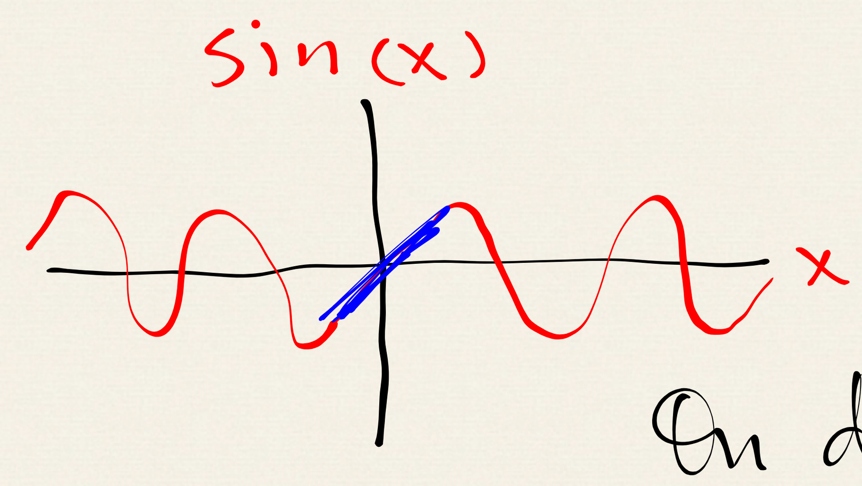
Prolongement continu

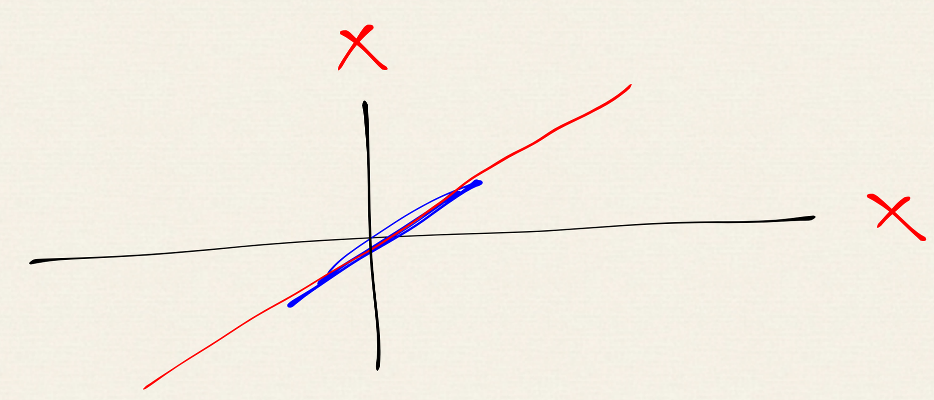
Exemples :

* fonctions d'une variable

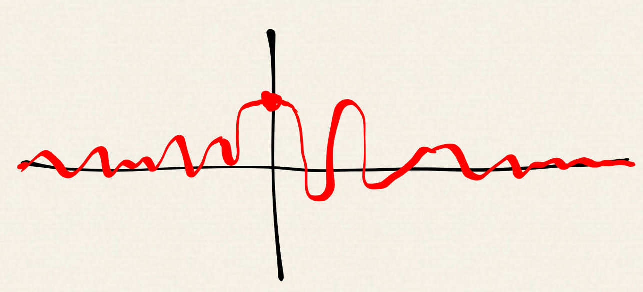
Déf : $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$





On définit :



$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Obs : * si $x \neq 0$ alors $\tilde{f}(x) = f(x)$

* $\tilde{f}$ est une fonction continue*

*encore à prouver.

On dit que $\tilde{f}$ est un prolongement continue de f

Preuve que $\tilde{f}$ est continue :

Développement de Taylor : on a

$$\sin(x) = x + O(x^2) \quad \text{quand } x \to 0$$

Rappel

(c-à-d : $\exists\, \delta > 0$ t.q. $\exists\, C > 0$ t.q. $\forall\, x \in]-\delta, \delta[$ on a $|\sin(x) - x| < Cx^2$)

Donc $\forall\, x \in]-\delta,\delta[\setminus\{0\}$: $\frac{x - Cx^2}{x} \leq f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{x + Cx^2}{x}$

donc : $1 - C|x| \leq f(x) \leq 1 + C|x|$

Donc :

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^-} 1 + C\cdot x}_{=1} \leq \lim_{x \to 0^-} f(x) \leq \underbrace{\lim_{x \to 0^-} 1 - C\cdot x}_{=1}$$

Donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} 1 - Cx}_{=1} \leq \lim_{x \to 0^+} f(x) \leq \underbrace{\lim_{x \to 0^+} 1 + C\cdot x}_{=1}$$

Donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Donc $\tilde{f}$ est continue à 0

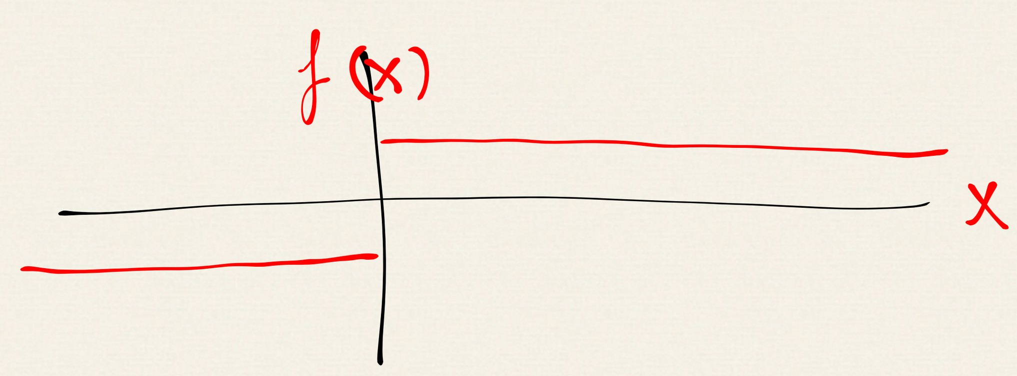
et, vu que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

donc $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

* Autre exemple :

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$

déf par : $f(x) = x/|x| = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



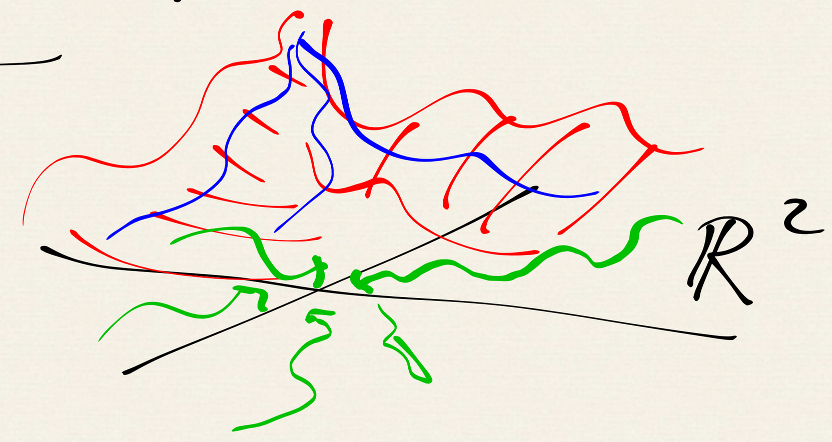
Affirmation : f n'admet pas de prolongement à $\mathbb{R}$ continue

Preuve : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$

$\neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

$\square$

Dans $\mathbb{R}^2$:



Obs : $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
admet un prolongement continu à zéro
ssi $\forall\ (x^k, y^k)_k,\ (u^k, v^k)_k$ suites dans
$\mathbb{R}^2$ t.q.

$$\lim_{k \to +\infty} (x^k, y^k) = 0$$

$$\lim_{k \to +\infty} (u^k, v^k) = 0$$

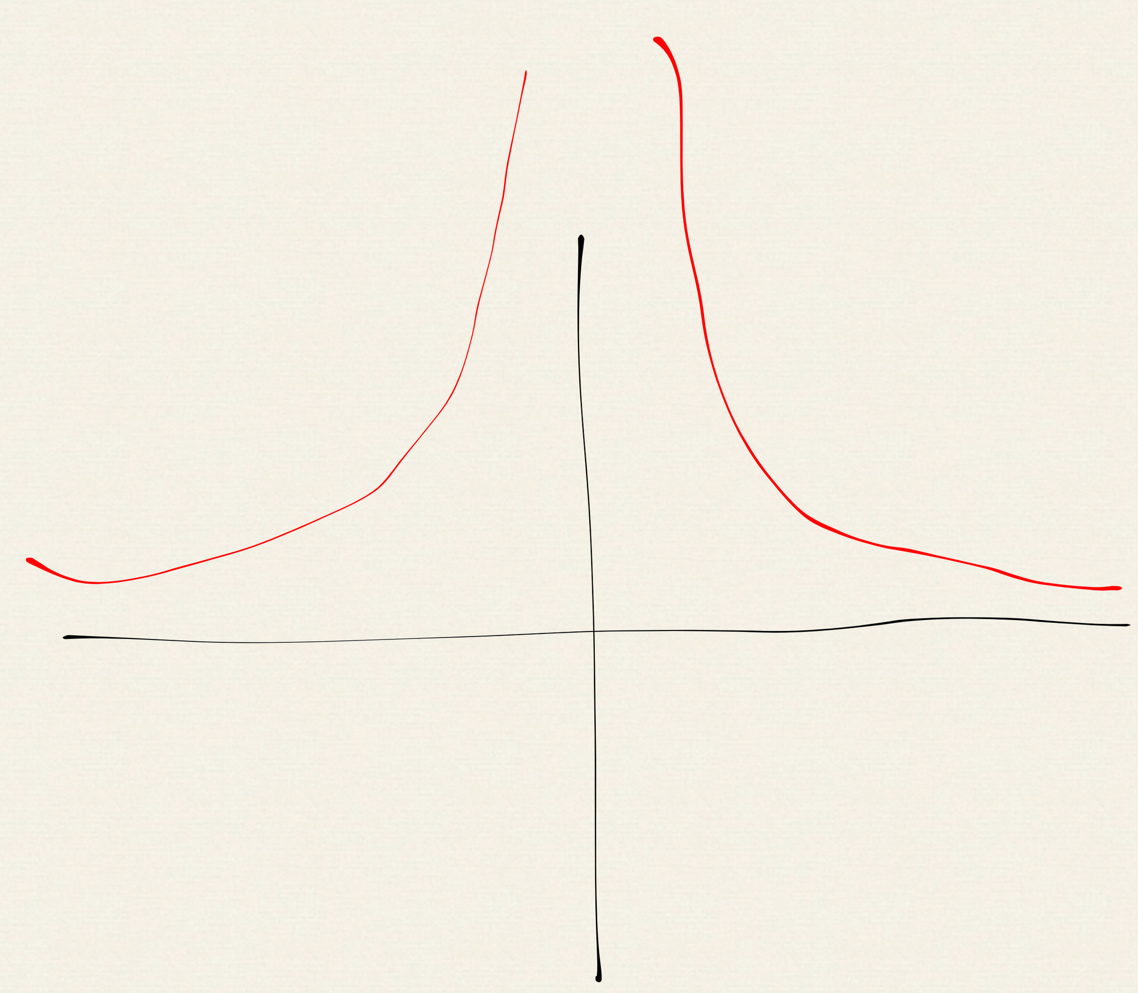
On a :

$$-\infty \neq \lim_{k \to +\infty} f(x^k, y^k) = \lim_{k \to +\infty} f(u^k, v^k)$$

$$\neq +\infty$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$



Pour prouver que une se ne prolonge pas
Il faut prouver que pas toutes les limites sont les mêmes. C-à-d, il faut trouver deux suites $((x^k, y^k))_k$ et $((u^k, v^k))_k$ t.q. $(x^k, y^k) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$, $(u^k, v^k) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

mais : $\lim_{k \to +\infty} f(x^k, y^k) \neq \lim_{k \to +\infty} f(u^k, v^k)$

Un exemple d'une fonction qui admet un prolongement.

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

par $$f(x,y) = \frac{\sin(|x|+|y|)}{|x|+|y|}$$

Affirmation: cette fonction admet un prolongement continu à zéro.

But: $$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 1$$

C-à-d: On prend une norme $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

et on prouve: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ t.q.

si $N((x,y)-(0,0)) < \delta$

alors $|f(x,y) - 1| < \varepsilon$.

Preuve:

Rappel: $\exists\ \delta' > 0,\ C > 0$ t.q.

$\forall\ x \in]-\delta', \delta'[: \quad |\sin(x) - x| < C \cdot x^2$

Donc: si $\|(x,y)\|_\infty < \delta < \delta'/2$

alors $$|x| + |y| \leq \max\{|x|, |y|\} \cdot 2 = \|(x,y)\|_\infty \cdot 2 < \delta'$$

et donc:

$$\frac{|x|+|y| - C(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} \leq f(x,y) \leq \frac{|x|+|y| + C(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}$$

Donc $$1 - C\cdot(|x|+|y|) \leq f(x,y) \leq 1 + C(|x|+|y|)$$

$$1 - 2 \cdot C \cdot \delta \leq f(x,y) \leq 1 + 2 \cdot C \cdot \delta$$

Donc $|f(x,y) - 1| < 2 \cdot C\delta$

Donc si on prend

$$\delta = \min\{\delta', \frac{\varepsilon}{2C}\}$$

alors

$$|f(x,y) - 1| < \varepsilon$$

$\square$