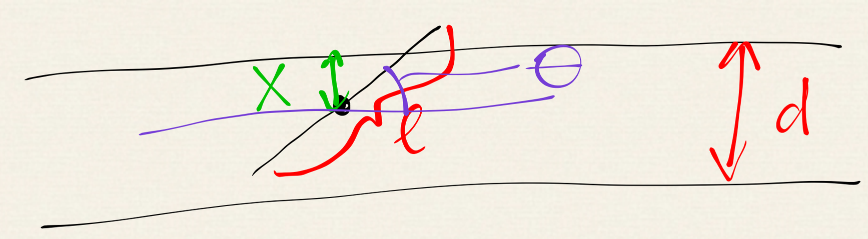
À 10^h40 : l'exo 9.1.

Exo 9.1 (L'aguille de Buffon)

On lance une aiguille sur un parquet, composé de planches parallèles.

On suppose que :

* la distance entre les rainures du parquet est d.
* longueur de l'aguille : ℓ
* X : dist(centre de l'aguille, la rainure la plus proche)
* Θ : angle(aguille, rainures)
* $X \sim Unif(]0, d/2[)$
* $\Theta \sim Unif(]0, \frac{\pi}{2}[)$
* X et Θ indépendantes.

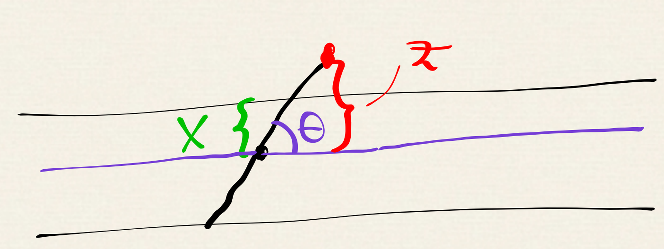


a) La densité jointe de (X, Θ).

Solution :
$$f_{(X,\Theta)}(x,t) \overset{\text{indép}}{=} f_X(x) \cdot f_\Theta(t)$$
$$= \frac{2}{d} \cdot \mathbb{1}_{]0, \frac{d}{2}[}(x) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{]0, \frac{\pi}{2}[}(t)$$
$$= \frac{4}{\pi d} \mathbb{1}_{]0, \frac{d}{2}[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0, \frac{\pi}{2}[}(t).$$

b) "l'aguille soit à cheval sur la rainure du parquet" $= \{ X < \frac{\ell}{2} \sin(\Theta) \}$.

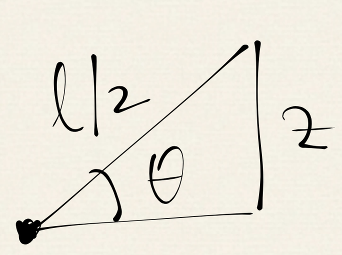
Solution :



Obs : si on met z = dist(bout de l'aguille, la ligne horizontale par le centre de l'aguille)

alors l'aguille intersecte les rainures ssi $z > X$.

centre



$$\sin(\Theta) = \frac{z}{\ell/2} \Rightarrow z = \frac{\ell}{2} \cdot \sin(\Theta)$$

Donc : "l'aguille soit à cheval sur la rainure du parquet"
$$= \{ X < z \} = \{ X < \frac{\ell}{2} \sin(\Theta) \}$$

c) $\ell \leq d$. $\mathbb{P}\left(X < \frac{\ell}{2}\sin(\Theta)\right) = \frac{2\ell}{\pi d}$.

Solution:

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{\ell}{2}\sin(\Theta)\right) = \int_{\substack{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \\ x < \frac{\ell}{2}\sin(t)}} f_{(X,\Theta)}(x,t)\,dx\,dt$$

$$\overset{(a)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\ell/2 \sin(t)} \frac{4}{\pi d} \mathbb{1}_{]0,\frac{d}{2}[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,\frac{\pi}{2}[}(t)\,dx\,dt$$

$$\overset{\ell\leq d}{=} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\ell/2 \cdot \sin(t)} \frac{4}{\pi d}\,dx\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{\ell}{2}\sin(t)} \mathbb{1}_{]0,\frac{d}{2}[}(x)\,dx = \int_0^{\min\{\frac{d}{2},\frac{\ell}{2}\sin(t)\}} 1\,dx = \int_0^{\frac{\ell}{2}\sin(t)} 1\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4\ell}{2\pi d}\sin(t)\,dt$$

$$= \frac{2\ell}{\pi d}\Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2\ell}{\pi d}\cdot(0 - -1) = \frac{2\ell}{\pi d} \qquad \square$$

À 11h35 : l'exo 9.5.

Attention : $f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

Exo 9.5 : Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. indéps. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
On définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
Prouver que S_n est à densité

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Solution : Rappel : (Prop. 5.30) si X et Y des v.a. à densité f_X et f_Y indép alors $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$

Preuve par récurrence : $n=1$: $S_1 = X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ donc $f_{S_1}(x) = f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$

hérédité : $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ donc :

$$f_{S_{n+1}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S_n}(x)\cdot f_{X_{n+1}}(z-x)\,dx \overset{\text{hypothèse}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\, \lambda e^{-\lambda(z-x)} \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(z-x)\,dx$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{n-1}\,dx = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(z) \cdot \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^z$$

$\frac{z^n}{n} - \frac{0^n}{n} = z^n/n$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1-1)!} z^{n+1-1} e^{-\lambda z} \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(z) \qquad \square$$

l'exo 9.7 : la prochaine.