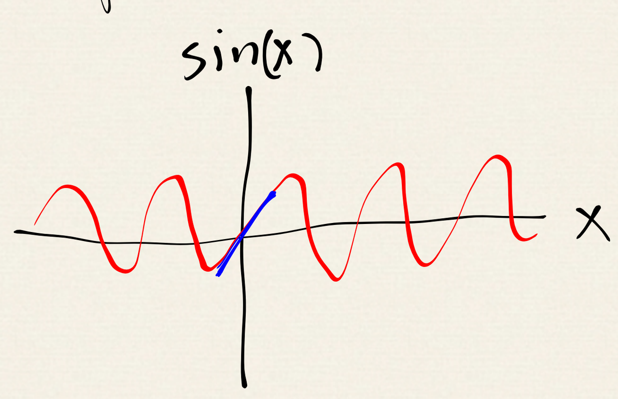
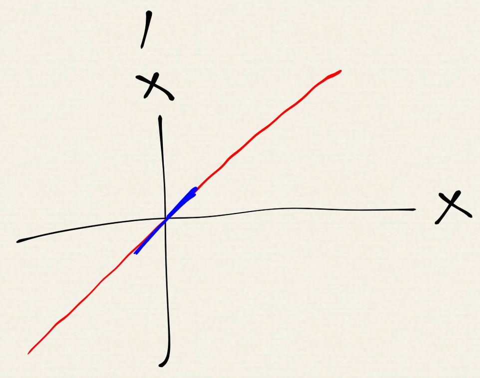
Prolognement continu en zéro d'une fonction

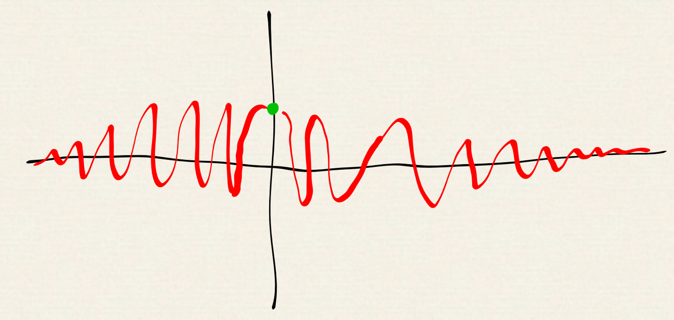
Exemple :

déf : $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$







Obs : Développement limite de $\sin(x)$ autour $x=0$:

$\exists\, \delta > 0, C > 0 : \forall x \in]-\delta, \delta[\; : \; |\sin(x) - x| < C x^2$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x - Cx^2}{x} \leq \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \to 0^-} \frac{x + Cx^2}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x - Cx^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 - C\cdot x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x + Cx^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 + C\cdot x = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

et :

$$1 = \lim_{x \to 0^+} 1 - C\cdot x \leq \lim_{x \to 0^+} f(x) \leq \lim_{x \to 0^+} 1 + C\cdot x = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Et donc : si on définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

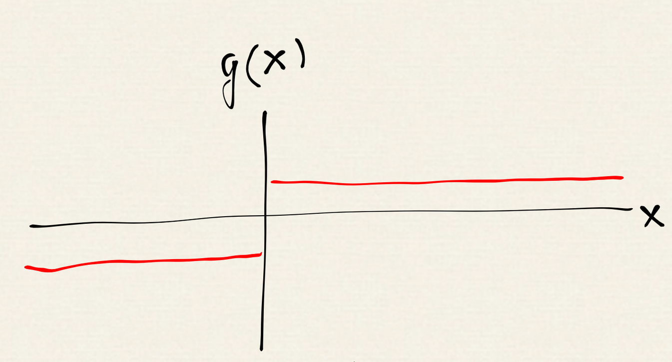
alors : * $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (le domaine de déf. de f)

* $\tilde{f}$ continue

On appelle une telle fonction un prolongement continu de f en zéro

* Exemple : déf. $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

par : $g(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$



Obs : g n'admet pas de prolongement continu en zéro parce que :

$$-1 = \lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \qquad \square$$

Autre exemple : déf : $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{|x|}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

alors : $+\infty = \lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

donc h n'admet pas de prolongement continu.

Conclusion : une fonction continue déf sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ admet une prol. cont. en zéro ssi la limite à zéro et finie.

<u>Obs</u>: En dim. supérieure :
il y a beaucoup plus de directions à considerer.

C-à-d. c'est possibles que les limites de $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{y \to 0} f(0,y)$$

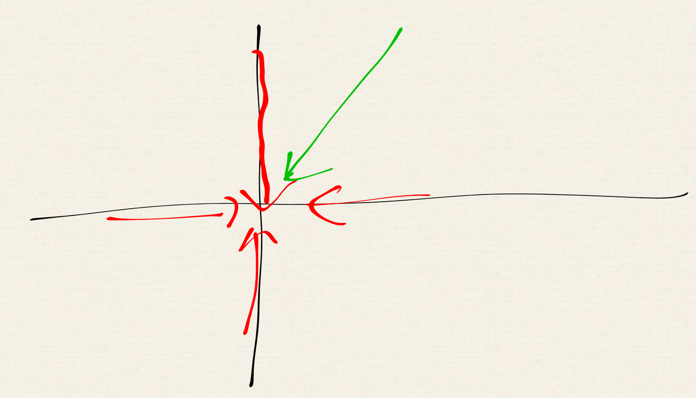
mais que f n'admet pas de prol. cont. en zéro.

<u>Par ex.</u> $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ déf par $f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$

a:

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$



<u>MAIS</u>:

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>Donc</u> f n'admet pas de prol. cont. en zéro.

Pour prouver que c'est prolongeable:

Il faut prouver que $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.q.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $N((x,y) - (0,0)) < \delta$
alors $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

<u>Indication</u>:
www.wolframalpha.com