Comment. Math. Helvetici 64 (1989) 515–526
0010–2571/89/040515–12$01.50 + 0.20/0

Composantes de petite codimension du lieu de Noether–Lefschetz

Claire Voisin

0. Introduction – Rappels

0.1 Soit $U \subset H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$ l'ouvert paramètrant les surfaces lisses, et soit $\mathcal{S}_d \subset Y$ le lieu de Noether–Lefschetz: $\mathcal{S}_d = \{F \in U/\text{la surface } S \text{ d'équation } F \text{ satisfait } \operatorname{Pic} S \neq \mathbb{Z}\}$. $\mathcal{S}_d$ est une union dénombrable d'ensembles algébriques; le théorème de Noether affirme que $\mathcal{S}_d \neq U$ pour $d \geq 4$.

Dans [3] et [7] il est prouvé que pour $d \geq 5$ toute composante de $\mathcal{S}_d$ est de codimension au moins $d-3$, l'égalité étant réalisée seulement par la famille des surfaces contenant une droite. On prouve ici:

0.2. THEOREME. *Les composantes de $\mathcal{S}_d$ sont de codimension strictement supérieure à $2d-7$, à l'exception de la famille des surfaces contenant une droite (codimension $d-3$), et de la famille des surfaces contenant une conique (codimension $2d-7$).*

0.3. Rappelons la description locale des composantes de $\mathcal{S}_d$ (cf. [7], [9]): Pour chaque composante M de $\mathcal{S}_d$ il existe localement une classe λ primitive entière de type $(1, 1)$ telle que M soit définie schématiquement par la condition "*λ reste de type* $(1, 1)$". On notera $M = \mathcal{S}_{d,\lambda}$. Si $0 \in \mathcal{S}_{d,\lambda}$, soit V un voisinage de 0 dans U; soit λ la section plate du faisceau naturel $H^2_{\mathbb{Z}}$ sur V, prolongeant la classe $\lambda_0 \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$. Soit $F^2\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{H}^2$ le sous-fibré holomorphe de $\mathcal{H}^2 = H^2_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_V$, de fibre $H^0(\Omega^2_{S_t}) \subset H^2(S_t, \mathbb{C})$ en $t \in V$. Alors λ_t est de type $(1, 1)$ équivaut à: λ_t est orthogonale à $F^2\mathcal{H}^2_{(t)}$. On en déduit que $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ est définie localement par $r = h^{2,0}$ équations. Les travaux récents rendent plausible la conjecture suivante, proposée par J. Harris.

0.4. CONJECTURE. *Pour chaque d il existe un nombre fini de composantes de $\mathcal{S}_d$ qui ne sont pas de la codimension (naturelle) r.*

Notons que le théorème 0.2 prouve la conjecture 0.4 en degré $d = 5$.

0.5. La différentiation des équations 0.3 fournit immédiatement la description suivante de l'espace tangent de Zariski $T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)}$ en 0: Soit $H_\lambda \subset H^1(\Omega_{S_0})^{prim}$, l'hyperplan orthogonal à $\lambda \in H^1(\Omega_{S_0})^{prim}$, où *prim* dénote la cohomologie primitive de S_0. On a (tenant compte du fait que pour $d \geq 5$ toute déformation de S_0 est projective):

$$T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)} = \{R \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))/\rho(R) \cdot \omega \in H_\lambda, \forall \omega \in H^0(\Omega^2_{S_0})\},$$

où ρ est l'application de Kodaïra–Spencer:

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)) \to H^0(\mathcal{O}_{S_0}(d)) \to H^1(T_{S_0}),$$

et "$\cdot$" dénote le cup-produit:

0.6. Soit F_0 le polynôme définissant la surface S_0: notons J^k la composante de degré k de l'idéal jacobien de F_0, $S^k = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k))$ et $R^k = S^k/J^k$. On a des isomorphismes naturels: (cf. [10]):

$$-H^0(\Omega^2_{S_0}) \simeq S^{d-4} \simeq R^{d-4}$$
$$-H^1(T_{S_0}) \simeq R^d$$
$$-H^1(\Omega_{S_0})^{prim} \simeq R^{2d-4},$$

tels que le cup-produit précédent s'identifie à la multiplication dans $R^\cdot$, et un isomorphisme $R^{4d-8} \simeq \mathbb{C}$, tel que la forme d'intersection sur $H^1(\Omega_{S_0})$ s'identifie au produit:

$$R^{2d-4} \otimes R^{2d-4} \to R^{4d-8}.$$

Notant $\tilde{H}_\lambda \subset S^{2d-4}$ l'image réciproque de l'hyperplan $H_\lambda \subset R^{2d-4}$, 0.5 se réécrit de la façon suivante:

$$T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)} = \{P \in S^d/P \cdot S^{d-4} \subset \tilde{H}_\lambda\} \underset{\text{déf}}{=} [\tilde{H}_\lambda : S^{d-4}].$$

Dans la suite, l'hyperplan $\tilde{H}_\lambda$ étant donné, on notera pour tout $k \leq 2d-4$

$$E_k = [\tilde{H}_\lambda : S^{2d-4-k}] \subset S^k.$$

0.7. La proposition principale de [3] et [7] s'énonce comme suit:

0.8. PROPOSITION. *Soient donnés des hyperplans* $H_\lambda \subset R^{2d-4}$, $\tilde{H}_\lambda \subset S^{2d-4}$ *comme plus haut*; *si* codim $E_d \leq d-3$, *il existe une unique droite* $\Delta \subset \mathbb{P}^3$ *telle que*

$E_{d-4} = I_\Delta(d-4) \underset{\text{def}}{=}$ *la composante de degré $d-4$ de l'idéal de Δ. De plus Δ satisfait la condition suivante*:

0.9. $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F_0)_{|\Delta}) = 2$.

0.10. Inversement, une droite Δ satisfaisant la condition 0.9 détermine uniquement un hyperplan H_λ de R^{2d-4}, (donc une classe $\lambda_\Delta \in H^1(\Omega_{S_0})^{prim}$, définie à un coefficient près), par la relation: $\tilde{H}_\lambda = I_\Delta(2d-4) + J^{2d-4}$. Les espaces E_k de 0.6 satisfont alors:

$$E_{d-4} = I_\Delta(d-4) \quad \text{et} \quad E_d = I_\Delta(d) + J^d.$$

0.11. Le texte est organisé de la façon suivante:

En paragraphe 1, on fixe une composante $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ de codimension $\leq 2d-7$, un point générique $0 \in \mathcal{S}_{d,\lambda}$; on a: $\operatorname{codim} T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)} \leq \operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} \leq 2d-7$, d'où un hyperplan $\tilde{H}_\lambda$ comme plus haut, satisfaisant d'après 0.5 la condition: $\operatorname{codim} E_d \leq 2d-7$. On montre alors la proposition suivante:

PROPOSITION 1.1. *On a les deux possibilités suivantes*:

(a) $\operatorname{codim} E_d = 2d-7$, *et E_d contient $I_P(d)$, la composante de degré d de l'idéal d'un plan P de $\mathbb{P}^3$. Le plan P est alors uniquement déterminé par la donnée de H_λ, ou de E_d.*

(b) $\operatorname{codim} E_d = d-3$, *et l'on est dans la situation décrite en* 0.8, 9, 10.

D'après le théorème principal de [3], [7] le cas b) correspond d'une part à la composante de $\mathcal{S}_d$ constituée des polynômes s'annulant sur une droite (cas $\operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} = d-3$), d'autre part à d'éventuelles composantes non réduites de $\mathcal{S}_d$ (cas $\operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} > d-3$, $\operatorname{codim} T\mathcal{S}_{d,\lambda} = d-3$ en tout point de $\mathcal{S}_{d,\lambda}$). La section 2 montre la non existence de ces composantes.

La section 3 étudie le cas a), qui correspond à des composantes réduites de $\mathcal{S}_d$, puisque l'on a génériquement $2d-7 = \operatorname{codim} T\mathcal{S}_{d,\lambda} \leq \operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} \leq 2d-7$. On montre essentiellement la proposition suivante:

PROPOSITION 3.0. *Soit $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ une composante de codimension égale à $2d-7$ satisfaisant* a). *Soit F un point générique de $\mathcal{S}_{d,\lambda}$. Soit P le plan fourni par l'énoncé* a). *Soit C la courbe plane d'équation $F_{|P}$. Alors tout polynôme $G \in U$ s'annulant sur C est dans $\mathcal{S}_{d,\lambda}$.*

On conclut alors par un argument semblable à celui de [2], que C est réductible, puis par un compte de dimensions, que C a une composante de degré 2.

1. Preuve de la proposition 1.1

1.2. L'énoncé est évident pour $d=5$, du fait de l'accouplement parfait: $S^1/E_1 \otimes S^5/E_5 \to S^6/\tilde{H}_\lambda$; on a alors $d-3=2$, et $2d-7=3$. On ne peut pas avoir $\operatorname{codim} E_1=1$, par la proposition 0.8; on a donc les seules possibilités:

a) $\operatorname{codim} E_1 = 3 = 2d-7 = \operatorname{codim} E_5$, et $E_1 = I_p(1)$ pour un plan P de $\mathbb{P}^3$.

b) $\operatorname{codim} E_1 = 2 = d-3$, et l'on est dans la situation de la proposition 0.8.

On supposera donc dans la suite $d \geq 6$.

1.3. LEMME. *E_{d-4} possède une base locus de dimension positive.*

La démonstration occupera les paragraphes 1.3.1–1.3.10. On aura recours aux théorèmes suivants (cf. [1], [3], [5]):

1.3.1. Fixons un entier d; pour tout entier c écrivons uniquement:

$$c = \binom{k_d}{d} + \binom{k_{d-1}}{d-1} + \cdots + \binom{k_\delta}{\delta}, \quad \text{avec} \quad k_i \geq i \quad \text{et} \quad k_i > k_{i-1}, \quad \text{l'entier} \quad \delta$$

étant uniquement déterminé par c. Notons alors:

$$c_{\langle d\rangle} = \binom{k_d - 1}{d} + \binom{k_{d-1} - 1}{d-1} + \cdots + \binom{k_\delta - 1}{\delta},$$

et

$$c^{\langle d\rangle} = \binom{k_d + 1}{d+1} + \binom{k_{d-1} + 1}{d} + \cdots + \binom{k_\delta + 1}{\delta + 1}.$$

Soit $W \subset H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d))$ un système linéaire de codimension c. Notons c_H la codimension de $W_{|H}$, pour H hyperplan générique de $\mathbb{P}^r$ et c_i la codimension de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(i)).W$ dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d+i))$. On a:

1.3.2. THEOREME (Green). $c_H \leq c_{\langle d\rangle}$.

1.3.3. THEOREME (Macaulay–Gotzmann). $c_1 \leq c^{\langle d\rangle}$, *et si l'égalité est réalisée, on a pour tout i, $c_i = (\cdots((c^{\langle d\rangle})^{\langle d+1\rangle})\cdots)^{\langle d+i-1\rangle}$.*

1.3.4. Considérons l'espace $E_{d-4} \subset H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d-4))$. Par la dualité: $S^k/E_k \simeq (S^{2d-4-k}/E_{2d-4-k})^*$, on a: $c = \operatorname{codim} E_{d-4} = \operatorname{codim} E_d \leq 2d-7$. Le théorème 1.3.2 entraîne immédiatement: $c_H \leq 2$.

Appliquons alors le Théorème 1.3.3 à la restriction $E_{d-4|H}$ pour H un plan générique dans $\mathbb{P}^3$: on obtient:

1.3.5. $c_1^H \leq 2$, avec égalité si et seulement si $c_i^H = 2, \forall i \in \mathbb{N}$, où $c_i^H =$ codim $H^0(\mathcal{O}_H(i)) \cdot E_{d-4|H}$.

1.3.6. Supposons par l'absurde que E_{d-4} a seulement des points base isolés. Alors $E_{d-4|H}$ n'a pas de point base pour H générique: on en déduit que pour k assez grand: $H^0(\mathcal{O}_H(k)) \cdot E_{d-4|H} = H^0(\mathcal{O}_H(k+d-4))$, ce qui entraîne que l'égalité est impossible dans 1.3.5.

On a donc: $1 \geq \operatorname{codim} E_{d-3|H}$ et, par le même raisonnement, $\operatorname{codim} E_{d-2|H} = 0$ pour H générique.

1.3.7. Pour chaque $Q \in S^1$, notons $\mu_Q^k : S^k/E_k \to S^{k+1}/E_{k+1}$ la multiplication par Q. Remarquons que μ_Q^k est duale de μ_Q^{2d-5-k}. La conclusion de 1.3.6 s'écrit encore: pour Q générique dans S^1, et $k \geq d-3$, μ_Q^k est surjective. Par dualité, on en déduit:

$$\mu_Q^{d-3} \text{ est un isomorphisme.} \tag{*}$$

On a d'autre part, d'après 1.3.6, $\operatorname{codim} E_{d-3|H} \leq 1$, pour H générique, soit: corang $\mu_Q^{d-4} \leq 1$, pour $Q \in S^1$ générique, et donc: $\dim S^{d-3}/E_{d-3} \leq 2d-6$.

1.3.8. Fixons $Q_0 \in S^1$, satisfaisant (*), et pour $Q \in S^1$, notons:

$$\nu_Q = (\mu_{Q_0}^{d-3})^{-1} \circ \mu_Q^{d-3} : S^{d-3}/E_{d-3} \to S^{d-3}/E_{d-3}.$$

On vérifie aisément que les ν_Q forment un ensemble linéaire commutatif d'endomorphismes contenant Id. L'hypersurface $\mathcal{D}$ de S^1, de degré $\leq 2d-6$, définie par l'annulation du déterminant est donc une union de plans P_i comptés avec multiplicité α_i.

1.3.9. Fixons i et soit $Q \in P_i$, définissant l'hyperplan H_Q de $\mathbb{P}^3$. Notons c_Q^k la codimension de $E_{k|H_Q}$; alors $c_Q^{d-2} = \text{corang } \mu_Q^{d-3} = \dim \operatorname{Ker} \mu_Q^{d-3} \underset{\text{dualité}}{=} \text{corang } \mu_Q^{d-2} = c_Q^{d-1}$, et ces nombres sont >0 par définition de P_i. Supposons $c_Q^{d-2} \leq d-3$: alors $c_Q^{d-2\langle d-2\rangle} = c_Q^{d-2} = (c_Q^{d-2\langle d-2\rangle})^{\langle d-1\rangle} = \cdots$ Le théorème 1.3.3 s'applique alors et entraîne:

$$E_{d-1|H_Q} = H^0(\mathcal{O}_{H_Q}(1)) \cdot E_{d-2|H_Q}, \quad \text{et codim } (H^0(\mathcal{O}_{H_Q}(k)) \cdot E_{d-2|H_Q}) > 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela entraîne que $E_{d-1|H_Q}$ doit avoir des points base, ce qui est absurde car $J^{d-1}(F_0) \subset E_{d-1}$.

1.3.10. L'hypothèse faite en 1.3.9 est donc absurde, et l'on doit avoir $c_Q^{d-3} > d-3$. Cela entraîne que la multiplicité α_i est strictement supérieure à

$d-3$. Comme le degré de $\mathscr{D}$ est au plus $2d-6$, on en déduit que $\mathscr{D}$ est en fait un plan multiple P_1.

D'autre part, pour $Q \in P_1$, on a: $\dim \operatorname{Ker} \mu_Q^{d-3} > d-3$; on en déduit que le polynôme minimal de v_Q, pour $Q \in P_1$, est de la forme X^k, avec $k \leq d-3$. Or ceci nous mène encore à une contradiction: en effet, soit $x_0 \in \mathbb{P}^3$ le point correspondant au plan $P_1 \subset S^1$; on vérifie facilement que $v_Q^k = 0$, pour $Q \in P_1$ entraîne: $I_{x_0}^k \cdot S^{d-3} \subset E_{d-3+k}$, et comme $k \leq d-3$, $I_{x_0}^{d-3} \cdot S^{d-1} \subset \tilde{H}_\lambda$. Mais $\tilde{H}_\lambda$ contient également $S^{d-3} \cdot J^{d-1}$, et J^{d-1} est sans point base. Comme dans [7], on voit facilement que $I_{x_0}^{d-3} \cdot S^{d-1} + S^{d-3} \cdot J^{d-1} = S^{2d-4}$, ce qui est absurde.

L'hypothèse 1.3.6 mène donc à une contradiction, et le lemme 1.3 est donc démontré.

1.4. LEMME. *On a seulement les deux possibilités suivantes*:
i) $E_{d-4} \subset I_C(d-4)$, *où* C *est une conique de* $\mathbb{P}^3$;
ii) *Il existe une droite* $\Delta \subset \mathbb{P}^3$, *unique, telle que* $E_{d-4} \subset I_\Delta(d-4)$.

DEMONSTRATION. Comme $d \geq 6$, il est facile de voir que E_{d-4}, étant de codimension $\leq 2d-7$, ne peut pas s'annuler sur une surface de $\mathbb{P}^3$. Donc son base locus contient une courbe; comme $\operatorname{codim} E_{d-4} \leq 2d-7$ le lemme de [8], p. 115 montre que cette courbe doit être plane, et il est facile de voir que cette courbe ne peut être qu'une droite ou une conique (ici *courbe* signifie *courbe réduite*).

1.5. Notons que dans le cas i) on a nécessairement l'égalité par $\operatorname{codim} E_{d-4} \leq 2d-7$, et que E_{d-4} contient $I_P(d-4)$ pour une plan P uniquement déterminé. La proposition 1.1 est donc prouvée dans ce cas. Il reste donc à étudier le cas ii).

1.6. On procéde exactement comme dans [7]; esquissons seulement les étapes de la démonstration: on a $E_{d-4} \subset I_\Delta(d-4)$, avec $\operatorname{codim} E_{d-4} \leq 2d-7$, et $\operatorname{codim} I_\Delta(d-4) = d-3$; notant β_k la codimension de E_k dans $I_\Delta(k)$, pour $k \leq d-4$, (l'inclusion $E_{d-4} \subset I_\Delta(d-4)$ entraîne $E_k \subset I_\Delta(k)$, pour $k \leq d-4$), on a: $\beta_{d-4} \leq d-4$. Si $S^d \cdot E_{d-4} = I_\Delta(2d-4)$, alors on a $I_\Delta(2d-4) \subset \tilde{H}_\lambda$, d'où en fait $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$, puisque $E_{d-4} = [\tilde{H}_\lambda : S^d]$; sinon, on montre que l'on doit avoir: $\beta_{k-1} < \beta_k$, $k \leq d-4$. Il vient donc: $\beta_1 \leq 1$, et si $\beta_1 = 0$, on a $E_1 = I_\Delta(1)$, d'où comme précédemment $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$. De plus, si $\beta_1 = 1$, on doit en fait avoir $d-4 = \beta_{d-4}$, soit $\operatorname{codim} E_{d-4} = 2d-7$. Le cas $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$ correspond au cas b) de la proposition 1.1, le cas $\beta_1 = 1$ correspond au cas a) de la proposition 1.1, puisque l'on a alors: $\dim E_1 = 1$ et il existe un unique plan $P \subset \mathbb{P}^3$ tel que $I_P(d) \subset E_d$, et de plus: $\operatorname{codim} E_{d-4} = 2d-7 = \operatorname{codim} E_d$. La proposition 1.1 est donc prouvée.

1.7. REMARQUE. J'ignore si l'on peut prouver que dans le cas a), E_{d-4} est en fait l'idéal d'une conique. Comme c'est évidemment faux pour $d = 5$, et que l'argument donné en paragraphes 3, 4 paraît plus intéressant du point de vue de la conjecture 0.4, je n'ai pas poursuivi mes investigations dans ce sens.

2. Non-existence de composantes non réduites de codimension $\leq 2d-7$

2.1. On montre dans cette section que le cas b) de la proposition 1.1 ne se produit que pour la composante de $\mathcal{S}_d$ constituée des surfaces contenant une droite. On raisonnera par l'absurde; pour alléger les notations, on appellera M une composante $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ de $\mathcal{S}_d$, de codimension $\leq 2d-7$, satisfaisant la proposition 1.1 b), différente de la famille des surfaces contenant une droite. On notera $M_{\text{red}} \subset M$ la variété réduite sous-jacente à M. Soit 0 un point générique de M_{red}. D'apres 0.8–0.10, on a: Il existe une droite $\Delta_0 \subset \mathbb{P}^3$, uniquement déterminée, telle que:

i) rang $(J^{d-1}(F_0)_{|\Delta_0}) = 2$, où F_0 est le polynôme correspondant au point 0.

ii) L'hyperplan H_λ défini en 0.5–0.6 est égal à $I_{\Delta_0}(2d-4) + J^{2d-4}(F_0)$.

iii) $TM_{(0)} = I_{\Delta_0}(d) + J^d(F_0)$, et évidemment $TM_{\text{red}\,(0)} \subset TM_{(0)}$, avec codim $TM_{\text{red}\,(0)} \leq 2d-7$.

2.2. Fixons une droite $\Delta \subset \mathbb{P}^3$, et notons $M_{\Delta,\,\text{red}}$ la sous-variété de M_{red} (clairement de codimension $4 = \dim \text{Grass}(2,4)$ dans M_{red}), qui satisfait i), ii) et iii) avec $\Delta_0 = \Delta$.

Notons par ailleurs $G_\Delta \subset U$ la clôture de la famille des polynômes F tels que: rang $(J^{d-1}(F)_{|\Delta}) = 2$, $F_{|\Delta} \neq 0$.

Notons $G^1_\Delta \subset G_\Delta$, la clôture de la famille des polynômes $F \in U$ tels que: rang $(J^{d-1}(F)_{|\Delta}) = 2$, et: $\exists A \neq 0 \in H^0(\mathcal{O}_\Delta(1))$, avec $F_{|\Delta} = A^d$.

Notons enfin $G^2_\Delta \subset G_\Delta$ l'intersection de G_Δ avec la famille des polynômes $F \in U$, tels que $F_{|\Delta} = 0$. On a $G^2_\Delta \subset G^1_\Delta$.

L'hypothèse 2.1 donne une inclusion $M_{\Delta,\,\text{red}} \subset G_\Delta$, $M_{\Delta,\,\text{red}} \not\subset G^2_\Delta$. On a alors: (cf. [7]).

2.3. LEMME. *En tout point de $G_\Delta \backslash G^2_\Delta$, G_Δ est lisse de codimension* $2(d-2)$.

2.4. LEMME. *En tout point F de $G_\Delta \backslash G^1_\Delta$, la codimension de $TG_{\Delta(F)} \cap (I_\Delta(d) + J^d(F))$ dans $TG_{\Delta(F)}$ est au moins deux.*

La démonstration de ces lemmes est facile (on a des équations explicites pour G_Δ), et ne sera pas donnée ici.

2.5. Supposons $M_{\Delta,\,\text{red}} \not\subset G^1_\Delta$. Soit 0 un point générique de $M_{\Delta,\,\text{red}}$; comme codim $M_{\mathrm{red}} \leq 2d-7$, on a codim $M_{\Delta,\mathrm{red}} \leq 2d-3$, et d'après le lemme 2 $M_{\Delta,\mathrm{red}}$ doit s'identifier au voisinage de F_0 à une hypersurface de $G_\Delta \backslash G_\Delta^1$ ou à un ouvert de $G_\Delta \backslash G_\Delta^1$, selon que codim $M_{\Delta,\mathrm{red}} = 2d-3$ ou $2d-4$ (les autres possibilités étant exclues par l'inclusion $M_{\Delta,\mathrm{red}} \subset G_\Delta$). Or cela contredit le lemme 2.4 puisque cela entraînerait: la codimension de $TM_{\Delta,\mathrm{red}\,(0)}$ dans $TG_{\Delta,(F_0)}$ est au plus 1, avec, par 2.1 iii): $TM_{\Delta,\mathrm{red}\,(0)} \subset I_\Delta(d) + J^d(F_0)$.

2.6. L'hypothèse 2.5 est donc contradictoire, et l'on a: $M_{\Delta,\mathrm{red}} \subset G_\Delta^1$. Etudions G_Δ^1.

2.7. LEMME. $G_\Delta^1 \backslash G_\Delta^2$ *est irréductible de codimension* $2d-3$.

La preuve ne présente aucune difficulté et sera omise ici.

2.8. Du lemme 2.7, et de codim $M_{\Delta,\mathrm{red}} \leq 2d-3$, $M_{\Delta,\mathrm{red}} \subset G_\Delta^1$, on déduit:

$M_{\Delta,\mathrm{red}}$ est ouvert dans G_Δ^1.

Par ailleurs, d'après 0.10, en tout point F de G_Δ, on a une classe $\lambda_\Delta \in H^1(\Omega_S)^{prim}$ définie à un coefficient près. Il est facile de voir que le sous–ensemble E suivant de $G_\Delta^1 : E = \{F \in G_\Delta^1 / \lambda_\Delta$ est proportionnelle dans $H^1(\Omega_S)^{prim}$ à une classe entière de type $(1,1)$, (vue dans $H^1(\Omega_S)^{prim}$)$\}$ est une union dénombrable de fermés analytiques. Comme E contient un ouvert de G_Δ^1, par ce qui précède, on en déduit:

2.9. Pour toute droite $\Delta \subset \mathbb{P}^3$, et pour tout polynôme $F \in U$, tels que:

i) rang $(J^{d-1}(F)_{|\Delta}) = 2$

ii) $\exists A \neq 0 \in H^0(\mathcal{O}_\Delta(1))$, avec $F_{|\Delta} = A^d$, on a: la classe $\lambda_\Delta \in H^1(\Omega_S)^{prim}$, définie en 0.10, est proportionnelle à une classe entière primitive de type $(1,1)$.

2.10. Il est aisé de voir que 2.9 est faux; (je remercie le rapporteur pour m'avoir signalé que ma démonstration initiale etait trop compliquée):

2.11. En effet, pour toute surface lisse S, il existe dans $\mathbb{P}(H^1(\Omega_S)^{prim})$ au plus un ensemble dénombrable de classes proportionnelles à une classe entière; or, considérons la surface de Fermat, d'équation $F = X_0^d + X_1^d + X_2^d + X_3^d$; soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^d = -1$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, soit Δ_α la droite d'équations: $X_1 = \alpha X_0$, $X_3 = \zeta X_2$. On a: $F_{|\Delta_\alpha} = (1+\alpha^d)X_0^d$ et rang $J^{d-1}(F)_{|\Delta_\alpha} = 2$. Les droites Δ_α déterminent dans $\mathbb{P}(H^1(\Omega_S)^{prim})$ des classes λ_{Δ_α} distinctes, et comme α parcourt $\mathbb{C}$, il existe un α tel que λ_{Δ_α} n'est pas proportionnel à une classe entière. Le couple (Δ_α, F) ne satisfait donc pas à 2.9. Cette contradiction montre la non-existence de la composante M de 2.1.

2.12. REMARQUE. La rapporteur suggère par ailleurs l'argument suivant: on peut construire un pinceau de Lefschetz dans $\overline{G_\Delta^1}$, la clôture de G_Δ^1; on peut donc appliquer le principe d'irréductibilité de l'action de monodromie pour un tel pinceau et en déduire que $\operatorname{Pic}\Sigma = \mathbb{Z}$ pour en élément générique Σ de G_Δ^1, puisque $h^{2,0}(\Sigma) > 0$ pour $\Sigma \in G_\Delta^1$; ceci contredit évidemment 2.8.

3. Preuve de la proposition 3.0

3.1. Il reste à étudier les composantes M de $\mathcal{S}_d$ de codimension $2d-7$ et satisfaisant le cas a) de la proposition 1.1. Une telle composante est réduite et on appellera $M^0 \subset M$ l'ouvert de lissité de M.

On a par hypothèse une application $\Phi: M^0 \to \mathbb{P}(S^1)$, évidemment holomorphe, qui à un point $t \in M^0$ associe l'unique plan $P \subset \mathbb{P}^3$, tel que $\tilde{P} \cdot S^{d-1} \subset TM^0_{(t)}$, où $\tilde{P}$ est une équation de P. Par ailleurs, soit $0 \in M$, et soit V un voisinage de 0 dans U tel qu'il existe sur V une section λ de $H^2_{\mathbb{Z}}$, avec λ_0 de type $(1,1)$, et que $M^0 \cap V = \mathcal{S}_{d,\lambda}$, comme en 0.3. Alors, avec les notations du paragraphe 0, on a sur $M^0 \cap V$:

3.1.1. $\Phi(t) = A \Leftrightarrow \tilde{A} \cdot S^{2d-5} \subset \tilde{H}_\lambda$, où $\tilde{A} \in S^1$ relève A.

3.2. Soit γ_0 un deux cycle dans S_0, égal, via la dualité de Poincaré, à λ_0. Soit un voisinage tubulaire de S_0 dans $\mathbb{P}^3$, contenant S_t pour $t \in V$, qui existe à condition de supposer V assez petit. L'interprétation topologique de l'isomorphisme $R^{2d-4}_{(t)} \simeq H^1(\Omega_{S_t})^{prim}$ permet d'écrire 3.1.1 sous la forme:

3.2.1. Pour $t \in M^0 \cap V$, $\Phi(t) = A \Leftrightarrow \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (\tilde{A}P)/F_t^2 \cdot \Omega = 0$, $\forall P \in S^{2d-5}$, où Ω est la section canonique de $K_{\mathbb{P}^3}(4)$, et Tub γ_0 est le tube sur γ_0 (homologue dans $\mathbb{P}^3 \backslash S_t$ au tube sur γ_t).

3.3. On notera $M_A^0 = \Phi^{-1}(A)$, pour $A \in \mathbb{P}(S^1)$. Remarquons que Φ commute avec l'action de $PGl(3)$, de sorte que M_A^0 est lisse, de codimension $2d-4$ dans U; 3.2.1 se différencie aisément et donne la description suivante de l'espace tangent $TM^0_{A(0)}$ à M_A^0 en 0:

3.3.1. $TM^0_{A(0)} = \{S \in TM^0_{(0)} / \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (\tilde{A}SP)/F_0^3 \cdot \Omega = 0, \forall P \in S^{2d-5}\}$.

On consacrera les paragraphes 3.4.1–3.4.8 à la démonstration du lemme suivant:

3.4. LEMME. $\tilde{A} \cdot S^{d-1} \subset TM^0_{A(0)}$.

DEMONSTRATION. Par construction, $\tilde{A} \cdot S^{d-1} \subset TM^0_{(0)}$. Au vu de 3.3.1 il suffit donc de prouver:

3.4.1. $\forall Q \in S^{d-1}$, $\forall P \in S^{2d-5}$, $\int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (\tilde{A}^2 PQ)/F_0^3 \cdot \Omega = 0$.

3.4.2. Mais λ fournit un morphisme $m_\lambda : S^{d-4} \otimes \mathcal{O}_{M^0} \to (S^d)^* \otimes \mathcal{O}_{M^0}$, défini ponctuellement par: $m_{\lambda(t)}(B) = (c \mapsto \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} BC/F_t^2 \cdot \Omega)$, pour $B \in S^{d-4}$ et $C \in S^d$. Par hypothèse, m_λ est de rang $2d - 7$ au voisinage de 0.

3.4.3. En général, si l'on a un morphisme f entre deux faisceaux localement libres E et F sur une variété lisse S, on en déduit une application linéaire $df_{(0)}$: $\mathrm{Ker}\, f_0 \to (\mathrm{Coker}\, f_0) \otimes \Omega_{S(0)}$, en chaque point 0 de S, qui s'annule au point 0 si et seulement si f est de rang constant au premier ordre en 0. Dans une trivialisation locale de E et F, $df_{(0)}$ est simplement donnée par la différentielle de la matrice de f, composée avec la restriction à $\mathrm{Ker}\, f_0$ et la projection sur $\mathrm{Coker}\, f_0$.

3.4.4. Dans notre situation les faisceaux $E = S^{d-4} \otimes \mathcal{O}_{M^0}$ et $F = (S^d)^* \otimes \mathcal{O}_{M^0}$ sont triviaux; de plus, avec les notations du paragraphe 0, on a: $\mathrm{Ker}\, m_{\lambda,0} = E_{d-4}$ et $\mathrm{Coker}\, m_{\lambda,0} = E_d^*$. Enfin, $\Omega_{M(0)}$ est isomorphe à E_d^*. Il est alors facile de voir, à l'aide de la règle décrite en 3.4.3, que:

$$
(3.4.5)\quad dm_{\lambda,0}(B)(P \otimes Q) = -2\int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (B.P.Q)/F_0^3 \cdot \Omega, \quad \text{pour} \quad B \in E_{d-4},\ P, Q \in E_d.
$$

D'après 3.4.2–3.4.5 on a donc:

$$
(3.4.6)\quad \forall B \in E_{d-4}, \forall P, Q \in E_d, \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (BPQ)/F_0^3 \cdot \Omega = 0.
$$

Comparant avec 3.4.1 on voit que le lemme 3.4 est démontré si l'on a:

3.4.7. $\tilde{A}^2 \cdot S^{3d-6} \subset E_{d-4} \cdot E_d \cdot E_d$.

Mais on a: $\tilde{A} \cdot S^{d-5} \subset E_{d-4}$, et $\tilde{A} \cdot S^{d-1} \subset E_d$; il suffit donc de prouver

3.4.8. $S^{3d-6} \subset E_d \cdot S^{2d-6}$.

Or E_d est sans point base, de codimension $2d-7$. 3.4.8 résulte alors de ([6], théorème 2.16), (M. Green a maintenant supprimé la condition sur la codimension du système linéaire considéré cf. [4], §4). Le Lemme 3.4 est donc prouvé.

3.5. La preuve de la proposition 3.0 est maintenant facile. En effet, considérons l'application $\Psi_A : M_A^0 \to H^0(\mathcal{O}_A(d))$ définie par $\Psi_A(t) = F_{t|A}$. Le Lemme 3.4 donne immédiatement:

3.5.1. Corang $(\Psi_A) = \mathrm{codim}\,(TM_A^0)$ en tout point de M_A^0.

On en déduit que l'image de Ψ_A dans $H^0(\mathcal{O}_A(d))$ est de codimension égale à celle de M_A^0 dans S^d, ce qui entraîne évidemment:

3.5.2. La fibre de Ψ_A en F_0 contient un ouvert de Zariski de l'ensemble

$\{G \in U / G_{|A} = F_{0|A}$. Ce qui est le contenu de la proposition 3.0 compte tenu du fait que si $F \in M$, $\alpha F \in M$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

4. Preuve du théorème 0.2

4.1. Soit M une composante de $\mathcal{S}_d$ comme en paragraphe 3; soit 0 un point générique de M; soit $A = \Phi(0)$, et soit C la courbe plane d'équation $F_{0|A}$. D'après la proposition 3.0, toute surface lisse S de degré d contenant C satisfait $\operatorname{Pic} S \neq \mathbb{Z}$.

Une adaptation de l'argument donné par Griffiths et Harris dans [2] va alors nous donner la proposition suivante:

4.2. PROPOSITION. *Une courbe plane C réduite satisfaisant cette hypothèse est réductible.*

DEMONSTRATION. On rappelle que $\tilde{A}$ est l'équation du plan A et que C est définie par l'équation $F_{0|A}$. Soit G un polynôme de degré $d-1$ définissant une surface lisse Q, telle que $Q \cap A$ soit lisse et coupe C transversalement en $d(d-1)$ point p_i. Soit Δ un disque, et soit $X \subset \mathbb{P}^3 \times \Delta$ l'hypersurface d'équation $\tilde{A}G + tF_0 = 0$.

Les hypothèses impliquent, si Δ est suffisamment petit, que X a pour seules singularités des noeuds aux points $(p_i, 0)$. On désingularise X en éclatant ces points, puis en contractant chaque quadrique exceptionnelle suivant le réglage défini par la droite exceptionnelle de $\tilde{Q}$, le transformé strict de Q. La fibre centrale est alors constituée de la réunion $\tilde{\mathbb{P}}^2 U_D Q$ où $\tilde{\mathbb{P}}^2$ est l'éclatement du plan A aux points p_i et $D \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ est le transformé strict de la courbe $Q \cap A \subset A$. Toutes les fibres $\tilde{X}_t$, $t \neq 0$, contiennent la courbe C et satisfont donc: il existe $\lambda \neq 0 \in \operatorname{Pic}(\tilde{X}_t)^{prim} = H^2(\tilde{X}_t, \mathbb{Z})^{prim} \cap H^{1,1}(\tilde{X}_t)$. Supposons pour simplifier que la monodromie autour de 0 agisse trivialement sur la classe λ. Il existe alors un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\tilde{X}$ qui satisfait: $c_1(\mathcal{L}_{|\tilde{X}_t}) = \lambda$, pour $t \neq 0$. Suivant [2], on montre alors que si $\operatorname{Pic} \tilde{X}_0 = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$, ou u est le diviseur qui vaut $\mathcal{O}(1)$ sur chaque composante, et v est le diviseur qui vaut 0 sur Q et $\mathcal{O}(d) - \sum_i E_i$ sur $\tilde{\mathbb{P}}^2$, alors on doit avoir $\mathcal{L}_{|\tilde{X}_t} = \mathcal{O}_{X_t}(k)$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse implique donc: $\operatorname{Pic} \tilde{X}_0 \neq \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$. Or si $\operatorname{Pic} Q = \mathbb{Z}$, comme on peut le supposer puisque $\deg(Q) \geq 4$, on a: $\operatorname{Pic} \tilde{X}_0 = \mathbb{Z}u \oplus \operatorname{Ker}(\operatorname{Pic} \tilde{\mathbb{P}}^2 \to \operatorname{Pic} D)$. On doit donc avoir:

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Pic} \tilde{\mathbb{P}}^2 \to \operatorname{Pic} D) \neq \mathbb{Z}v,$$

ou encore:

$$\operatorname{Ker}\left(\bigoplus_{i=1}^{d(d-1)} \mathbb{Z}p_i \oplus \mathbb{Z}h \to \operatorname{Pic} D\right)$$

n'est pas engendré par $dh - \sum_{i=1}^{d(d-1)} p_i$, où h est la classe du diviseur $\mathcal{O}_D(1)$. La courbe D décrit un ouvert de Zariski dans la famille des courbes planes de degré $d-1$; l'existence d'une relation non triviale entre les p_i autre que la relation évidente $\sum_{i=1}^{d(d-1)} p_i = dh$ interdit que la monodromie agisse comme le groupe symétrique sur l'ensemble $\{p_i\}$. Cela entraîne que C est réductible ([8], p. 111).

Dans le cas où la monodromie agit de façon non triviale sur la classe λ, il est montré dans [2] qu'après un changement de base et une désingularisation, on obtient une variété $\tilde{X}'$ dont le groupe de Picard diffère de celui de $\tilde{X}$ essentiellement de la même façon que celui de la fibre centrale $\tilde{X}'_0$ diffère de celui de $\tilde{X}_0$; de sorte que l'argument reste le même.

4.3. Comme C est réductible, M est contenue dans l'un des ensembles suivants $T_k = \{F \in U/S$ possède une section plane réductible $C_k \cup C_{d-k}$, avec $\deg(C_k) = k \leq d-k\}$. Comptant les dimensions, on voit immédiatement que codim $T_k \leq 2d - 7 \Rightarrow k = 1$ ou 2, et donc M est la famille des surfaces contenant une droite ou la famille des surfaces contenant une conique, ce qui achève la preuve du théorème 0.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gotzmann, G., *Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbert polynom eines Graduierten Ringes.* Math. Z. *158* (1978), 61–70.

[2] Griffiths, P. and Harris, J., *On the Noether–Lefschetz theorem and some remarks on codimension two cycles.* Math. Ann. *271* (1985) 31–51.

[3] Green, M., *Components of maximal dimension in the Noether–Lefschetz locus.* A paraître dans J. Differential Geometry.

[4] Green, M., *Koszul cohomology and geometry.* Preprint.

[5] Green, M., *Macaulay representations and hyperplane restrictions.* Preprint.

[6] Green, M., *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties II.* J. Differential Geometry *20* (1984), 279–288.

[7] Voisin, C., *Une précision concernant le théorème de Noether.* Math. Ann. *280* (1988), 605–611.

[8] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. and Harris, J., *Geometry of algebraic curves.* Vol. I, Springer Verlag (1984).

[9] Griffiths, P. and Harris, J., *Infinitesimal variations of Hodge structures II: an infinitesimal invariant of Hodge classes.* Compo. Math. Vol. *50,* (1983).

[10] Carlson, J. and Griffiths, P., *Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem.* Géométrie Algébrique, Angers, Sijthoff and Nordhoff (1980), 51–76.

[11] Griffiths, P. and Harris, J., *Algebraic geometry and local differential geometry.* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. *12,* (1979), 355–342.

[12] Harris, J., *Galois groups of enumerative problems.* Duke Math. J. *46* No. 4 (1979), 685–724.

Département de Mathématiques
Centre d'Orsay,
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX

Reçu le 7 avril 1988