CLAIRE VOISIN

Sur les zéro-cycles de certaines hypersurfaces munies d'un automorphisme

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 19, n° 4 (1992), p. 473-492.

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1992_4_19_4_473_0>

Sur les Zéro-cycles de Certaines Hypersurfaces Munies d'un Automorphisme

CLAIRE VOISIN

L'article fondamental [10] de Mumford met en évidence la connexion étroite entre le groupe $CH_0(X)$ des zéro-cycles modulo équivalence rationnelle d'une variété X et les espaces $H^0(\Omega_X^k)$ de formes holomorphes sur X. Dans [2], S. Bloch tente de préciser la nature de cette relation en conjecturant l'existence d'une filtration décroissante sur $CH_0(X)$, $CH_0(X) = F^0CH_0(X) \supset F^1CH_0(X) \supset \cdots \supset F^nCH_0(X) \supset F^{n+1}CH_0(X) = 0$, où $n = \dim\ X$, telle que le gradué associé soit "contrôlé" par les structures de Hodge sur la cohomologie de X, avec $F^1CH_0(X)$ = noyau de l'application degré, et $F^2CH_0(X)$ = noyau de l'application d'Albanese. Formulée précisément, cette conjecture entraîne que pour une surface Σ telle que $h^{2,0}(\Sigma) = 0$, on a $F^2CH_0(\Sigma) = 0$, et que pour un groupe G agissant sur une surface, l'action induite sur le groupe $F^2CH_0(\Sigma)$ est reflétée par l'action de G sur l'espace des 2-formes holomorphes de Σ. La première de ces conséquences a été établie dans [3], lorsque Σ n'est pas de type général. Pour les surfaces de type général avec $p_g = 0$, Inose et Mizukami [8] montrent l'égalité $F^1CH_0(\Sigma/G) = 0$, pour certaines surfaces Σ, sur lesquelles un groupe G agit, sans deux-forme holomorphe invariante, avec l'hypothèse supplémentaire que Σ a par ailleurs un très gros groupe d'automorphismes, comme c'est le cas pour la surface quintique de Fermat, définie par $\sum_{i=0}^{3} X_i^5 = 0$ dans $\mathbb{P}^3$, où l'on pose $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, agissant par $g^*X_i = \varsigma^i X_i$, où g engendre G et ς est une racine cinquième de l'unité, différente de 1.

Dans la première partie de ce travail on obtient un énoncé de ce type, valide essentiellement pour les surfaces intersections complètes munies d'un groupe d'automorphismes linéaires agissant sans partie invariante (ou au contraire trivialement) sur les deux-formes holomorphes, (cf. Théorème 1.1). L'idée de la démonstration est très simple. Supposons qu'on ait un pinceau de telles surfaces, ayant pour base locus une courbe C; l'hypothèse $h^{2,0}(\Sigma/G) = 0$ entraîne que Σ/G a un gros groupe de Picard, dont la restriction à C/G, lorsque Σ varie, "doit" engendrer Pic C/G; si ce pinceau correspond à un pinceau d'hypersurfaces

Pervenuto alla Redazione il 18 Dicembre 1990 e in forma definitiva il 29 Gennaio 1992.

sur une variété de dimension 3 X sur laquelle G agit, on en déduit alors que l'image de $\mathrm{Pic}(C/G)$ dans $CH_0(\Sigma/G)$ est contenue dans l'image de la restriction $CH_1(X/G) \longrightarrow CH_0(\Sigma/G)$. Finalement si X contient suffisamment d'hypersurfaces invariantes, de sorte que C varie dans Σ, et si $CH_1(X/G)$ est représentable, on voit que la restriction $CH_1(X/G) \longrightarrow CH_0(\Sigma/G)$ est surjective, et que $F^1CH_0(\Sigma/G)$ est représentable, donc nul si $Alb(\Sigma/G) = 0$, ce qui donne le résultat.

Si l'on analyse cette démonstration dans le cas de la dimension trois, on voit que la conjecture de Bloch pour les surfaces a de fortes conséquences sur les zéro-cycles des variétés de dimension trois. Prenons pour fixer les idées une quintique dans $\mathbb{P}^4$ définie par un polynôme invariant sous l'involution $i : (X_0, \ldots, X_4) \longrightarrow (-X_0, -X_1, X_2, X_3, X_4)$. i agit trivialement sur $H^0(K_X)$, de sorte que la décomposition de Hodge sur $H^3(X)^-$ est de type $(2,1) + (1,2)$. Ainsi que le prédit la conjecture de Hodge, la partie antiinvariante JX de la jacobienne intermédiaire de X est paramétrée par l'application d'Abel-Jacobi $\Phi_X : CH_1^-(X)_{\mathrm{hom}} \longrightarrow JX^-$ (cf. Proposition 2.1). Si on prend dans $\mathbb{P}^4$ un pinceau de telles hypersurfaces avec pour base locus une surface lisse Σ, on voit qu'il existe une surface $W \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$, dont la fibre générale W_t paramètre des 1-cycles antiinvariants dans X_t, de sorte que $\Phi_{X_t}(JW_t) = JX_t^-$. La restriction $CH_1(X_t) \longrightarrow CH_0(\Sigma)$, pour $t \in \mathbb{P}^1$ donne alors une correspondance entre W et Σ, induisant une surjection $H^2(W) \longrightarrow H^2(\Sigma)^-$. La conjecture de Bloch impliquera alors que l'application induite $CH_0(W) \longrightarrow CH_0(\Sigma)^-$ est surjective, et finalement que l'image de $CH_0(\Sigma)^-$ dans $CH_0(X)^-$ est contenue dans l'image de la restriction $CH_1(\mathbb{P}^4)^- \longrightarrow CH_0(X)^-$, donc est nulle; faisant varier Σ dans X, on conclut que $CH_0(X)^-$ doit être nul. On montre essentiellement dans la seconde partie de ce travail que tel est bien le cas (théorème 2.20), l'ingrédient principal, permettant de contourner le recours à la conjecture de Bloch dans l'argument qui précède, étant un théorème de Bloch et Srinivas [4], appliqué aux quintiques de dimension quatre.

1. - Le cas des surfaces

1.0. On considère dans cette section la situation suivante: G est un groupe cyclique d'ordre n, engendré par un élément $g \in G$, et agissant linéairement sur $\mathbb{P}^3$ muni des coordonnées homogènes $(X_0, \ldots, X_3)$ par: $g^*X_i = \varsigma^{n_i}X_i$, où ς est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$ est une surface lisse définie par une équation homogène de degré d, satisfaisant: $g^*F = \varsigma^k F$, pour un entier k.

G agit alors sur Σ, et donc sur sa cohomologie $H^2(\Sigma, A)$, où $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $H^2(\Sigma, A)^{inv}$ l'ensemble des classes invariantes sous G. $H^2(\Sigma, A)^{inv} \subset H^2(\Sigma, A)$ détermine une sous-structure de Hodge de $H^2(\Sigma, A)$, contenant la classe $h = c_1(\mathcal{O}_S(1))$, et donc par le théorème de l'index, la forme d'intersection q_Σ sur $H^2(\Sigma, A)$ a une restriction à $H^2(\Sigma, A)^{inv}$ non dégénérée. Notant $H^2(\Sigma, A)^{\#}$ l'orthogonal de $H^2(\Sigma, A)^{inv}$ dans $H^2(\Sigma, A)$ par rapport à q_Σ, on a pour $A = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, où $\mathbb{C}$, une décomposition en somme directe:

$$H^2(\Sigma, A) = H^2(\Sigma, A)^{inv} \oplus H^2(\Sigma, A)^{\#},$$

et $H^2(\Sigma, A)^{\#} \subset H^2(\Sigma, A)$ détermine également une sous-structure de Hodge de $H^2(\Sigma, A)$.

On notera $H^{2,0}(\Sigma)^{inv}$ (resp. $H^{2,0}(\Sigma)^{\#}$ la partie de type $(2,0)$ de $H^2(\Sigma, \mathbb{C})^{inv}$ (resp. $H^2(\Sigma, \mathbb{C})^{\#}$). On se propose d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. i) *Si* $H^{2,0}(\Sigma)^{inv} = 0$, *on a* $CH_0(\Sigma)^{inv} = \mathbb{Z}$, *où* $CH_0(\Sigma)^{inv}$ *dénote le groupe des zéro-cycles de* Σ, *modulo équivalence rationnelle, invariants sous* G.

ii) *Si* $H^{2,0}(\Sigma)^{\#} = 0$, G *agit trivialement sur* $CH_0(\Sigma)$.

REMARQUE 1.2. Si G agit effectivement sur $\mathbb{P}^3$, il est facile de voir que l'hypothèse du second énoncé entraîne $d \leq 4$, et comme $CH_0(\Sigma) = \mathbb{Z}$ pour $d \leq 3$, le résultat concerne principalement les surfaces de degré 4.

Les paragraphes 1.3 à 1.16 sont consacrés à la démonstration du théorème. Les entiers n, d, n_i, k étant fixés on notera H le système linéaire sur $\mathbb{P}^3$ constitués des polynômes $P \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$, tels que $g^*P = \varsigma^k P$. On établit d'abord le lemme suivant:

LEMME 1.3. a) *Si* $d \geq 3$, *la restriction de* H *à* Σ *fournit un sous-espace vectoriel de* $H^0(\mathcal{O}_\Sigma(d))$ *de dimension supérieure ou égale à trois.*

b) *Si* $d \geq 4$, *l'application rationnelle* $\Phi_H : \Sigma - - \to \mathbb{P}((H/\langle F \rangle)^*)$ *a une image de dimension deux.*

DÉMONSTRATION. Comme $F \in H$, pour $i = 0, 1, 2, 3$ on a: $\varphi_i := X_i \partial F/\partial X_i \in H$; Σ étant lisse de degré ≥ 3, la seule relation du type $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i X_i \partial F/\partial X_i = 0$ (mod F) est à un coefficient près la relation d'Euler: $dF = \sum_{i=0}^{3} X_i \partial F/\partial X_i$, ce qui prouve a). Pour montrer b) considérons d'abord l'application rationnelle Φ définie par $(\varphi_0, \dots, \varphi_3)$; son image n'est pas contenue dans un hyperplan de coordonnées; soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_3) \in \operatorname{Im} \Phi$, tel que $\alpha_i \neq 0$, $\forall i$; soit C une composante de dimension positive de $\Phi^{-1}(\alpha)$, sur laquelle tous les φ_i ne s'annulent pas. Posant $\alpha_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$, on a donc sur C: $(\partial F/\partial X_i)/(\partial F/\partial X_j) = \alpha_{ij} P_i/P_j$, où $P_i := \prod_{j \neq i} X_j$. Les applications rationnelles définies sur C par $(\partial F/\partial X_0, \dots, \partial F/\partial X_3)$ et $(P_0, \dots, P_3)$ coïncident donc; or la première est donnée par un sous-système sans point base de $|\mathcal{O}_C(d-1)|$ et la seconde par un sous-système de $|\mathcal{O}_C(3)|$. Comme $d \geq 4$, ceci n'est possible que si $d = 4$, et le système $(P_0, \dots, P_3)$ est sans point base sur C. C ne rencontre donc pas la réunion des droites $\Delta_{ij} := \{X_i = X_j = 0\}$, qui forme le base locus du système $(P_0, \dots, P_3)$ sur $\mathbb{P}^3$. Mais alors $H_{|C}$ est sans point base, par le lemme suivant:

LEMME 1.4. *Le base-locus de H est contenu dans la réunion des droites Δ_{ji}.*

Cela résulte en effet du fait que H est engendré par des monômes, et ne peut pas s'annuler sur un des plans de coordonnées, puisque $F \in H$.

Comme $H_{|C}$ est sant point base, $\Phi_{H|C}$ est finie, ce qui prouve finalement que la fibre générique de Φ_H est finie, d'où l'assertion b).

1.5. D'après le lemme 1.3, et par Bertini, on voit que le système linéaire $H_{|\Sigma}$ a une partie mobile non triviale dont le membre général C est une courbe irréductible, non singulière en dehors de son intersection avec le base-locus Z de $H_{|\Sigma}$. G agit bien sûr sur C, et donc sur sa normalisée $\tilde{C}$; la jacobienne $J\tilde{C}$ de $\tilde{C}$ admet une décomposition à isogénie près en une somme directe $J\tilde{C} \equiv J\tilde{C}^{inv} \oplus J\tilde{C}^{\#}$ et pour obtenir le théorème, il suffit de montrer:

THÉORÈME 1.6. *Soit $j : \tilde{C} \longrightarrow \Sigma$ l'application naturelle, induisant $j_* : J\tilde{C} \longrightarrow CH_0^0(\Sigma)$ (où l'indice supérieur 0 dénote le sous-groupe des zéro-cycles de degré 0); alors dans le cas i) l'image $j_*(J\tilde{C}^{inv})$ est contenue dans l'ensemble des zéro-cycles supportés sur Z, à l'équivalence rationnelle près, et dans le cas ii), on a la même conclusion en remplaçant $J\tilde{C}^{inv}$ par $J\tilde{C}^{\#}$.*

Que ce soit suffisant résulte de [13] et de $Alb\Sigma = 0$ ou plus simplement du fait que Z est constitué de droites et de points isolés, et de [4]. En effet, dans le cas i) il est clair que le groupe $F^1CH_0(\Sigma/G)$, qui est égal à $F^1CH_0(\Sigma)^{inv}$, est engendré par les différences $Gx - Gy$ des orbites de points génériques x et y de Σ. D'après 1.3.b) un tel cycle provient de $(J\tilde{C}^{inv})$, où C est comme en 1.5 et contient x et y. Donc $F^1CH_0(\Sigma/G)^{inv}$ est supporté sur Z, et donc nul. On raisonne de la même manière dans le cas ii).

1.7. Il est facile de voir qu'il suffit de montrer 1.6 lorsque F est un point générique de H. L'avantage est le suivant: soit $\tilde{\mathbb{P}}_3 \xrightarrow{r} \mathbb{P}^3$ une résolution des singularités de l'application rationnelle $\Phi_H : \mathbb{P}^3 - - \to \mathbb{P}(H^*)$ donnée par H; alors on peut supposer que le transformé propre $\tilde{\Sigma}$ de Σ dans $\tilde{\mathbb{P}}^3$ est lisse, et le transformé propre de C est isomorphe à $\tilde{C}$ et est l'intersection complète de deux membres $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}'$ du système linéaire $\tilde{H}$ sans point base défini sur $\tilde{\mathbb{P}}^3$.

1.8. $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Sigma}'$, comme points de $\mathbb{P}(\tilde{H})$, engendrent un pinceau $\mathbb{P}^1$, et fournissent une application méromorphe $\psi : \tilde{\mathbb{P}}^3 - - \to$, qui se résoud par éclatement de $\tilde{C}$ dans $\tilde{\mathbb{P}}^3$. Soit $\hat{\psi} : \hat{\mathbb{P}}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, l'application ainsi obtenue, où $\hat{\mathbb{P}}^3$ est l'éclatement de $\tilde{\mathbb{P}}^3$ le long de $\tilde{C}$. On sait que si $E \xrightarrow{\pi} \tilde{C}$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement, et $i : E \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^3$ est l'injection naturelle, le composé $i_* \circ \pi^* : H^1(\tilde{C}) \longrightarrow H^3(\hat{\mathbb{P}}^3)$ est injectif.

Enfin, il est clair qu'on peut supposer que G agit sur $\tilde{\mathbb{P}}^3$, donc aussi sur $\hat{\mathbb{P}}^3$, et qu'alors $i_* \circ \pi^*$ est équivariant, fournissant $i_* \circ \pi^* : H^1(\tilde{C})^{inv} \longrightarrow H^3(\hat{P}^3)^{inv}$ et $i_* \circ \pi^* : H^1(\tilde{C})^{\#} \longrightarrow H^3(\hat{\mathbb{P}}^3)^{\#}$.

1.9. Notons $\mathbb{P}_0^1 \subset \mathbb{P}^1$ l'ouvert de Zariski au-dessus duquel $\hat{\psi}$ est lisse, et $\hat{\mathbb{P}}_0^3 := \hat{\psi}^{-1}(\mathbb{P}_0^1)$. Comme $R^3\psi_*\mathbb{Z} = 0$ sur $\mathbb{P}_0^1$, $H^3(\hat{\mathbb{P}}_0^3, \mathbb{Z})$ est égal à

$H^1(\mathbb{P}^1_0, R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})$, et plus précisément, $H^3(\hat{\mathbb{P}}^3_0)^{inv} = H^1(\mathbb{P}^1_0, (R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})^{inv})$, $H^3(\hat{\mathbb{P}}^3_0)^{\#} = H^1(\mathbb{P}^1_0, (R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})^{\#})$.

D'autre part, les hypothèses du théorème 1 entraînent les faits suivants: la décomposition de $H^2(\tilde{\Sigma}_t, \mathbb{Q})$ en partie "inv" et partie "#" fournit une décomposition analogue sur $NS(\tilde{\Sigma}_t) \otimes \mathbb{Q} \simeq \operatorname{Pic} \tilde{\Sigma}_t \otimes \mathbb{Q}$, d'où deux sous-espaces $NS(\tilde{\Sigma}_t)^{inv}$ et $NS(\tilde{\Sigma}_t)^{\#}$ de $NS(\tilde{\Sigma}_t)$, (où NS dénote le groupe de Néron-Séveri); par le théorème de Lefschetz sur les classes (1,1) on a dans le cas i) $H^2(\tilde{\Sigma}_t, \mathbb{Z})^{inv} = NS(\tilde{\Sigma}_t)^{inv}$, et dans le cas ii), $H^2(\tilde{\Sigma}_t, \mathbb{Z})^{\#} = NS(\tilde{\Sigma}_t)^{\#}$; enfin, dans le cas i) le schéma de Picard relatif invariant $\operatorname{Pic}(\hat{\mathbb{P}}^3_0/\mathbb{P}^1_0)^{inv}$ est étale au-dessus de $\mathbb{P}^1_0$ et constitué d'une réunion disjointe de courbes étales au-dessus de $\mathbb{P}^1_0$, tandis que dans le cas ii) on a la même conclusion pour $\operatorname{Pic}(\hat{\mathbb{P}}^3_0/\mathbb{P}^1_0)^{\#}$. Dans les deux cas, il existe une courbe $\overline{D}$ lisse, peut être non connexe, munie d'une application $\rho : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{P}^1$, étale au-dessus de $\mathbb{P}^1_0$, et telle que: dans le cas i), il existe une application naturelle surjective $\alpha : R^0\rho_*\mathbb{Z}_{|\mathbb{P}^1_0} \longrightarrow (R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})^{inv}_{|\mathbb{P}^1_0}$; dans le cas ii), il existe une application naturelle surjective $\alpha : (R^0\rho_*\mathbb{Z})_{|\mathbb{P}^1_0} \longrightarrow (R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})^{\#}_{\mathbb{P}^1_0}$.

Comme $\mathbb{P}^1_0$ n'est pas complet, et que les faisceaux considérés sont localement constants, α induit une application surjective notée de la même façon:

$$\alpha : H^1(R^0\rho_*\mathbb{Z}_{|\mathbb{P}^1_0}) \longrightarrow H^1((R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})^{inv}_{|\mathbb{P}^1_0}) \text{ (resp.}$$
$$\alpha : H^1(R^0\rho_*\mathbb{Z}_{|\mathbb{P}^1_0}) \longrightarrow H^1((R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Z})^{inv}_{|\mathbb{P}^1_0})).$$

1.10. D'après [14], on sait que les groupes de cohomologie ci-dessus sont munis naturellement d'une structure de Hodge mixte, pour laquelle α est un morphisme de structure de Hodge mixtes puisque l'application α au niveau des faisceaux est un morphisme de variations de structures de Hodge (triviales). Par [6], la surjectivité de α entraîne la surjectivité de α restreinte aux sous-espaces de poids minimal pour la filtration W, soit. Dans le cas i), une surjection α:

$$W^1H^1(R^0\rho_*\mathbb{Q}_{|\mathbb{P}^1_0}) \longrightarrow W^3H^1((R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Q})^{inv}_{|\mathbb{P}^1_0}),$$

dans le cas ii), une surjection α:

$$W^1H^1(R^0\rho_*\mathbb{Q}_{|\mathbb{P}^1_0}) \longrightarrow W^3H^1((R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Q})^{\#}_{|\mathbb{P}^1_0}).$$

Or notant k et k' les inclusions $\rho^{-1}(\mathbb{P}^1_0) \hookrightarrow \overline{D}$, et $\hat{\mathbb{P}}^3_0 \hookrightarrow \hat{\mathbb{P}}^3$, on a (cf. [14]):

$$W^1H^1(R^0\rho_*\mathbb{Q}_{|\mathbb{P}^1_0}) = k^*H^1(\overline{D}, \mathbb{Q}) \subset H^1(\rho^{-1}\mathbb{P}^1_0, \mathbb{Q})$$

et

$$W^3H^1(R^2\hat{\psi}_*\mathbb{Q}_{|\mathbb{P}^1_0}) = k'^*H^3(\hat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Q}) \subset H^3(\hat{\mathbb{P}}^3_0, \mathbb{Q})$$

de sorte que l'on a finalement des morphismes surjectifs de structures de Hodge (toujours notés α):

$$\text{Cas i):} \quad \alpha : H^1(\overline{D}, \mathbb{Q}) \longrightarrow k'^*(H^3(\hat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Q})^{inv})$$

$$\text{Cas ii):} \quad \alpha : H^1(\overline{D}, \mathbb{Q}) \longrightarrow k'^*(H^3(\hat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Q})^{\#}).$$

1.11. Finalement, par sa construction même, la courbe $\overline{D}$ paramètre des 1-cycles définis à équivalence rationnelle près dans $\hat{\mathbb{P}}^3$, ce qui fournit une application d'Abel-Jacobi $\beta : J\overline{D} \longrightarrow J\hat{\mathbb{P}}^3$, où $J\hat{\mathbb{P}}^3$ est la jacobienne intermédiaire de $\hat{\mathbb{P}}^3$, et $J\overline{D}$ est la somme directe des jacobiennes des composantes connexes de $\overline{D}$. Il est immédiat que la version topologique $\beta_{\mathbb{Q}}$ de $\beta : \beta_{\mathbb{Q}} : H^1(\overline{D}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^3(\hat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Q})$ satisfait $k'^* \circ \beta_{\mathbb{Q}} = \alpha$.

De plus le noyau de k'^* est égal à la somme des images des applications $i_{t_*} : H^1(\hat{\tilde{\Sigma}}_t) \longrightarrow H^3(\hat{\mathbb{P}}^3)$, où t parcourt l'ensemble des valeurs critique de $\hat{\psi}$, $\hat{\tilde{\Sigma}}_t$ dénote une désingularisation de la surface singulière $\tilde{\Sigma}_t$, et $i_t : \hat{\tilde{\Sigma}}_t \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^3$ est le composé de l'injection naturelle $\tilde{\Sigma}_t \subset \hat{\mathbb{P}}^3$ et de l'application de désingularisation $\hat{\tilde{\Sigma}}_t \longrightarrow \tilde{\Sigma}_t$. Les paragraphes 1.9 et 1.11 se résument donc dans la proposition suivante:

PROPOSITION 1.12. *Les applications d'Abel-Jacobi β, et $i_{t^*} : \mathrm{Pic}^0(\hat{\tilde{\Sigma}}_t) \longrightarrow J\hat{\mathbb{P}}^3$, satisfont:*

Cas i)
$$\beta(J\overline{D}) + \sum_{t \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_0} i_{t^*}((\mathrm{Pic}^0 \hat{\tilde{\Sigma}}_t)^{inv}) = (J\hat{\mathbb{P}}^3)^{inv}$$

Cas ii)
$$\beta(J\overline{D}) + \sum_{t \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_0} i_{t^*}((\mathrm{Pic}^0 \hat{\tilde{\Sigma}}_t)^{\#}) = (J\hat{\mathbb{P}}^3)^{\#}.$$

(On a utilisé le fait que G agit sur les variétés abéliennes $\mathrm{Pic}^0(\hat{\tilde{\Sigma}}_t)$ pour écrire la décomposition en partie "*inv*" et partie "#" de $\mathrm{Pic}^0(\hat{\tilde{\Sigma}}_t)$, comme en 1.5).

1.13. On notera encore $\beta : \overline{D} \longrightarrow J\hat{\mathbb{P}}^3$ le composé de l'application d'Albanese de $\overline{D}$ et de l'application β définie ci-dessus (on suppose choisi un point sur chaque composante de $\overline{D}$).

Rappelons l'existence de l'application surjective $\pi_* \circ i^* : J\hat{\mathbb{P}}^3 \longrightarrow J\tilde{C}$ duale de $i_* \circ \pi^*$ (cf. 1.8); on a alors le lemme suivant:

LEMME 1.14. a) *A des translations évidentes près, l'application $\pi_* \circ i^* \circ \beta : \overline{D} \longrightarrow J\tilde{C}$, est obtenue de la façon suivante: un point p de $\overline{D}$ détermine, lorsque le point $t := \rho(p) \in \mathbb{P}^1_0$, un fibré en droite inversible $\mathcal{L}_p$ sur la surface $\tilde{\Sigma}_t$, invariant ou antiinvariant selon qu'on est dans le cas* i) *ou* ii), *et l'on a alors:*

$$\pi_* \circ i^* \circ \beta(p) = \tilde{j}_t^*(\mathcal{L}_p) \in \mathrm{Pic}\ \tilde{C},$$

où $\tilde{j}_t$ est l'injection naturelle $\tilde{C} \hookrightarrow \tilde{\Sigma}_t$.

b) *De même, pour* $t \in \mathbb{P}^1 \backslash \mathbb{P}^1_0$, *le composé:* $\pi_* \circ i^* \circ i_{t^*} : \mathrm{Pic}^0(\hat{\hat{\Sigma}}_t) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(\tilde{C})$ *s'identifie à la restriction* $\tilde{j}_t^*$, *où* $\tilde{j}_t$ *est l'inclusion* $\tilde{C} \subset \hat{\hat{\Sigma}}_t$, *définie par le fait que* $\tilde{\Sigma}_t$ *est non singulière le long de* $\tilde{C}$.

a) résulte en effet de ce que β est l'application d'Abel-Jacobi, et donc que $\beta(p) = i_{t^*}(\mathcal{L}_p) \in CH_1(\hat{\mathbb{P}}^3)$, et de ce que $\tilde{\Sigma}_t \cap E \simeq \tilde{C} \times \{t\} \subset \tilde{C} \times \mathbb{P}^1 \simeq E$. De même pour b).

1.15. Notant que $CH_1(\mathbb{P}^3)^{inv} = \mathbb{Z}$, et $CH_1(\mathbb{P}^3)^\# = 0$, le théorème 1.6 résulte alors de la proposition 1.12, du lemme 1.14, et du lemme 1.16 suivant.

LEMME 1.16. *Soit* $t \in \mathbb{P}^1$ *et soit* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,\tilde{\Sigma}_t$, *si* $t \in \mathbb{P}^1_0$, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,\hat{\hat{\Sigma}}_t$ *si* $t \notin \mathbb{P}^1_0$; *alors la restriction* $\tilde{j}_t^*\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{L}$ *à* $\tilde{C}$ *satisfait:* $j_*(\tilde{j}_t^*\mathcal{L})$ *est contenu dans la somme de l'image de la restriction:* $CH_1(\mathbb{P}^3) \longrightarrow CH_0(\Sigma)$ *et du sous-groupe de* $CH_0(\Sigma)$ *constitué des cycles supportés sur* Z, *à équivalence rationnelle près.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $t \in \mathbb{P}^1_0$, et que les surfaces $\tilde{\Sigma}_t$ et Σ_t soient non singulières biméromorphes, via r, en dehors de $Z \subset \Sigma_t$. Alors pour $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,\tilde{\Sigma}_t$ il est clair que $\tilde{j}_t^*(\mathcal{L})$ et $j_t^*(r_*\mathcal{L}) \in \mathrm{Pic}\,\tilde{C}$ diffèrent par un cycle supporté au-dessus de $Z \cap C$, où $j_t : \tilde{C} \longrightarrow \Sigma_t$ est égale à $r \circ \tilde{j}_t$. D'autre part, notant $h_t : \Sigma_t \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, $h : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ les inclusions naturelles, on a aussi:

$$j_*(j_t^*(r_*\mathcal{L})) = h^*(h_{t^*}(r_*\mathcal{L})), \text{ modulo des cycles supportés sur } Z,$$

dans $CH_0(\Sigma)$, ce qui résulte du fait que $\tilde{C}$ est la normalisée de C et $C = \Sigma_t \cap \Sigma$ modulo une courbe supportée sur Z. Comme h^* est la restriction $CH_1(\mathbb{P}^3) \longrightarrow CH_0(\Sigma)$, le lemme est prouvé dans ce cas.

Le cas où la surface $\tilde{\Sigma}_t$ est singulière se traite exactement de la même manière, compte tenu du fait que $\tilde{\Sigma}_t$ n'est pas singulière le long de $\tilde{C}$.

Le théorème 1.1 est donc prouvé.

On conclut cette section en donnant quelques exemples et généralisations du théorème 1.1.

EXEMPLE 1.17. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{P}^3$ par $g^*X_0 = -X_0$, $g^*X_1 = -X_1$, $g^*X_2 = X_2$, $g^*X_3 = X_3$, et soit $F \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))$ un polynôme invariant, i.e. $g^*F = F$. Comme $g^*X_i^4 = X_i^4$, on a: H est sans point base (H défini après la Remarque 1.2), et donc si F est générique dans H la surface Σ définie par F est lisse. Il est facile de voir que G agit trivialement sur $H^{2,0}(\Sigma) \simeq \mathbb{C}$, et donc, par le théorème 1.1, on a $CH^0(\Sigma)^- = 0$.

De même, si $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{P}^3$ par $g^*X_0 = X_0$, $g^*X_1 = X_1$, $g^*X_2 = jX_2$, $g^*X_3 = j^2X_3$, on voit facilement qu'il existe F invariant par g définissant une surface Σ lisse, pour laquelle g agit trivialement sur $H^0(K_\Sigma)$; on conclut donc que G agit trivialement sur $CH_0(\Sigma)$.

GÉNÉRALISATION 1.18. Considérons l'involution i sur $\mathbb{P}^5$ définie par: $i^*X_0 = -X_0$, $i^*X_1 = -X_1$, $i^*X_2 = X_2$, $i^*X_3 = X_3$, $i^*X_4 = X_4$, $i^*X_5 = X_5$. Les quadriques invariantes sous i forment un système sans point base, et donc l'intersection générique de trois de ces quadriques est une surface $K3\Sigma$ lisse, sur laquelle i agit, l'action induite sur $H^0(K_\Sigma)$ étant triviale. Pour montrer que i agit trivialement sur $CH_0(\Sigma)$, on remplace dans la démonstration du théorème $\mathbb{P}^3$ par X = intersection de trois quadriques dans $\mathbb{P}^6$, invariantes sous l'involution qui envoie X_i sur $-X_i$ pour $i = 0, 1$ et X_i sur X_i pour $i \geq 2$, X étant choisie lisse et telle que $X \cap \mathbb{P}^5 = \Sigma$. On remplace H par le système linéaire sur X engendré par les X_i, pour $i \geq 2$. Suivant la démarche décrite en 1.8-1.16, on obtient: $CH_0(\Sigma)^-$ est engendré par la restriction $CH_1(X)^- \longrightarrow CH_0(\Sigma)^-$. Or on sait ([1], [2]) que $CH_1(X)^-$ est isomorphe à JX^-, et est de dimension finie (au sens de [13]). On en conclut par ([13] th. 4) que $CH_0(\Sigma)^-$ est en fait égal à 0, puisque $Alb\Sigma = 0$.

EXEMPLE 1.19 (surface de Godeaux [11]). Soit $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{P}^3$ par $g^*X_0 = \varsigma X_0$, $g^*X_1 = \varsigma^2 X_1$, $g^*X_2 = \varsigma^3 X_2$, $g^*X_3 = \varsigma^4 X_4$, où $\varsigma \neq 1$ satisfait $\varsigma^5 = 1$. Comme le système H constitué des polynômes F de degré 5 invariants sous G contient les monômes X_i^5, il est sans point base, et donc pour $F \in H$ générique, la surface Σ définie par F est lisse; il est facile de voir qu'il n'existe pas de 2-forme sur Σ invariante sous G, et l'on conclut par le théorème 1.1 que la surface quotient Σ/G satisfait: $CH_0(\Sigma/G) = \mathbb{Z}$.

GÉNÉRALISATION 1.20 (surface de Godeaux [11]). Soit ς une racine primitive $8^{\text{ième}}$ de l'unité et considérons l'action suivante de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = G$ sur $\mathbb{P}^6 : g^*X_i = \varsigma^{i+1}X_i i = 0, \ldots, 6$. Pour $i = 0, 1, 2, 3$ soit Q_i une quadrique générique satisfaisant $g^*Q_i = \varsigma^{2i}Q_i$. Alors la surface Σ définie par $Q_0 = \cdots = Q_3 = 0$ est lisse, munie d'une action libre de G, pour laquelle il n'y a pas de 2-forme invariante sur Σ. Pour montrer que $CH_0(\Sigma/G) = \mathbb{Z}$, on remplace dans la démonstration du théorème 1.1 $\mathbb{P}^3$ par la variété X de dimension 3 définie par Q_0, Q_1 et Q_2, et H par le système des quadriques Q satisfaisant: $g^*Q = \varsigma^6 Q$. On vérifie facilement que pour Σ générique, X a pour seule singularité une singularité quadratique ordinaire en l'un des sommets. Comme plus haut, la désingularisée $\tilde{X}$ de X satisfait: $CH_1(\tilde{X})$ est isomorphe à $J\tilde{X}$; suivant la méthode décrite en 1.8-1.16, on montre que l'application de restriction $CH_1(\tilde{X})^{inv} \longrightarrow CH_0(\Sigma/G)$ est surjective, puis par [13], on conclut que $CH_0(\Sigma/G) = \mathbb{Z}$.

2. - Le cas de la dimension trois

Dans cette partie, on considère des hypersurfaces quintiques lisses $X \subset \mathbb{P}^4$, définies par des polynômes F invariants sous l'involution $i : (X_0, X_1, \cdots, X_4) \longrightarrow (-X_0, -X_1, X_2, X_3, X_4)$. L'involution i agit alors trivialement sur $H^0(K_X) \simeq \mathbb{C}$, de sorte que la partie antiinvariante $H^3(X)^-$ de $H^3(X)$ détermine une sous-structure de Hodge de $H^3(X)$, sans composante de type (3, 0). La partie antiinvariante $(JX)^-$ de la jacobienne intermédiaire JX de X est alors une sous-variété abélienne de JX, et l'on se propose d'abord de montrer:

PROPOSITION 2.1. *L'application d'Abel-Jacobi* $\Phi_X : CH_1(X)_{\text{hom}} \longrightarrow JX$, *envoie* $CH_1(X)^-$ *surjectivement sur* JX^-.

($CH_1(X)_{\text{hom}}$ dénote le sous-groupe de $CH_1(X)$ constitué des 1-cycles homologues à zéro; comme $H_2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, sur lequel i agit trivialement, on a $CH_1(X)^- \subset CH_1(X)_{\text{hom}}$).

La démonstration de la proposition 2.1 occupe les paragraphes 2.2 à 2.19. Pour X fixé, on note $U_X \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(5))$ l'ensemble des quintiques lisses Y de $\mathbb{P}^5$, invariantes sous l'involution $i : (X_0, \dots, X_5) \longrightarrow (-X_0, -X_1, X_2, \dots, X_5)$, et telles que $Y \cap \mathbb{P}^4 = X$.

Rappelons d'abord que comme conséquence du travail [17] (voir aussi [4]), on a:

LEMME 2.2. *Soit* $Y \in U_X$, *et soit* $\alpha \in H^4(Y,\mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(Y)$, *alors* α *est algébrique, i.e.; il existe un cycle algébrique* Z *de (co)dimension* 2 *dans* Y, *tel que* $[Z]$ *est un multiple entier de* α.

2.3. On considère le "lieu de Noether-Lefschetz pour les classes antiinvariantes" $\mathcal{S}(U_X)$, c'est-à-dire l'ensemble des $Y \in U_X$, telles qu'il existe une classe $\alpha \in H^{2,2}(Y) \cap H^4(Y,\mathbb{Z})^-$ (par définition de U_X, i agit sur Y, donc sur $H^4(Y,\mathbb{Z})$); pour une classe α entière fixée sur un ouvert simplement connexe V de U_X, la composante $\mathcal{S}_\alpha$ de l'intersection de ce lieu avec V, déterminée par α, est décrite par $h^{3,1}(Y)^- := \dim\ H^{3,1}(Y)^-$ équations holomorphes sur $Y \in V$. On vérifie que la dimension de U_X, modulo l'action des automorphismes de $\mathbb{P}^5$ agissant trivialement sur $\mathbb{P}^4$, est strictement supérieure à $h^{3,1}(Y)^-$, de sorte que l'on a toujours $\dim\ \mathcal{S}_\alpha > 0$, et donc globalement: $\mathcal{S}(U_X)$ est une union dénombrable d'ensembles algébriques de dimension strictement positive (ou est vide).

2.4. Soit T une composante de $\mathcal{S}(U_X)$; alors il existe une variété T' algébrique dominant T et contenue dans l'ensemble $\{(Y,\lambda)/Y \in T$, et $\lambda \in H^4(Y,\mathbb{Z})^- \cap H^{2,2}(Y)\}$. On définit sur T' l'application d'Abel-Jacobi $\Phi_{X,T'}$ de la façon suivante. Soit $(Y,\lambda) \in T'$; par le lemme 2.2, quitte à multiplier λ par un entier, il existe un cycle Z_λ sur Y, tel que $\lambda = [Z_\lambda]$. On pose $\Phi_{X,T'}(Y,\lambda) = \Phi_X(Z_\lambda \cdot X) \in JX^-$, où Φ_X est l'application d'Abel-Jacobi de X. Ceci est bien défini, car le terme de droite ne dépend que de la classe λ, qui est primitive et anti-invariante (cf. [7]).

2.5. Notons qu'il suffit de prouver 2.1 pour X générique. On va le faire en établissant les lemmes suivants:

LEMME 2.6. *Si* X *est générique,* $\mathcal{S}(U_X)$ *est non vide; plus précisément, il existe une composante* T *de* $\mathcal{S}(U_X)$ *réduite et de la bonne codimension* $h^{3,1}(Y)^-$.

LEMME 2.7. *Si* X *est générique, il existe* T *comme ci-dessus, et* T' *définie* *comme en 2.4, telle que $\Phi_{X,T'}$ soit non nulle; plus précisément il existe un point (Y,λ) de lissité de T', en lequel la différentielle de $\Phi_{X,T'}$ est de rang maximal, au sens où son noyau est constitué des déformations de (Y,λ) données par l'action infinitésimale du groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^5$ agissant trivialement sur $\mathbb{P}^4$.*

2.8. Soit $Y \in U_X$, et $\sigma_X \in H^0(\mathcal{O}_Y(1))$ la section correspondant à X. Soit $\lambda^{2,2^-} \in H^2(\Omega_Y^2)^-$, alors $\lambda^{2,2^-}$ fournit par produit intérieur une application, notée de la même manière: $\lambda^{2,2^-} : H^1(T_Y)^+ \longrightarrow H^3(\Omega_Y)^-$, d'où une application $\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X : H^1(T_Y(-X))^+ \longrightarrow H^3(\Omega_Y)^-$, obtenue en composant la précédente avec la multiplication par $\sigma_X : H^1(T_Y(-X)) \longrightarrow H^1(T_Y)$. Pour obtenir 2.6, il suffit, en appliquant l'argument de [9], de montrer l'existence d'un triplet $(Y, X, \lambda^{2,2^-})$ tel que l'application $\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X$ soit surjective (cela entraîne en effet la densité dans U_X des composantes de $\mathcal{S}(U_X)$ réduites de la bonne codimension.

2.9. Soit $G \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(5))^+$ le polynôme définissant Y, et soit $R^k(G)^+$ (resp. $R^k(G)^-$) la partie invariante (resp. antiinvariante) sous i de la composante de degré k de l'anneau jacobien de Y, quotient de l'anneau de polynômes $S(\mathbb{P}^5)$ par l'idéal engendré par les dérivées partielles $\partial G/\partial X_i$, $i = 0,\ldots,5$ de G. D'après [5], [7], décrivant les variations de structure de Hodge d'hypersurfaces, on voit qu'une classe $\lambda^{2,2^-}$ comme en 2.8 correspond à un élément $Q \in R^9(G)^-$, et qu'on a des isomorphismes $H^1(T_Y(-X))^+ \simeq R^4(G)^+$, $H^3(\Omega_Y)^- \simeq R^{14}(G)^-$, tels que l'application $\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X$ de 2.8 s'identifie à la multiplication par $X^5 Q : R^4(G)^+ \longrightarrow R^{14}(G)^-$. Modulo un changement de coordonnées le lemme 2.6 résulte alors de ce qui précède et du lemme suivant, dont la démonstration, inintéressante, ne sera pas donnée ici:

LEMME 2.10. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^5$ l'hypersurface quintique de Fermat, définie par l'équation $G = X_0^5 + \ldots + X_5^5$, invariante sous l'involution $i : (X_0,\ldots,X_5) \longrightarrow (X_1, X_0, X_3, X_2, X_4, X_5)$ (qui est du type considéré plus haut); alors il existe une forme linéaire H invariante par i et un élément $Q \in R^9(G)^-$ tels que la multiplication par $HQ = R^4(G)^+ \longrightarrow R^{14}(G)^-$ soit surjective.*

2.11. Soit maintenant un triplet (X, Y, λ) tel que $\lambda \in H^4(Y,\mathbb{Z})^- \cap H^{2,2}(Y)$ et que la classe $\lambda^{2,2^-} \in H^2(\Omega_Y^2)^-$ correspondant à λ satisfasse la condition de surjectivité 2.8. Alors (Y,λ) est un point lisse d'une variété T' définie comme en 2.4, dont l'espace tangent, modulo l'action des automorphismes, s'identifie au noyau de l'application $\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X : H^1(T_Y(-X))^+ \longrightarrow H^3(\Omega_Y)^-$. Pour montrer le lemme 2.7, il suffit de montrer qu'on peut trouver un tel triplet tel que la différentielle $(\Phi_{X,T'})_* : \mathrm{Ker}\ \lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X \longrightarrow H^2(\Omega_X)^-$ de l'application $\Phi_{X,T'}$ au point considéré soit injective. On établit d'abord:

LEMME 2.12. *$(\Phi_{X,T'})_*$ est décrite de la façon suivante. Par produit intérieur, $\lambda^{2,2^-}$ fournit une application notée de la même manière, $\lambda^{2,2^-}$: $H^1(T_Y(-X))^+ \longrightarrow H^3(\Omega_Y(-X))^-$, qui envoie* Ker $\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X$ *sur* Ker$(\sigma_X$: $H^3(\Omega_X(-X))^- \longrightarrow H^3(\Omega_Y)^-)$*; comme $H^2(\Omega_Y) = 0$, ce noyau est égal à $H^2(\Omega_{Y|X})^-$, qui s'envoie naturellement par une application notée ψ sur $H^2(\Omega_X)$,* *ce qui donne l'application* $(\Phi_{X,T'})_* : \mathrm{Ker}(\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X) \longrightarrow H^2(\Omega_X)^-$ *cherchée.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 2.2, et du fait que T' est lisse, on peut supposer que la classe λ est égale, modulo les multiples de h^2 (où $h = c_1(\mathcal{O}_Y(1))$) à la classe d'une surface lisse Z, telle que $C := Z \cap X$ soit lisse et telle que dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^0(N_Z\mathbb{P}^5) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(N_Y\mathbb{P}^5_{|Z}) \\ & & \uparrow \beta \\ & & H^0(N_Y\mathbb{P}^5) \xrightarrow[\delta]{} H^1(T_Y) \end{array}$$

on ait: Im α contient $\beta(\sigma_X \cdot H^0(N_Y\mathbb{P}^5(-X))^+ \cap \ker \lambda^{2,2^-} o\delta)$. Soit $u \in H^0(N_Y\mathbb{P}^5(-X))^+$, tel que $\beta(\sigma_X u) = \alpha(w)$ pour $w \in H^0(N_Z\mathbb{P}^5)$; alors $\alpha(w)$ s'annule le long de C, et donc, par la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^0(N_Z Y_{|C}) \xrightarrow{\varepsilon} H^0(N_Z\mathbb{P}^5_{|C}) \xrightarrow{\alpha_{|C}} H^0(N_Y\mathbb{P}^5_{|C}),$$

$w_{|C}$ détermine un élément v de $H^0(N_Z Y_{|C}) \simeq H^0(N_C X)$; on a l'application d'Abel-Jacobi infinitésimale: $H^0(N_C X) \xrightarrow{(\Phi_X)_*} H^2(\Omega_X)$, et par définition de $\Phi_{X,T'}$, on a: $\Phi_{X^*}(v) = (\Phi_{X,T'})_*(\delta(u))(A)$, où $\delta(u) \in H^1(T_Y(-X))^+$.

Par la suite exacte $0 \longrightarrow N_Z Y(-X) \xrightarrow{\sigma_X} N_Z Y \longrightarrow N_Z Y_{|C} \longrightarrow 0$ on obtient une flèche $\eta : H^0(N_Z Y_{|C}) \longrightarrow H^1(N_Z Y(-X))$, qui envoie v sur $\eta(v) =: t \in H^1(N_Z Y(-X))$.

On construit les analogues suivants γ_Z et γ_C de l'application de semi-régularité de Bloch [16]:

$$\gamma_Z : H^1(N_Z Y(-X)) \longrightarrow H^3(\Omega_Y(-X))$$

est le dual de ${}^t\gamma_Z : H^1(\Omega^3_Y(X)) \longrightarrow H^1(N_Z Y^*(X) \otimes K_Z)$, induite par l'application naturelle $\Omega^3_Y(X) \longrightarrow N_Z Y^*(X) \otimes K_Z$. $\gamma_C : H^0(N_Z Y_{|C}) \longrightarrow H^2(\Omega_{Y|X})$ est duale de ${}^t\gamma_C : H^1(\Omega^3_Y \otimes K_Y^{-1} \otimes K_X) \simeq H^1(\Omega^3_{Y|X}(X)) \longrightarrow H^1(N_Z Y^*(X) \otimes K_{Z|C}) \simeq H^1(N_Z Y^* \otimes K_C)$, induite par la même application restreinte à X et à C.

Il est évident que le diagramme suivant commute:

$$(B) \qquad \begin{array}{ccc} H^0(N_Z Y_{|C}) & \xrightarrow{\gamma_C} & H^2(\Omega_{Y|X}) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \xi \\ H^1(N_Z Y(-X)) & \xrightarrow{\gamma_Z} & H^3(\Omega_Y(-X)) \end{array}$$

où ξ est la flèche de connexion associée à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \Omega_Y(-X) \xrightarrow{\sigma_X} \Omega_Y \longrightarrow \Omega_{Y|X} \longrightarrow 0.$$

On sait par ailleurs [16] que le composé de γ_Z et de la flèche naturelle $\varsigma : H^1(T_Y(-X)) \longrightarrow H^1(N_Z Y(-X))$ est égal au produit intérieur avec $\lambda^{2,2}(C)$, et aussi que Φ_{X^*} est dual de l'application $H^1(\Omega^2_X) \longrightarrow H^1(N_C X^* \otimes K_C)$, induite par l'application naturelle $\Omega^2_X \longrightarrow N_C X^* \otimes K_C$. Ce dernier point et la définition de γ_C rendent évidente la commutativité du diagramme suivant:

$$(D)\qquad \begin{array}{ccccc} H^0(N_Z Y_{|C}) & \xrightarrow{\gamma_C} & H^2(\Omega_{Y|X}) & \xrightarrow{\xi} & H^3(\Omega_Y(-X)) \\ \sim\big\downarrow & & \big\downarrow\psi & & \\ H^0(N_C X) & \xrightarrow[\Phi_{X^*}]{} & H^2(\Omega_X) & & \end{array}$$

Notant finalement que pour $u \in H^0(N_Y\mathbb{P}^5(-X))$, satisfaisant $\beta(\sigma_X u) = \alpha(w)$ comme ci-dessus, et pour v tel que $\varepsilon(v) = w_{|C}$, on a:

$$\text{(E)}\qquad \varsigma \circ \delta(u) = \eta(v) \in H^1(N_Z Y(-X)),$$

on conclut:

$$\Phi_{X,T'(*)}(\delta(u)) \underset{(A)}{=} \Phi_{X^*}(v) \underset{(D)}{=} \psi \circ \gamma_C(v),$$

et

$$\xi \circ \gamma_C(v) \underset{(B)}{=} \gamma_Z \circ \eta(v) \underset{(E)}{=} \gamma_Z \circ \varsigma \circ \delta(u) \underset{(C)}{=} \lambda^{2,2} \circ \delta(u),$$

ce qui est exactement le résultat annoncé.

2.13. Interprétant les groupes de cohomologie considérés dans le lemme 2.12 en termes d'anneaux jacobiens, et rappelant l'existence de $Q \in R^9(G)^- \simeq H^2(\Omega^2_Y)^-$ correspondant à $\lambda^{2,2^-}$, et telle que $\lambda^{2,2^-} \circ \sigma_X$ s'identifie à la multiplication par $QX_5 : R^4(G)^+ \cdot \longrightarrow R^{14}(G)^-$ on obtient alors facilement le corollaire suivant, qui utilise l'isomorphisme supplémentaire: $H^2(\Omega_X)^- \simeq R^{10}(F)^-$.

COROLLAIRE 2.14. $(\Phi_{X,T'})_* : \mathrm{Ker}(QX_5) \longrightarrow R^{10}(F)^-$ *est décrite de la façon suivante: soit* $T \in \mathrm{Ker}(QX_5) \subset R^4(G)^+$. *Soit* $\tilde{T} \in S^4(\mathbb{P}^5)^+$ *relevant* T, *et soit* $\tilde{Q} \in S^9(\mathbb{P}^5)^-$ *relevant* Q. *Ecrivons* $X_5\tilde{Q}\tilde{T} = \sum_0^5 A_i \partial G/\partial X_i$ *avec* $d^0 A_i = 10$, *et* $A_5 \in S^{10}(\mathbb{P}^5)^-$. *Alors* $(\Phi_{X,T'})_*(T)$ *est égal à l'image de* A_5 *dans* $R^{10}(F)^-$ *par le composé* $S^{10}(\mathbb{P}^5)^- \longrightarrow S^{10}(\mathbb{P}^4)^- \longrightarrow R^{10}(F)^-$.

2.15. Soient maintenant $T \in R^4(G)^+$, $Q \in R^9(G)^-$, tels que $X_5 TQ = 0$ dans $R^{14}(G)^-$, et supposons que l'élément A_5 construit en 2.14 s'annule dans $R^{10}(F)^-$; on peut alors écrire: $A_5 = X_5 P + \sum_{j=0}^{4} B_j \partial G/\partial X_j$, ce qui fournit:

$$X_5(\tilde{Q}\tilde{T} - P\partial G/\partial X_5) = \sum_{j=0}^{4} C_j \partial G/\partial X_j;$$

par régularité de la séquence $(X_5, \partial G/\partial X_j)_{j=0,\dots,4}$, ceci entraîne que $\tilde{Q}\tilde{T} - P\partial G/\partial X_5$ est dans l'idéal engendré par les $\partial G/\partial X_j$ pour $j \leq 4$, et donc que $\tilde{Q}\tilde{T}$ est dans l'idéal engendré par les $\partial G/\partial X_i$, soit encore: $QT = 0$ dans $R^{13}(G)^-$. Par 2.14, il suffit donc pour prouver le lemme 2.7, de trouver un triplet (X, Y, λ) tel que $\lambda \in H^4(Y, \mathbb{Z})^- \cap H^{2,2}(Y)^-$, et que l'élément $Q \in R^9(G)^-$ associé satisfasse la condition de surjectivité 2.8 et la condition suivante: la multiplication par $Q : R^4(G)^+ \longrightarrow R^{13}(G)^-$ est injective. On a d'abord le lemme suivant, de même nature que le lemme 2.10 et dont la démonstration sera omise pour les mêmes raisons.

LEMME 2.16. *Soit G le polynôme de Fermat, $G = \sum_0^5 X_i^5$, invariant par l'involution $i : (X_0, \dots, X_5) \longrightarrow (X_1, X_0, X_3, X_2, X_4, X_5)$. Alors il existe $Q \in R^9(G)^-$ induisant une injection: $R^4(G)^+ \longrightarrow R^{13}(G)^-$.*

2.17. On conclut maintenant la démonstration de 2.7 de la façon suivante; soit encore G le polynôme de Fermat, et i l'involution définie en 2.16. Soit H la forme linéaire invariante par i fournie par le lemme 2.10; les conditions: la multiplication par $HQ : R^4(G)^+ \longrightarrow R^{14}(G)^-$ est surjective, et la multiplication par $Q : R^4(G)^+ \longrightarrow R^{13}(G)^-$ est injective sont algébriques sur $Q \in R^9(G)^-$ et ouvertes; comme chacune est satisfaite par au moins un élément de $R^9(G)^-$, il existe un élément Q satisfaisant les deux conditions. De plus $R^9(G)^-$ a une structure réelle fournie par l'isomorphisme

$$R^9(G)^- \simeq H^2(\Omega_Y^2)^- \simeq (H^2(\Omega_Y^2)^- \cap H^4(Y, \mathbb{R})) \otimes \mathbb{C};$$

on peut alors choisir Q représentant une classe réelle et satisfaisant ces deux conditions; mais alors l'argument expliqué dans [9] montre que l'on peut choisir G' invariante par i arbitrairement proche de G, $Q' \in R^9(G')^-$ arbitrairement proche de Q, telle que $Q' \in H^2(\Omega_{Y'}^2)^- \cap H^4(Y', \mathbb{Q})$. Par continuité le couple (G', Q') satisfait les deux conditions ci-dessus (par exemple pour le même H) ce qui prouve le lemme 2.7, d'après 2.15, pour le triplet (X', Y', λ') où $X' \subset Y'$ est définie par H et λ' est la classe rationnelle correspondant à Q'. Bien sûr, le lemme est alors également vrai pour X générique.

2.18. Les lemmes 2.6 et 2.7 montrent que pour X générique (invariante par i), l'application d'Abel-Jacobi $\Phi_X : CH_1(X)^- \longrightarrow (JX)^-$ est non nulle. Comme, pour X générale, l'image de l'application d'Abel-Jacobi est une sous-variété abélienne de $(JX)^-$, correspondant à un sous-groupe $L \subset H^3(X, \mathbb{Z})^-$, invariant par monodromie sur l'ouvert $U \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))^+)$ paramétrant les quintiques invariantes lisses [7]), il suffit pour conclure la preuve de la proposition 2.1, de montrer[(1)]:

[(1)] Le rapporteur m'informe que l'on peut trouver une démonstration plus détaillée de ce lemme dans l'article de F. Bardelli: "On Grothendieck's generalized Hodge conjecture for a family of threefolds with trivial canonical bundle" (preprint).

LEMME 2.19. *Soit* $L \subset H^3(X,\mathbb{Z})^-$ *un sous-réseau invariant sous l'action de monodromie* $\Gamma = \pi_1(U,) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^3(X,\mathbb{Z})^-)$*, où* $0 \in U$ *paramètre* X*, alors* $L = 0$ *ou* $L = H^3(X,\mathbb{Z})^-$.

DÉMONSTRATION. On vérifie aisément que l'hypersurface discriminante $D \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))^+)$, complémentaire de U, a deux composantes irréductibles D_1 et D_2 telles que:

- Un point générique $0 \in D_1$ paramètre une variété X_0 ayant exactement deux points singuliers quadratiques non dégénérés, échangés par i.
- Un point générique $0 \in D_2$ paramètre une variété X_0 ayant exactement un point singulier quadratique non dégénéré situé sur le plan défini par $X_0 = X_1 = 0$ (où l'involution i agit par $(X_0, \dots, X_4) \longrightarrow (-X_0, -X_1, X_2, X_3, X_4)$. De plus l'intersection générique de deux quintiques invariantes est une surface lisse.

Considérons un pinceau d'éléments de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))^+$, ayant pour base locus une surface lisse, et rencontrant D en $t_1, \dots, t_k$, points génériques de D_1, et $s_1, \dots, s_\ell$, points génériques de D_2. Ce pinceau rencontre alors transversalement D, et la monodromie sur $V := \mathbb{P}^1 \backslash \{t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_\ell\}$, centrée en $0 \in \mathbb{P}^1$, (i.e. $\Gamma : \pi_1(V, 0) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H^3(X_0, \mathbb{Z})^-)$ est décrite par la théorie de Picard-Lefschetz: ([7]).

- Pour chaque t_i, on choisit un lacet γ_i centré en 0 et engendrant $\mathrm{Ker}(\pi_1(V \cup \{t_i\}, 0) \longrightarrow \pi_1(V, 0))$.
- Pour chaque s_j on choisit de même un lacet γ_i' centré en 0 et contournant seulement s_j.
- A chaque γ_i sont associés deux cycles évanescents δ_i, δ_i' dans $H^3(X_0, \mathbb{Z})$ indépendants et échangés par l'action de i. $\Gamma(\gamma_i)$ agit alors sur $H^3(X_0, \mathbb{Z})^-$ par la formule de Picard-Lefschetz: $\Gamma(\gamma_i(\alpha) = \alpha + \langle \alpha, \delta_i'' \rangle \delta_i''$, où $\delta_i'' = \delta_i - \delta_i'$.
- La monodromie le long de γ_j' agit trivialement sur $H^3(X_0, \mathbb{Z})^-$.
- Comme D_1 est irréductible, les cycles δ_i'', $i = 1, \dots, k$, forment une seule orbite sous l'action de monodromie $\pi_1(U, 0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^3(X_0, \mathbb{Z})^-)$.
- Les cycles δ_i'' engendrent $H^3(X_0, \mathbb{Z})^-$. On conclut alors par l'argument usuel, en notant que la forme d'intersection $\langle\ \rangle$ est non dégénérée sur $H^3(X_0, \mathbb{Q})^-$.

Dans la suite de cette section on se propose de montrer que la proposition 2.1 entraîne:

THÉORÈME 2.20. *Soit comme plus haut* X *une quintique définie par un polynôme* F *invariant sous l'involution* $i : (X_0, X_1, \dots, X_4) \longrightarrow (-X_0, -X_1, X_2, X_3, X_4)$*. Alors* i *agit trivialement sur* $CH_0(X)$*, ou encore:* $CH_0(X)^- = 0$.

2.21. Notons d'abord les faits suivants: $(JX)^-$ est naturellement polarisée par la restriction à $H^3(X)^-$ de la forme d'intersection sur $H^3(X)$; on notera θ_X^- cette polarisation, qui fournit une isogénie $\theta_X^- : (JX)^- \longrightarrow (JX)^{-\vee}$. De la proposition 2.1, on déduit: Il existe une courbe C, paramétrant des 1-cycles antiinvariants dans X, telle que l'application d'Abel-Jacobi $\Phi : JC \longrightarrow JX^-$ induite satisfasse. Le composé $\theta_X^- \circ \Phi \circ {}^t\Phi : (JX)^{-\vee} \xrightarrow{{}^t\Phi} (JC)^\vee \simeq JC \xrightarrow{\Phi} (JX)^- \xrightarrow{\theta_X^-} (JX)^{-\vee}$, est égal à αId, pour un entier $\alpha \neq 0$, de même que le composé dual:

$$\Phi \circ {}^t\Phi \circ \theta_X^- : JX^- \xrightarrow{\theta_X^-} (JX)^{-\vee} \xrightarrow{{}^t\Phi} (JC)^\vee \simeq JC \xrightarrow{\Phi} (JX)^-.$$

De même, si on a une famille $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$ de telles quintiques, de membre générique lisse on peut trouver une famille $\mathcal{C} \xrightarrow[\rho]{} S$, paramétrant des 1-cycles relatifs, soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "\rho"'] & S \end{tikzcd}$$

avec dim (fibre de p) = 1, telle que la conclusion précédente ait lieu pout chaque famille de cycles induite:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_t \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & X_t \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C}_t \arrow[r, "\rho"'] & t \in S \end{tikzcd}$$

Pour commencer la démonstration de 2.20, notons maintenant le lemme suivant:

LEMME 2.22. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une quintique lisse définie par un polynôme homogène F invariant par l'involution $i : (X_0, \ldots, X_4) \mapsto (-X_0, -X_1, X_2, X_3, X_4)$, et soit $x \in X$ tel que $i(x) \neq x$; alors il existe une quintique $Y \subset \mathbb{P}^5$, lisse et invariante par l'involution $i : (X_0, \ldots, X_5) \mapsto (-X_0, -X_1, X_2, \ldots, X_5)$ telle que $Y \cap \mathbb{P}^4 = X$, et Y contient une droite ℓ telle que $\ell \cap X = x$.*

2.23. Fixons maintenant une famille $\mathcal{C} \xrightarrow[\rho]{} S$ et un cycle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "\rho"'] & S, \end{tikzcd}$$

comme en 2.21, pour $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$ la famille universelle de quintiques invariantes paramétrée par $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))^+)$. Par projection, on construit alors une famille $\mathcal{C}_Y \xrightarrow[\rho]{} S_Y$ et un cycle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C}_Y \arrow[r, "\rho"'] & S_Y, \end{tikzcd}$$

pour $\mathcal{X}_Y \xrightarrow[\pi]{} S_Y$ la famille des quintiques invariantes paramétrée par $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_Y)(1))^+)$ pour Y une quintique de dimension 4 invariante sous i, comme en 2.22.

2.24. D'après le lemme 2.22, il suffit pour obtenir le théorème 2.20, de montrer:

PROPOSITION 2.25. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^5$ une quintique de dimension quatre générique invariante par l'involution i de $2 \cdot 22$, et ℓ une droite générique de Y; alors $(\ell - i\ell) \cap X$ est rationnellement équivalent à 0 dans $X := \mathbb{P}^4 \cap Y$.*

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration de cette proposition. Notons les faits suivants:

i) Il existe une section hyperplane invariante lisse X' de Y contenant ℓ, et telle que $X' \cap X$ soit lisse. On notera $\mathbb{P}^{4\prime} \subset \mathbb{P}^5$ l'hyperplan correspondant à X'.

ii) Il existe une quintique $Y' \subset \mathbb{P}^5$ invariante lisse telle que $Y' \cap \mathbb{P}^{4\prime} = X'$, et Y' contient une plan P, avec $P \cap X' = \ell$.

iii) Pour une section hyperplane invariante générique Σ de X' on a $(\mathrm{Pic}\ \Sigma)^- = 0$ (et Σ est lisse).

On construit maintenant des familles $\mathcal{C}_Y$, $\mathcal{C}_{Y'}$ et des cycles $\mathcal{Z}_Y$, $\mathcal{Z}_{Y'}$ comme en 2.23, dont la restriction à X' coïncident. On notera cette restriction $\mathcal{C}'$, $\mathcal{Z}'$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}' & \xrightarrow{q} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathcal{C}' & & \end{array} .$$

On a alors:

LEMME 2.26. *Soit* $c = p_* q^*(\ell - i\ell) \in \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}')$. *Alors* $q_* p^*(c) = \alpha(\ell - i\ell)$ *dans* $CH_1(X)$ *(où l'entier* α *est le même qu'en* 2.21*).*

DÉMONSTRATION. Choisissons $X'' \subset Y'$ une section hyperplane invariante telle que $X'' \cap X' =: \Sigma$ satisfasse la condition iii) précédente. Soit $\mathbb{P}^1$ le pinceau engendré par X' et X''; pour tout $t \in \mathbb{P}^1$, $P \cap Y'_t =: \ell_t$, et l'on peut définir, pour t générique $c_t = p_* q^*(\ell_t - i\ell_t) \in \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}_{Y'(t)})$.

Considérons le deux-cycle T de Y' balayé par les cycles $q_* p^*(c_t)$, pour $t \in \mathbb{P}^1$. La théorie des fonctions normales [7] et la propriété 2.21 (qui entraîne que $\alpha(P - iP)$ et T ont même fonction normale associée), entraîne que T et $\alpha(P - iP)$ sont homologues, modulo des classes de cycles supportées sur des fibres Y_t (nécessairement singulières). Or une conséquence du théorème principal de [4] est la suivante:

2.27. Fait: L'équivalence rationnelle et l'équivalence homologique coïncident sur le groupe des deux-cycles de Y'.

On en déduit que $T \cdot X'$ et $\alpha(P - iP) \cdot X'$ coïncident dans $CH_1(X')$, modulo des cycles provenant de $(\mathrm{Pic}\ \Sigma)^-$. Comme ce dernier groupe est nul, et que par construction $T \cdot X' = q_* p^* c$ modulo des cycles supportés sur Σ et que $(P - iP) \cdot X' = \ell - i\ell$, le lemme 2.26 est démontré.

2.28. Considérons maintenant sur Y le pinceau engendré par X et par X'; après éclatement de la surface lisse $S := X \cap X'$ (hypothèse i)) on obtient $\tilde{Y} \xrightarrow[\pi]{} \mathbb{P}^1$. Notons $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow[\rho]{} \mathbb{P}^1$ la restriction de $\mathcal{C}_Y$ à $\mathbb{P}^1$, et soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1} & \xrightarrow{q} & \tilde{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{C}_{\mathbb{P}^1} & \xrightarrow[\rho]{} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

le cycle restreint. On peut supposer que $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}$ est une surface lisse. Utilisant la décomposition $CH_1(\tilde{Y}) = CH_1(Y) \oplus CH_0(S)$, l'application $Z : CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow CH_1^0(\tilde{Y})$ induite par le cycle $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}$ se décompose en $Z_1 + Z_2$, avec $Z_1 : CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow CH_1^0(Y)$ telle que pour $t \in \mathbb{P}^1$ générique et c, c' des éléments de $\rho^{-1}(t)$, on ait $Z_1(c - c') = j_{t*}(q_* p^*(c - c'))$, où j_t est l'inclusion $Y_t \hookrightarrow Y$, et $Z_2 : CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow CH_0^0(S)$ telle qu'avec les mêmes notations, $Z_2(c-c') = k_t^*(q_*p^*(c-c'))$, où k_t est l'inclusion $S \hookrightarrow Y_t$.

Il est clair par la description de Z_1 et Z_2 que notant k l'inclusion $S \hookrightarrow X$, et j l'inclusion $X \hookrightarrow Y$, on a l'égalité: $j^* \circ Z_1 = k_* \circ Z_2 : CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow CH_0^0(X)$.

2.29. Introduisons la correspondance duale ${}^tZ = p_*q^* : CH_1^0(\tilde{Y}) \longrightarrow CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1})$. Alors d'après le lemme 2.26 on a pour le cycle $\tilde{\ell} - i\tilde{\ell} \in CH_1(\tilde{Y})$, transformé propre du cycle $\ell - i\ell$, $Z \circ {}^tZ(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell}) = \alpha(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell})$. On en déduit que

$$Z_1 \circ {}^tZ(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell}) = \alpha(\ell - i\ell) \in CH_1^0(Y).$$

D'autre part on a ${}^tZ = {}^tZ_1 + {}^tZ_2$ avec:

$${}^tZ_1 : CH_1^0(Y) \longrightarrow CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}) \text{ et } {}^tZ_2 : CH_0^0(S) \longrightarrow CH_0^0(\mathcal{C}_{\mathbb{P}^1}).$$

On a alors:

LEMME 2.30. *Les composés $Z_1 \circ {}^tZ_2$ et $Z_2 \circ {}^tZ_1$ sont de torsion.*

Admettant momentanément le lemme, on voit qu'il existe $\beta \neq 0$, tel que

$$\beta\alpha(\ell - i\ell) = \beta(Z_1 \circ {}^tZ(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell})) = \beta(Z_1 \circ {}^tZ_1(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell})),$$

et qu'il existe $\beta' \neq 0$, tel que $\beta' Z_2 \circ {}^tZ_1(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell}) = 0$; utilisant l'égalité 2.28, on en déduit:

$$\beta'\beta \circ j^*(\alpha(\ell - i\ell)) = \beta'\beta j^* \circ Z_1({}^tZ_1(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell})) = \beta'\beta \cdot k_* \circ Z_2({}^tZ_1(\tilde{\ell} - i\tilde{\ell})) = 0.$$

Donc $j^*(\ell - i\ell)$ est un point de torsion dans $CH_0^0(X)$, et comme $CH_0^0(X)$ est sans torsion par [15] et $Alb\,X = 0$, on a $j^*(\ell - i\ell) = 0$, ce qui est le contenu de la proposition 2.25.

DÉMONSTRATION 2.31 (du lemme 2.30). En appliquant le théorème de [4], on voit qu'il existe une surface Σ et un cycle $Z \subset \Sigma \times Y$ de dimension 3 induisant une application $Z_3 : CH_0^0(\Sigma) \longrightarrow CH_1^0(Y)$ telle que $Z_3 \circ {}^tZ_3$ est un multiple non nul de l'identité. Il suffit donc de montrer que $Z_2 \circ {}^tZ_1$ est de torsion, car cela entraîne alors que $Z_2 \circ {}^tZ_1 \circ Z_3$ est de torsion, donc que ${}^tZ_3 \circ Z_1 \circ {}^tZ_2$ est de torsion par un lemme facile sur les correspondances entre surfaces, et par le fait que $Alb\,S = 0$. Mais alors $Z_3 \circ {}^tZ_3 \circ Z_1 \circ {}^tZ_2$ est de torsion, et donc un multiple non nul de $Z_1 \circ {}^tZ_2$ est nul; or le fait que $Z_2 \circ {}^tZ_1$ soit de torsion résulte de ce que si $W \subset \mathbb{P}^6$ est une quintique définie par un polynôme invariant sous l'involution $i : (X_0, \ldots, X_6) \longrightarrow (-X_0, -X_1, X_2, \ldots, X_6)$, telle que $W \cap \mathbb{P}^5 = Y$, la correspondance $Z_2 \circ {}^tZ_1 : CH_1^0(Y) \longrightarrow CH_0^0(S)$ s'étend en un correspondance: $\tilde{Z}_2 \circ {}^t\tilde{Z}_1 : CH_1^0(W) \longrightarrow CH_0^0(S)$ (il suffit pour cela de considérer la famille étendue $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^2}$ et le cycle étendu

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^2} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{W} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C}_{\mathbb{P}^2} \arrow[r, "\rho"'] & \mathbb{P}^2, \end{tikzcd}$$

construite à partir de $\mathcal{C}_W$, où $\tilde{W}$ est l'éclatement de W le long de S, et $\mathbb{P}^2$ est le dual de l'espace des sections hyperplanes de $\tilde{W}$ contenant S). Or on voit facilement que $CH_1^0(Y)$ est engendré par des cycles Z pour lesquels il existe une telle variété $W \underset{\ell}{\hookleftarrow} Y$, telle que $5\ell_* Z = 0$ dans $CH_1^0(W)$ (cette identité a lieu dès que le cycle Z est restriction d'un 2-cycle de W).

La démonstration de la proposition 2.25, et donc du théorème 2.20 est donc achevée.

REMARQUE 2.32. Il est clair que la démonstration du théorème 2.20 à partir de la proposition 2.1 s'étend aux autres intersections complètes X, avec fibré canonique trivial, sur lesquelles une involution agit, l'action induite étant triviale sur $H^0(K_X)$. Par ailleurs, des calculs de dimensions suggèrent que la démonstration de la proposition 2.1, donnée dans le cas particulier des quintiques avec involution, s'étend à beaucoup de situations, le problème résidant simplement dans la difficulté technique (purement algébrique) que l'on rencontre lorsque l'on veut établir l'analogue des lemmes 2.10 et 2.16. Dans de nombreux cas en effet, on peut trouver une famille, soit de sections par hypersurfaces invariantes par le groupe considéré, soit de variétés de dimension 4 contenant la variété donnée et sur lesquelles le groupe agit, de dimension strictement supérieure à la codimension attendue du lieu de Noether-Lefschetz, de sorte que l'on peut prédire l'existence de familles de dimension positive de cycles "intéressants" dans la variété en question, nécessaires pour paramétrer la sous-structure de Hodge de type $(2,1)+(1,2)$ produite par l'action du groupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEAUVILLE, *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **10**, (1977), 304-392.

[2] S. BLOCH, *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series IV, 1980.

[3] S. BLOCH - A. KAS - D. LIEBERMAN, *Zero-cycles on surfaces with* $p_9 = 0$, Compo. Math. **33**, (1976), 135-145.

[4] S. BLOCH - V. SRINIVAS, *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Amer. J. Math. **105**, (1983), 1235-1253.

[5] J. CARLSON - P. GRIFFITHS, *Infinitesimal variations of Hodge structures and the global Torelli problem*, dans "Géométrie Algébrique", Angers, édité par A. Beauville, 1980.

[6] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. I.H.E.S. **40**, (1971), 107-126.

[7] P. GRIFFITHS, *On the periods of certain rational integrals I, II*, Ann. of Math. **90**, (1969), 460-541.

[8] H. INOSE - M. MIZUKAMI, *Rational equivalence of zero-cycles on some surfaces with* $p_g = 0$, Math Ann. **244**, (1979), 205-217.

[9] S.O. KIM, *Noether-Lefschetz locus for surfaces*, Trans. Amer., Math. Soc. 324, n° 1, 1991.

[10] D. MUMFORD, *Rational equivalence of 0-cycles on surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **9**, (1968), 195-204.

[11] C.A.M. PETERS, *On two types of surfaces of general type with vanishing geometric genus*, Invent. Math. **32**, (1976), 33-47.

[12] H. SAITO, *On Bloch's metaconjecture*, preprint.

[13] A.A. ROITMAN, *Rational equivalence of zero-cycles*, Math. USSR Sbornik **18**, (1972), 571-588.

[14] S. ZUCKER, *Hodge theory with degenerating coefficients* l^2*-cohomology in the Poincaré metric*, Ann. of Math. **109**, (1979), 415-476.

[15] A.A. ROITMAN, *The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence*, Ann. of Math. **111**, (1980), 553-569.

[16] S. BLOCH, *Semi-Regularity and de Rham Cohomology*, Inventiones Math. **17**, (1972), 51-66.

[17] A. CONTE - J. MURRE, *The Hodge conjecture for fourfolds admitting a covering by rational curves*, Math. Ann. **238**, (1978).