TD 2: Applications linéaires.

Exercice 1. Sont les applications suivantes linéaires ? Si oui, donner des matrices pour les applications par rapport à vos bases préfèrées.

1. L'application $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_1(x, y, z) = x + y + z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$
2. L'application $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f_2(x, y) = (x + y, x, \pi \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
3. L'application $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f_3(x, y) = (x + y, x, \pi \cdot y + 2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
4. L'application $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, où on interprète $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, définie par
$$f_4(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
5. L'application $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, où on interprète $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, définie par
$$f_5(z) = e^{i\theta} \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}.$$
où $\theta \in [0, 2\pi[$.
6. L'application $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ définie par
$$f_6(a, b) = a \cdot (x + x^2) + b \cdot (x - x^2), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
7. L'application $f_7 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_7(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = \int_0^2 \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) dx, \quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$
8. L'application $f_8 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par
$$f_8(P) = \frac{d}{dx} P(x), \quad P \in \mathbb{R}_2[x]$$

Exercice 2.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère le plan
$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ z = x + y \right\}$$
Rappeler sa dimension et en donner une base.
2. Trouver un supplémentaire de P (i.e. trouver D tel que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$).
3. Si E est un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($F \oplus G = E$). Tout élément de E se décompose de manière unique sous la forme $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On appelle *projecteur sur F parallèlement* à G l'application suivante:
$$p : e = f + g \in E \mapsto f.$$
Montrer que c'est une application linéaire.

4. Montrer qu'elle vérifie $p \circ p = p$. Quel est son noyau et son image?
5. Dans l'exemple précédent, on considère la projection sur P parallèlement à D. Exprimer cette projection dans la base canonique.
6. On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement* à G l'application suivante:

$$s : e = f + g \mapsto f - g.$$

   Montrer que c'est une application linéaire.
7. Montrer qu'elle vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}$. Quel est son noyau et son image? Quel est le lien entre s et p?
8. Dans l'exemple précédent, on considère la symétrie sur P parallèlement à D. Exprimer cette symétrie dans la base canonique.

Exercice 3. On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Lesquelles peut-on multiplier et dans quel ordre ? Calculer ces produits.
2. Déterminer leurs noyaux.
3. Donner une base pour leurs noyaux.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel

$$E = \mathbb{C}^{\mathbb{C}} = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots);\ a_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

1. On définit l'application $f_1 : E \to E$ par

$$f_1\Big((a_0, a_1, a_2, \ldots)\Big) = (a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in E$$

   Est f_1 linéaire? Est elle injective ? Est elle surjective?
2. On définit l'application $f_2 : E \to E$ par

$$f_2\Big((a_0, a_1, a_2, \ldots)\Big) = (0, a_0, a_1, a_2 \ldots), \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in E$$

   Est f_2 linéaire? Est elle injective ? Est elle surjective?

Exercice 5. Quelles applications de l'exercice 1 sont surjectives ? Et quelles sont injectives ?

Exercice 6. Déterminer les noyaux des applications linéaires de l'exercice 1.

Exercice 7. Quelles sont les dimensions des images des matrices de l'exercice 3 ?