TD 1: Espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension finie.

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels réels?

1. $\mathbb{C}$, où l'addition et la multiplication par scalaires sont données par l'addition et multiplication usuelles.
2. $\mathbb{C}$, avec addition et multiplication par scalaires données par: $x+y := 0$ et $\lambda \cdot x := 0 \; \forall x, y \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ respectivement.
3. L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivables en tout point. C'est-à-dire
$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ dérivable}\}$$
avec addition et multiplication par scalaires définies par:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall f, g \in E, x \in \mathbb{R}.$$
4. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}} x(t) = 0$. C'est-à-dire:
$$E' = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} x \text{ dérivable} \\ x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}} x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$
avec l'addition et la multiplication par scalaires du (3).
5. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}} x(t) = 1$. C'est-à-dire:
$$E'' = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} x \text{ dérivable} \\ x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}} x(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$
avec l'addition et la multiplication par scalaires du (3).
6. L'ensemble des suites réelles convergentes. C'est-à-dire:
$$\left\{ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_n \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \\ \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \end{array} \right\}$$
où l'addition et la multiplication par scalaires sont données par
$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$
et
$$\lambda \cdot (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (\lambda \cdot a_0, \lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3, \dots)$$
respectivement.
7. L'ensemble des suites réelles divergentes. C'est-à-dire:
$$\left\{ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_n \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ où } \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{array} \right\}$$
avec l'addition et la multiplaction par scalaires du (6).

Solution.

1. Oui. En fait, tout espace vectoriel complexe E est automatiquement un espace vectoriel réel : on restreint la multiplication scalaire $\mathbb{C} \times E \to E$ à $\mathbb{R} \times E \to E$. Vu que les conditions de la Définition 1.1 sont satisfiées pour E en tant qu'espace vectoriel complexe, elles le sont aussi pour E en tant qu'espace vectoriel réel.
2. Non. Par exemple, la condition 7 de la Définition 1.1 n'est pas satisfiée : avec cette nouvelle notion de multiplication, nous avons
$$1 \cdot 17 = 0.$$
Par contre, la Définition 1.1.7 demande que $1 \cdot 17 = 17$.

3. Oui. En utilisant que la somme de fonctions dérivables et aussi toute multiple d'une fonction dérivable sont bien dérivables, on voit que l'addition et la multiplication par scalaires données dans l'exercices sont bien définies en tant que applications $E \times E \to E$ et $\mathbb{R} \times E \to E$ respectivement. De plus, toutes les conditions de la Définition 1.1 sont satisfiées, vu qu'on utilise la multiplication et l'addition de nombres réels dans notre définition d'addition et de multiplication. En particulier, l'élément 0_E ici est la fonction constante égale à 0 et l'opposé d'une fonction est la fonction $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Oui. L'equation différentielle qu'on utilise pour définir E est une équation linéaire, c'est-à-dire, si $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$t \mapsto x(t) + y(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \lambda x(t)$$

sont aussi des solutions. De plus, E' n'est pas vide, la fonction constante égale à 0 appartient à E'. Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de E.

5. Non. Par exemple, la fonction constante égale à 0 n'appartient pas à E.

6. Oui. Il s'agit d'un sous-espace de l'espace de toutes les suites (l'exemple 7 du poly) : la suite $(0, 0, 0, \ldots)$ est convergente, la somme de deux suites convergentes est convergente et une multiple constante d'une suite convergente est toujours convergente.

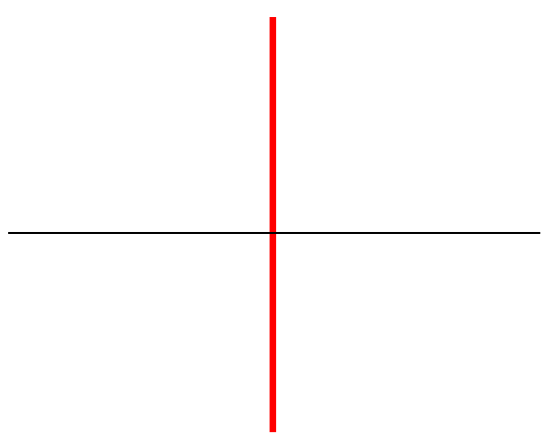
7. Non. La suite $(0, 0, 0, \ldots)$ n'appartient pas à cet ensemble.

Exercice 2. Dessiner les ensembles suivants. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(0, y) |\ y \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{(0, y) |\ y \geqslant 0\}$.
3. $\{(0, y) |\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) |\ x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x| = |y|\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y\}$.
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 7x + 12y = 0\}$
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 7x^2 + 12y = 0\}$

Solution.

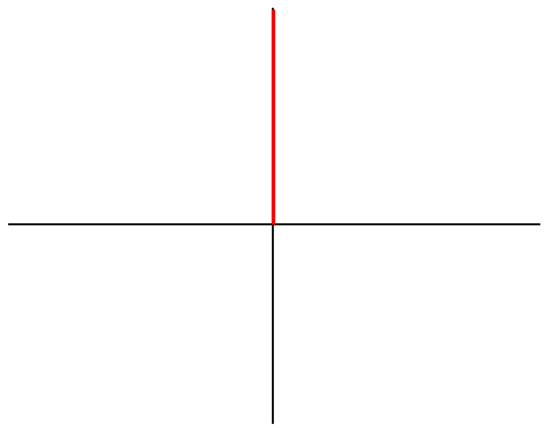
1. Le dessin:



Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel:

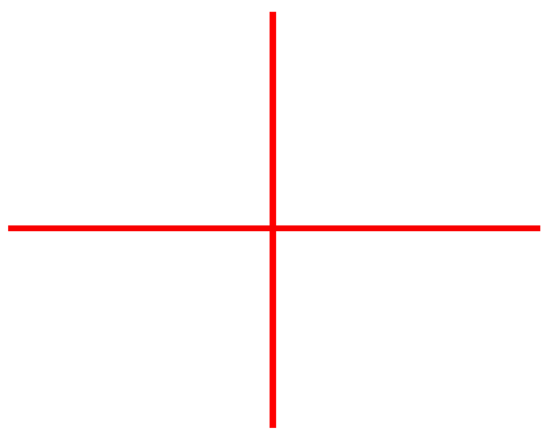
- $(0, 0)$ appartient à l'ensemble
- Si $(0, y_1), (0, y_2) \in \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ alors $(0, y_1 + y_2) \in \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ aussi
- Si $(0, y) \in \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(0, \lambda y) \in \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ aussi.

2. Le dessin:



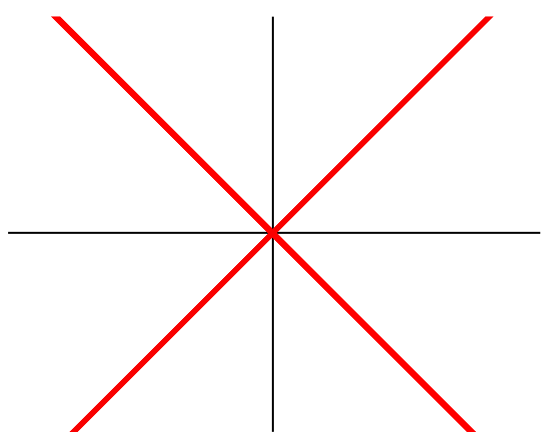
Ce n'est pas un sous-espace vectoriel $(0, 1) \in \{(0, y)|\ y \geqslant 0\}$, mais $-1 \cdot (0, 1) = (0, -1) \notin \{(0, y)|\ y \geqslant 0\}$.

3. Le dessin:



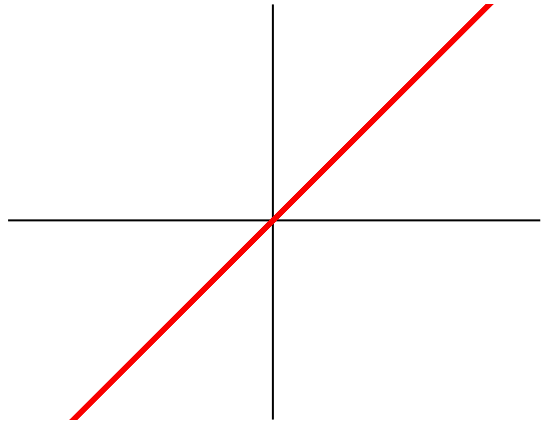
Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: $(0, 1), (1, 0) \in \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0)|\ x \in \mathbb{R}\}$, mais $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0)|\ x \in \mathbb{R}\}$.

4. Le dessin:



Ce n'est pas un sous-espace vectoriel $(1, 1), (1, -1) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|\ |x| = |y|\}$, mais $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|\ |x| = |y|\}$.

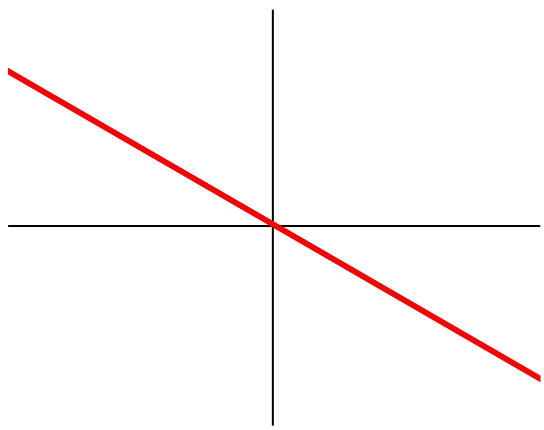
5. Le dessin:



C'est bien un sous-espace vectoriel

- $(0,0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x = y\}$
- Si $(x_1, x_1), (x_2, x_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x = y\}$, alors $(x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x = y\}$ aussi.
- Si $(x, x) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x = y\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda \cdot x, \lambda \cdot x) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x = y\}$ aussi.

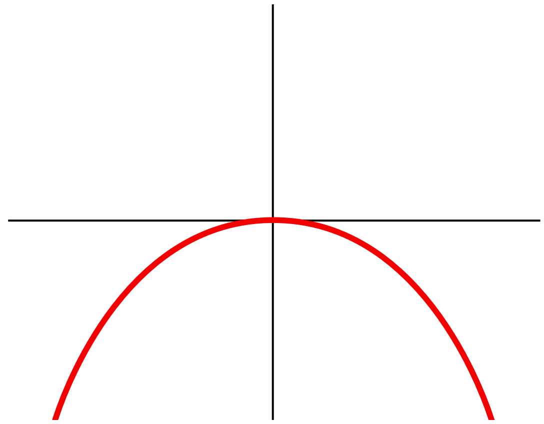
6. Le dessin:



C'est bien un sous-espace vectoriel

- $(0,0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 7x + 12y = 0\}$
- Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 7x + 12y = 0\}$ alors
$$7(x_1 + x_2) + 12(y_1 + y_2) = 7x_1 + 12y_1 + 7x_2 + 12y_2 = 0 + 0 = 0$$
et donc $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 7x + 12y = 0\}$
- Si $(x, y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 7x + 12y = 0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$7 \cdot \lambda x + 12 \cdot \lambda y = \lambda(7x + 12y) = \lambda \cdot 0 = 0$$
et donc $(\lambda x, \lambda y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 7x + 12y = 0\}$.

7. Le dessin:



Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: $(1, -\frac{7}{12}) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 7x^2 + 12y = 0\}$, mais $2 \cdot (1, -\frac{7}{12}) = (2, -\frac{7}{6}) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 7x^2 + 12y = 0\}$ parce que

$$7 \cdot 2^2 + 12 \cdot (-\frac{7}{6}) = 14 \neq 0.$$

Exercice 3. Les familles suivantes, sont elles libres?

1. La famille (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, où: $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. La famille (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, où: $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, où: $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, où: $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}[x]$, où: $u_1 = x$, $u_2 = 2x + x^2$ et $u_3 = 3x^2$.
6. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}[x]$, où: $u_1 = x$, $u_2 = 2x + x^2$ et $u_3 = 3x^3$.
7. $\{t \mapsto \cos(t), t \mapsto \sin(t)\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Solution. 1. Oui, supposons que

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases} \overset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} 4\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2. Non:
$$2 \cdot u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Oui. Supposons que
$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \overset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} 4\lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$
et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

4. Non. Mais ça se ne voit peut être pas directement. Supposons que
$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 - 1\lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
On observe que la première ligne donne la même équation que la dernière. Alors
$$\left\{ \begin{array}{rl} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 - 1\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \overset{L_2 \to L_2 + 3L_1}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$
Nous voyons donc que pour tout choix de λ_3, nous obtenons une solution. On met $\lambda_3 = 1$ et on obtient $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_1 = -1$. Nous vérifions
$$-1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Non,
$$u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{6}u_3 = 0$$

6. Oui. Supposons que
$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot x + \lambda_2 x^2 + 3\lambda_3 x^3 = 0$$
Alors
$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \\ 3\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$
et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

7. Oui. Supposons que
$$\Big(t \mapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)\Big) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}}.$$
Le vecteur $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}}$ est la fonction constante égale à 0. Donc, on obtient que
$$\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
En particulier,
$$\lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) = \lambda_1 = 0$$
et
$$\lambda_1 \cos(\pi/2) + \lambda_2 \sin(\pi/2) = \lambda_2 = 0.$$

Exercice 4. Déterminer la dimension et donner une base pour les espaces vectoriels suivants:

1. $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}_2[x]$
3. $$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\subset\mathbb{R}^3 \quad\text{et}\quad \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right)\subset\mathbb{R}^3$$

Solution.

1. En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la dimension de $\mathbb{C}$ est 2. En effet, $(1, i)$ est une base pour $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel: tout nombre complexe s'écrit comme une combinaison linéaire de la forme $a + b \cdot i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (la famille est génératrice) et si $a + b \cdot i = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a = b = 0$.
2. $(1, x, x^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[x]$. $\mathbb{R}_2[x]$ est donc de dimension 3.
3. On affirme que
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
est une base de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Par définiion c'est génératrice, donc il faut juste vérifier que la famille est libre. Si
$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$
alors $\lambda_2 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$ aussi.
4. C'est toujours de dimension 2.
$$\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$
Donc la famille libre
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
est aussi génératrice pour
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
et c'est donc une base.

Exercice 5. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$?

1. $F = \mathrm{Vect}((0, 1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.
2. $F = \mathrm{Vect}((0, 1, 0), (1, 1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$.

Solution.

1. Oui, si $(x, y, z) \in F$, alors $x = z = 0$ et si $(x, y, z) \in G$, alors $x = y = z$. Donc, si $(x, y, z) \in F \cap G$, alors $x = y = z = 0$.

2. Non $(1,0,0) \in F$ parce que $(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,0)$ et $(1,0,0) \in G$ aussi. Donc $F \cap G \neq \{(0,0,0)\}$.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des $f \in E$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F.

Solution. F est bien un sous-espace vectoriel:

- La fonction constante égale à 0 (l'élément zéro de E) appartient à F
- Si $f(0) = f'(0) = 0$ et $g(0) = g'(0) = 0$ alors $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0$ et $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = 0$
- Si $f(0) = f'(0) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f)(0) = \lambda \cdot f(0) = 0$ et $(\lambda f)'(0) = \lambda \cdot f'(0) = 0$.

Un supplémentaire G de F dans E est un sous-espace vectoriel G de E tel que tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et un élément de G ($E = F + G$) et $F \cap G = \{0_E\}$. On observe que si $f \in E$, alors la fonction $g : t \mapsto f(t) - f(0) - f'(0) \cdot t$ est une fonction différentiable telle que

$$g(0) = f(0) - f(0) - 0 = 0 \quad \text{et} \quad g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0.$$

Autrement dit

$$E = F + \{(t \mapsto a + b \cdot t);\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\{(t \mapsto a + b \cdot t);\ a, b \in \mathbb{R}\}$ est bien un sous-espace vectoriel de E:

- La fonction constante égale à zéro correspond à $a = b = 0$
- $(t \mapsto a_1 + b_1 \cdot t) + (t \mapsto a_2 + b_2 \cdot t) = (t \mapsto a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) \cdot t) \in \{(t \mapsto a + b \cdot t);\ a, b \in \mathbb{R}\}$
- $\lambda \cdot (t \mapsto a + b \cdot t) = (t \mapsto \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \cdot t) \in \{(t \mapsto a + b \cdot t);\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

De plus,

$$F \cap \{(t \mapsto a + b \cdot t);\ a, b \in \mathbb{R}\} = \{0_E\},$$

parce que, si la valeur et la dérivé en 0 d'une fonction de la forme $t \mapsto a + b \cdot t$ sont 0, alors $a = b = 0$. Donc

$$E = F \oplus \{(t \mapsto a + b \cdot t);\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 7. On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ \frac{h}{3} \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ la famille $\{u, v, w\}$ est libre et pour quelles valeurs elle est liée.

Solution. Si $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$, alors

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda_2 + k\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + h\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2 + \tfrac{h}{3}\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right. \overset{L_2 \to L_2 - 3L_3}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{aligned} -\lambda_2 + k\lambda_3 &= 0 \\ (h-1)\lambda_2 + (1-h)\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2 + \tfrac{h}{3}\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Cas 1: Si $h \neq 1$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda_2 + k\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2 + \tfrac{h}{3}\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right. \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{aligned} (k-1)\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2 + \tfrac{h}{3}\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Cas 1a : Si $k \neq 1$, on obtient $\lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.
Cas 1b : Si $k = 1$, la première équation disparaît et on obtient une solution non-triviale en mettant $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-(1+h)/3, 1, 1)$.
Cas 2 : Si $h = 1$, la deuxième équation du premier système disparaît et on obtient le système d'equations

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\lambda_2 + k\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

et on obtient une solution non-triviale en mettant $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-(1+k)/3, k, 1)$.
On peut donc conclure que la famille est libre si et seulement si $h \neq 1$ et $k \neq 1$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de sous-espace vectoriel de dimension 0, de dimension 1, de dimension 2,... de dimension $n-1$.

Solution. Par exemple,

$$V_k = \left\{ \begin{array}{ll} \{(0, 0, \dots, 0)\} & \text{si } k = 0 \\ \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0\} & \text{si } k > 0 \end{array} \right.$$

est un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$ pour $k = 0, \dots, n$, parce que la famille

$$\Big(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\Big)$$

est un base de V_k si $k > 0$.

Exercice 9. Les espaces vectoriels réels suivants sont-ils de dimension finie ? Si oui, donner leur dimension et une base.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x(t)' + 2t \cdot x(t) = 0$.
2. L'ensemble des suites réelles.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x + 5y\}$.

Solution.
1. Oui. Il s'agit d'une équation différentielle lineaire de premier ordre, donc l'espace de solutions est de dimension 1. En fait, cet espace est
$$\Big\{(t \mapsto a \cdot e^{-t^2});\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$
et un exemple d'une base est donc $(t \mapsto a \cdot e^{-t^2})$
2. Non. La famille $\Big((s_k^{(n)})_k\Big)_{n \in \mathbb{N}}$, où $s^{(n)}$ est la suite définie par
$$s_k^{(n)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{array} \right.$$
est une base pour cet espace. Vu que le cardinal de cette base est infini, la dimension de l'espace l'est aussi.

3. Oui, cette espace est de dimension 2. On peut écrire

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=3x+5y\}=\{(x,y,3x+5y);\ x,y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0,3),(0,1,5))$$

On affirme que $((1,0,3),(0,1,5))$ est une base pour cet espace. Elle est génératrice, donc on doit just vérifier qu'elle est libre. Supposons que

$$\lambda_1(1,0,3)+\lambda_2(0,1,5)=(\lambda_1,\lambda_2,3\lambda_1+5\lambda_2)=(0,0,0)$$

alors $\lambda_1=\lambda_2=0$. Donc la famille est bien libre.