J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
31 (1990) 527-534

DEGENERATIONS DE LEFSCHETZ ET VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE

CLAIRE VOISIN

0. Introduction

Ce travail propose une réponse partielle au problème suivant, posé par R. Friedman dans [6].

0.1. Problème. Soit $\mathscr{X} \xrightarrow[p]{} \Delta$ une dégénération de Lefschetz de variétés de dimension paire $2m > 2$ paramétrée par le disque Δ; montrer qu'en général, pour tout changement de base $\Delta_n \underset{s \to t = s^n}{\longrightarrow} \Delta$ la variété $\mathscr{X}_n^* = \mathscr{X}^* \times_{\Delta^*} \Delta_n$ ne peut être compactifiée en une variété lisse $\tilde{\mathscr{X}}_n \xrightarrow[p_n]{} \Delta_n$ telle que p_n soit lisse au dessus de 0.

Rappelons d'abord que si $m = 1$, une construction du à Atiyah fournit une telle compactification: en fait le changement de base $t = s^2$ introduit sur $\mathscr{X}_2 = \mathscr{X} \times_\Delta \Delta_2$ une singularité quadratique ordinaire qui en dimension trois admet une "petite résolution" $\hat{\mathscr{X}}_2$; la fibre de $\hat{p}_2 \colon \hat{\mathscr{X}}_2 \to \Delta_2$ en 0 est alors la résolution minimale de $\mathscr{X}_0$.

0.2. Dans la situation de 0.1, si $\mathscr{X}$ est kählérienne, on sait que pour un changement de base de degré pair, qui élimine l'action de la monodromie sur la cohomologie de $\mathscr{X}_t$, l'application des périodes, définie sur Δ_n^*, se prolonge en 0 (cf. [8]) munissant $\mathscr{X}_0$ d'une structure de Hodge limite pure qui a priori ne se distingue pas de celle d'une variété lisse.

0.3. Par ailleurs J. Morgan montre dans [9] qu'il n'y a pas d'obstruction différentiable à l'existence de $\tilde{\mathscr{X}}_n$, pour certaines valeurs de n. Notons enfin que pour une dégénération de quadriques projectives $\mathscr{Q} \to \Delta$, $\mathscr{Q}_2 = \mathscr{Q} \times_\Delta \Delta_2$ se désingularise en $\tilde{\mathscr{Q}}_2 \to \Delta_2$, et le transformé strict $\tilde{\mathscr{Q}}_0$ de la fibre centrale se contracte, de sorte que $\mathscr{Q}_2$ est en fait biméromorphiquement équivalent à un produit $\mathscr{Q}_{2m} \times \Delta_2$.

0.4. Faisant l'hypothèse que $\mathscr{X} \to \Delta$ est une dégénération de Lefschetz d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^{2m+1}$ à fibré canonique trivial (i.e., de degré $2m+2$), on prouve ici:

Received December 7, 1988.

Théorème. *Si pour un entier n, il existe une compactification* $\tilde{\mathscr{X}}_n \xrightarrow[p]{} \Delta_n$ *comme dans* 0.1, *alors la fibre* $\tilde{\mathscr{X}}_{n,0}$ *n'est pas cohomologiquement kählérienne.* (*On entend par là que la suite spectrale de Fröhlicher de* $\tilde{\mathscr{X}}_{n,0}$ *ne dégénère pas en* E_1). *En particulier, il n'existe pas de telle compactification biméromorphe à* $\mathscr{X}_n$.

L'idée, très simple, qui mène à ce théorème, est que la variation de structure de Hodge sur les disques Δ_n (n pair) n'est pas, en zéro, celle d'une famille de variétés lisses avec fibré canonique trivial et cohomologiquement kählériennes.

Notations. –Soit $\mathscr{X} \xrightarrow{D} \Delta$ une famille analytique de variétés paramétrée par le disque Δ: on note $\mathscr{X}^* \xrightarrow{p^*} \Delta^*$ la famille $\mathscr{X} \backslash p^{-1}\{0\} \xrightarrow{p^*} \Delta\backslash\{0\}$;

–On note $\Delta_n \xrightarrow{r_n} \Delta$ le changement de base $s \to t = s^n$, $\mathscr{X}_n = \mathscr{X} \times_\Delta \Delta_n$, $\mathscr{X}_n \xrightarrow{p_n} \Delta_n$, $\mathscr{X}_{n,s} = p_n^{-1}(s)$;

–On note $H^k_{\mathbf{Z}}$ le faisceau $R^k p\mathbf{Z}$ sur Δ, et $F^p H^k$ les sous-fibrés holomorphes de $H^k_{\mathbf{Z}} \otimes \mathscr{O}_\Delta$ associés à la filtration de Hodge.

–Si les fibres lisses de p admettent une décomposition de Hodge et si $H^k_{\mathbf{Z}}$ est globalement trivial, on notera D le domaine des périodes (contenu dans un espace de drapeaux sur l'espace vectoriel $H^k_{\mathbf{C}}$) et $\mathscr{P}$ l'application des périodes, à valeurs dans D. On notera $\mathscr{P}_K$ l'application des périodes pour les formes holomorphes. Les objets correspondants sur Δ_n seront notés $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{P}_{n,K}$.

1.

On rappelle dans cette section la topologie et la théorie de Hodge d'une dégénération de Lefschetz (d'espace total kählérien), et l'on étudie la variation de structure de Hodge en 0.

1.1. Soit $\mathscr{X}$ une variété lisse kählérienne, de dimension $2m+1$ et $p: \mathscr{X} \to \Delta$ propre, de rang maximal au-dessus de Δ^*, $\mathscr{X}_0$ possédant pour seule singularité un point double ordinaire x_0; dans un voisinage de x_0, $\mathscr{X}$ possède des coordonnées $(x_1, \cdots, x_{2m+1})$ telles que p soit décrite par $t = \sum_1^{2m+1} x_i^2$. L'intersection de la boule $\sum_1^{2m+1} |x_i|^2 \leq \varepsilon$ et de la fibre $\mathscr{X}_t$, pour $|t| < \varepsilon$, a le type d'homotopie de la $2m$-sphère $\sqrt[s]{t} \subset \mathscr{X}_t$, d'équations: $x_i/\sqrt{t} \in \mathbf{R}$, $\sum |x_i|^2 = |t|$. Cette sphère $S_{\sqrt{t}}$ admet une classe de cohomologie $S_{\sqrt{t}} \in H^{2m}(\mathscr{X}_t, \mathbf{Z})$, définie à ± 1 près, et appelée cycle évanescent de $\mathscr{X}_t$.

1.2. La fibration $\mathscr{X}^* \xrightarrow{p^*} \Delta^*$ est localement triviale, et il y a donc une action de monodromie Γ du lacet positif autour de zéro sur le groupe

$H^{2m}(\mathscr{X}_t, \mathbf{Z})$: cette action est décrite par la formule de Picard-Lefschetz:

$$\Gamma\left(\delta_{\sqrt{t}}\right) = -\delta_{\sqrt{t}}, \qquad \Gamma(\alpha) = \alpha \quad \text{si } \left\langle \alpha \cdot s_{\sqrt{t}} \right\rangle = 0.$$

1.3. Le faisceau localement constant $R^{2m}p_2^*\mathbf{Z} = r_2^*(R^{2m}p^*\mathbf{Z})$ sur Δ_2^* est donc globalement constant, puisque Γ est d'ordre 2. De plus les cycles δ_s fournissent une section globale constante de ce faisceau.

1.4. Le produit fibré $\mathscr{X}_2 \xrightarrow[p_2]{} \Delta_2$ admet un point double ordinaire qui se résout par éclatement $\tilde{\mathscr{X}}_2 \xrightarrow{\tau} \mathscr{X}_2$. La fibre $\tilde{\mathfrak{L}}_{2,0}$ est alors la réunion de $\tilde{\mathscr{X}}_0$ et d'une quadrique Q_{2m}, se croisant le long d'une section hyperplane Q_{2m-1} de Q_{2m}, qui s'identifie à la quadrique exceptionnelle de $\tilde{\mathscr{X}}_0$ = désingularisée par éclatement de $\mathscr{X}_0$. La quadrique affine $Q_{2m}\backslash Q_{2m-1}$ se rétracte sur un sphère S_0, limite des sphères S_s de 1.1.

1.5. $\tilde{\mathscr{X}}_2$ est kählérienne; sur Δ_2^* l'application des périodes $\mathscr{P}_2$, qui à $s \in \Delta_2^*$ associe la filtration de Hodge sur l'espace vectoriel constant $H^{2m}(\mathscr{X}_{2,s}, \mathbf{C})$ est à valeurs dans D: d'après [8] elle se prolonge holomorphiquement en 0. $\mathscr{P}_2(0)$ fournit une structure de Hodge limite $H^{2m}_{\lim}$ en 0; par ailleurs $H^{2m}(\tilde{\mathscr{X}}_{2,0}, \mathbf{C})$ possède une structure de Hodge mixte (en fait pure) qui se calcule à l'aide d'une suite exacte de Mayer-Vietoris. La suite exacte de Clemens-Schmid, et le fait que la monodromie soit triviale, fournissent alors une surjection $H^{2m}(\tilde{\mathscr{X}}_{2,0}, \mathbf{C}) \to H^{2m}_{\lim}$ compatible avec les structures de Hodge. On en déduit, à l'aide de 1.4, que le cycle limite δ_0 (valeur en 0 de la section δ_s) est de type (m, m) dans $H^{2m}_{\lim}$, puisque la classe de S_0 est de type (m, m) dans $H^{2m}(Q_{2m})$.

1.6. Décrivons maintenant la différentielle $d\mathscr{P}_2$ en 0. On a la proposition suivante:

1.7. Proposition. *Si $m > 1$ la différentielle $d\mathscr{P}_{2,K}(0)$ est nulle* (*dans* $\operatorname{Hom}(F^{2m}H^{2m}_{\lim}, F^{2m-1}H^{2m}_{\lim}/F^{2m}H^{2m}_{\lim})$).

Démonstration. On utilisera les lemmes suivants, dont la preuve est donnée plus loin.

1.8. Lemme. *On a un isomorphisme naturel*: $R^0\tilde{p}_2K_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2} \simeq r_2^*R^0pK_{\mathscr{X}/\Delta}$ *où* $\tilde{p}_2 = p_2 \circ \tau \colon \tilde{\mathscr{X}}_2 \to \Delta_2$; *de plus ces fibrés sont localement libres et la flèche de changement de base est un isomorphisme en tout point de* Δ_2.

1.9. Lemme. *Le sous fibré* $F^{2m}H^{2m}$ *de* $H^{2m}_{\mathbf{C}} \otimes \mathscr{O}_{\Delta_2}$ *sur* Δ_2 *est isomorphe à* $R^0\tilde{p}_2K_{\tilde{\mathfrak{L}}_2/\Delta_2}$.

D'après ces lemmes, on peut trouver des sections $\omega_i(t)$ de $R^0pK_{\mathscr{X}/\Delta}$ sur Δ, telles que $r_2^*\omega_i$ engendrent $F^{2m}H^{2m}_{\lim}$ en 0.

Par définition de $d\mathscr{P}_{2,K}$ il suffit de montrer que $\nabla_{\partial/\partial s}|_{s=0}(\tau_2^*\omega_i)$ est nul.

Soit $(e_1, \cdots, e_N)$ une base multivaluée de $H^{2m}_{\mathbf{Q}}$ sur Δ^*, telle que $\Gamma(e_1) = e_1$ pour $i < N$, et $\Gamma(e_N) = -e_N$, i.e., $e_N(t) = \delta_{\sqrt{t}}$.

Sur Δ^* on a $R^0pK_{\mathscr{X}/\Delta} \simeq F^{2m}H^{2m} \subset H^{2m}_{\mathbf{C}} \otimes \mathscr{O}_{\Delta^*}$, et l'on peut donc écrire $\omega_i(t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(t)e_j$ où les φ_j sont des fonctions holomorphes multivaluées. Comme $\omega_1(t)$ est une section globale de $H^{2m}_{\mathbf{C}}$ sur Δ^*, on a

$$\varphi_j(e^{2i\pi}t) = \varphi_j(t) \quad \text{pour } j < N, \qquad \varphi_N(e^{2i\pi}t) = -\varphi_N(t).$$

D'autre part, comme $r_2^*\omega_1(t)$ s'étend en une section holomorphe de $H^{2m}_{\mathbf{C}}$ sur Δ_2, les φ_j sont bornées, donc s'étendent holomorphiquement pour $j < N$, tandis que $\varphi_N(t) = \psi(\sqrt{t})$, avec ψ holomorphe en 0. On a donc:

$$r_2^*\omega_i(t) = \sum_1^{N-1} \varphi_j(s^2)e_i + \psi(s)e_N,$$

et en appliquant la dérivée de Gauss-Manin en 0, on obtient:

$$\nabla_{\partial/\partial s}|_{s=0}(r_2^*\omega_i(t)) = \psi'(0)e_N.$$

Il suffit donc de prouver que $\psi'(0) = 0$. Mais la propriété de transversalité, qui par continuité reste vraie en 0, entraîne que $\nabla F^{2m} \subset F^{2m-1} \otimes \Omega_{\Delta_2}$. Comme $m > 1$, on a: $F^m H^{2m}_{\lim} \perp F^{2m-1}H^{2m}_{\lim}$, et comme le cycle évanescent δ_0 appartient à $F^m H^{2m}_{\lim}$ (d'aprés 1.6), on doit avoir:

$$\nabla_{\partial/\partial s}|_{s=0}(r_2^*(\omega_1(t))) \cdot \delta_0 = 0.$$

Comme $\delta_0 = e_N(0)$, et $\delta_0^2 \neq 0$, on a donc $\psi'(0) = 0$, ce qui termine la démonstration.

Preuve du Lemme 1.8. Le fibré canonique $K_{\tilde{\mathscr{X}}_2}$ est égal à $\tau^*K_{\mathscr{X}_2} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{X}}_2}(\mathscr{Q}_{2m})^{\otimes(2m-2)}$; d'autre part $K_{\mathscr{X}_2} = r_2^*K_{\mathscr{X}} \otimes \mathscr{O}_{\mathscr{X}_2}(\mathscr{X}_{2,0})$ et $K_{\Delta_2} = r_2^*(K_\Delta) \otimes \mathscr{O}_{\Delta_2}(0)$.

Donc $K_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2} \simeq \tau^*(r_2^*(K_{\mathscr{X}/\Delta})) \otimes \mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{X}}_2}(\mathscr{Q}_{2m})^{\otimes(2m-2)}$.

On en déduit aisément le premier isomorphisme.

L'isomorphisme de changement de base résulte de la constance de $h^{2m,0}$ sur Δ_2^*; pour montrer que $h^0(\tilde{\mathscr{X}}_{2,0}, K_{\tilde{\mathscr{X}}_{2,0}}) = h^{2m,0}$ on utilise la suite exacte de Clemens Schmid, qui donne: $h^0(K_{\tilde{\mathscr{X}}_0}) = h^{2m,0}$, et l'on compare $h^0(K_{\tilde{\mathscr{X}}_0})$ et $h^0(K_{\tilde{\mathscr{X}}_{2,0}})$: le résultat est immédiat.

Preuve du Lemme 1.9. Il suffit de rappeler la construction de l'extension canonique des fibrés de Hodge, donnée par exemple dans [10]. Comme on a $\Lambda^{2m}\Omega_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathscr{X}}_{2,0}) = K_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2}$, $R^0\tilde{p}_2(\Lambda^{2m}\Omega_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathscr{X}}_{2,0}))$ est libre; il est clair d'autre part que les dérivées partant de $E_i^{2m,0}$ dans la suite spectrale de Fröhlicher sont nulles: on a donc une surjection

$$R^0\tilde{p}_2(\Lambda^{2m}\Omega_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathscr{X}}_{2,0})) \to F^{2m}\mathbf{R}^{2m}\tilde{p}_2(\Omega^*_{\tilde{\mathscr{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathscr{X}}_{2,0})) = F^{2m}H^{2m}.$$

Comme les deux faisceaux sont libres de même rang c'est un isomorphisme.

1.10. On suppose désormais que $\mathscr{X} \to \Delta$ est une dégénération de Lefschetz d'hypersurfaces de degré $2m+2$ de $\mathbf{P}^{2m+1}$, i.e., $\mathscr{X} \subset \Delta \times \mathbf{P}^{2m+1}$ est une hypersurface d'équation $F(t,x) = F_0(x) + tF_1(x) + t^2F_2(x) + \cdots$ où les F_i sont des polynômes homogènes de degré $2m+2$. F_0 a un point double ordinaire x_0; la lissité de $\mathscr{X}$ en $(0, x_0)$ entraîne $F_1(x_0) \neq 0$. On a alors la proposition suivante.

1.11. Proposition. *Sur Δ_2, la différentielle de l'application des périodes $d\mathscr{P}_2(0)$ est non nulle.*

On utilisera les lemmes suivants.

1.12. Lemme. *Soit $(P_s)_{s\in\Delta_2}$ une famille holomorphe de polynômes homogènes de degré $k\times(2m+2)$ sur $\mathbf{P}^{2m+1}$. Alors $\omega_s = \operatorname{Res}_{\mathscr{X}_s} P_s\Omega/F_s^{k+1}$ est une section holomorphe de $F^{2m-k}H^{2m}$ sur Δ_2, pour $k \leq m-1$ (où Ω est la section canonique de $K_{\mathbf{P}^{2m+1}}(2m+2)$).*

Démonstration. Cf. [7].

1.13. Lemme. *Soit $(P_s)_{s\in\Delta_2}$ une famille holomorphe de polynômes homogènes de degré $m\times(2m+2)$ sur $\mathbf{P}^{2m+1}$. Alors la limite*

$$\lim_{s\to 0} s \int_{S_s} \operatorname{Res}_{\mathscr{X}_s} \frac{P_s\Omega}{F_s^{m+1}}$$

existe, est finie, et est non nulle si et seulement si $P_0(x_0) \neq 0$.

Démonstration. Comme les sphères S_s sont évanescentes on peut se placer dans un voisinage de x_0 pour calculer le résidu. Soit d'abord des coordonnées homogènes $(X_0, \cdots, X_{2m+1})$ telles que $x_0 = (1, 0, \cdots, 0)$; dans les coordonnées affines $x_i = X_i/X_0$, la forme méromorphe $P_s\Omega/F_s^{m+1}$ s'écrit $(p_s/f_s^{m+1})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2m+1}$, où $p_s(x) = P_s(1,x)$ et $f_s(x) = F_s(1,x)$.

D'après 1.1, dans des coordonnées locales holomorphes $(s, z_1, \cdots, z_{2m+1})$ cela s'écrit: $(h(s,z)/(\sum_1^{2m+1} z_i^2 - s^2)^{m+1})dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{2m+1}$, où $h(s,z)$ est une fonction holomorphe s'annulant au même ordre que $p_s(x)$ en $(0,0)$. $\mathscr{X}_s$ est alors définie par $\sum_1^{2m+1} z_i^2 - s^2 = 0$, et S_s est la $2m$-sphère d'équations: $\{z_i/s \in \mathbf{R}, \sum z_i^2 = s^2$.

Il suffit clairement de montrer que:

$$\lim_{s\to 0} \int_{S_s} \operatorname{Res}_{\mathscr{X}_s} \frac{s\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{2m+1}}{(\sum z_i^2 - s^2)^{m+1}} \neq 0.$$

Or faisant le changement de variables $z_i' = z_i/s$ pour $s \neq 0$ l'équation de $\mathscr{X}_s$ devient $\sum_1^{2m+1} z_i'^2 - 1 = 0$ et la sphère S_s est décrite par les équations: $\{z_i' \in \mathbf{R}, \sum_1^{2m+1} z_i'^2 - 1 = 0$. Enfin la forme à intégrer devient

$$\frac{dz_1' \wedge \cdots \wedge dz_{2m+1}'}{(\sum z_i'^2 - 1)^{m+1}}.$$

Le résidu de cette forme, ou plutôt son intégrale sur S_s est donc en fait constant, et non nul car il est bien connu que ce résidu engendre la cohomologie de la quadrique affine d'équation $\sum z_i'^2 = 0$, tandis que S_s engendre son homologie (cf. [7]).

Preuve de la Proposition 1.11. Il suffit de montrer que la $(m-1)$ième pièce de $d\mathscr{P}_2(0)$ est non nulle dans

$$\mathrm{Hom}(F^{m+1}H^{2m}_{\mathrm{lim}}/F^{m+2}H^{2m}_{\mathrm{lim}}, F^m H^{2m}_{\mathrm{lim}}/F^{m+1}H^{2m}_{\mathrm{lim}}).$$

Comme en 0 le cycle évanescent δ_0 est de type (m, m) il suffit de trouver une section holomorphe de $F^{m+1}H^{2m}$ sur Δ_2, soit $(\omega_s)_{s\in\Delta_2}$, telle que $\lim_{s\to 0}\langle\nabla_{\partial/\partial s}\omega_s \cdot \delta_s\rangle \neq 0$.

Soit P un polynôme homogène de degré $(m-1)(2m+2)$ tel que $P(x_0) \neq 0$. D'après 1.12, $\omega_s = \mathrm{Res}_{\mathscr{X}_s} P\Omega/F_s^m$ est une section holomorphe de $F^{m+1}H^{2m}$ sur Δ_2.

Maintenant $F_s = F_0 + s^2 F_1 + \cdots$, et l'on a, d'après [3], pour $s \neq 0$,

$$\nabla_{\partial/\partial s}\left(\mathrm{Res}_{\mathscr{X}_s}\frac{P\Omega}{F_s^m}\right) = C\,\mathrm{Res}_{\mathscr{X}_s}\frac{P\partial F_s/\partial s\Omega}{F_s^{m+1}}$$

modulo $F^{m+1}H^{2m}$, où C est une constante non nulle.

Comme δ_0 est de type (m, m), donc orthogonal à $F^{m+1}H^{2m}_{\mathrm{lim}}$, on a:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}(\nabla_{\partial/\partial s}(\omega_s)\cdot\delta_s) &= 2C\lim_{s\to 0} s\cdot\left\langle \mathrm{Res}_{\mathscr{X}_s}\frac{PF_1\Omega}{F_s^{m+1}}\cdot\delta_s\right\rangle \\ &= 2C\lim_{s\to 0}\int_{S_s} s\cdot\mathrm{Res}_{\mathscr{X}_s}\frac{PF_1\Omega}{F_s^{m+1}},\end{aligned}$$

qui est non nul, d'après 1.13, et $P(x_0) \neq 0$, $F_1(x_0) \neq 0$; d'où la proposition.

2. Preuve du théorème

2.0. On supposera dans la suite qu'il existe un changement de base $\Delta_n \xrightarrow[r_n]{} \Delta$ et une variété $\mathscr{Y} \xrightarrow[q]{} \Delta_n$, isomorphe à $\mathscr{X}_n$ au-dessus de Δ^*, et telle que $\mathscr{Y}_0$ soit lisse et cohomologiquement kählerienne. On note $\psi\colon \mathscr{Y}^* \simeq \mathscr{X}_n^*$; ψ induit un isomorphisme en cohomologie: $H^{2m}(\psi)\colon R^{2m}p_n^*\mathbf{Z} \simeq R^{2m}q^*\mathbf{Z}$ sur Δ_n^*. Comme le second faisceau est trivial sur Δ_n^*, le premier l'est également, soit d'après 1.2, n pair, $n = 2n_0$. Le revêtement $r_n\colon \Delta_n \to \Delta$ se factorise donc en $\Delta_n \xrightarrow[r]{} \Delta_2 \xrightarrow[r_2]{} \Delta$, où r est de degré n_0, et l'on a une application des périodes $\mathscr{P}_2 \circ r$ sur Δ_n. Par ailleurs on a le lemma suivant.

2.1. Lemma. *Sous les hypothèses de* 2.0, *la filtration de Hodge sur le faisceau* $R^{2m}\,q\,\mathbf{C}$ *associée à la famille* $\mathscr{Y} \underset{q}{\to} \Delta_n$ *est de gradué localement libre.*

Démonstration. $\mathscr{Y}_0$, comme les fibres voisines $\mathscr{Y}_s \simeq \mathscr{X}_s$ est cohomologiquement kählerienne; cela entraîne, par semicontinuité des nombres $h^{p,q}$, et par $b_l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$, que $h^{p,q}(\mathscr{Y}_0) = h^{p,q}(\mathscr{Y}_s)$. Le premier terme de la suite spectrale $E_1^{p,q} = R^q q(\Omega^p_{\mathscr{Y}/\Delta_n})$ est donc localement libre. Comme $d_1 = 0$ pour $s \neq 0$, on en déduit $d_1 = 0$ sur Δ_n, et donc $E_1^{p,q} = E_2^{p,q}$. On voit de même que toutes les différentielles d_1 s'annulent, et $E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q}$ est localement libre. Ce qui prouve le lemme.

2.2. Dans ces conditions, on a une application des périodes $\mathscr{P}_{\mathscr{Y}}$ sur Δ_n, holomorphe, naturellement à valeurs dans le même domaine D que $\mathscr{P}_2 \circ r$. Comme ces applications coïncident via $H^{2m}(\psi)$ sur Δ_n^*, elles sont égales sur Δ_n.

Les lemmes suivants décrivent $d\mathscr{P}_{\mathscr{Y}}$ sur Δ_n:

2.3. Lemme. $\mathscr{Y}_0$ *a un fibré canonique trivial*; $R^1qT_{\mathscr{Y}/\Delta_n}$ *est localement libre*; $R^0qK_{\mathscr{Y}/\Delta_n}$ *est libre de rang* 1; *le choix d'une section* $(\omega_s)_{s\in\Delta_n}$ *partout non nulle de* $R^0qK_{\mathscr{Y}/\Delta_n}$ *fournit un isomorphisme*:

$$R^1qT_{\mathscr{Y}/\Delta_n} \xrightarrow{\omega} R^1q\Omega^{2m-1}_{\mathscr{Y}/\Delta_n}.$$

Démonstration. Le premier fait découle de la semicontinuité de $h^0(K_{\mathscr{Y}_s})$ et $h^0(K_{\mathscr{Y}_s}^{-1})$; la trivialité de $K_{\mathscr{Y}_s}$ entraîne alors: $T_{\mathscr{Y}_s} \simeq \Omega^{2m-1}_{\mathscr{Y}_s}$, $\forall S \in \Delta_n$; or d'après 2.1 $h^1(\Omega^{2m-1}_{\mathscr{Y}/\Delta_n})$ est constant. Donc $h^1(T_{\mathscr{Y}_s})$ est constant, et $R^1_q(T_{\mathscr{Y}_s})$ est localement libre. La dernière assertion est évidente.

2.4. Soit $\rho_{\mathscr{Y}}\colon T_{\Delta_n} \xrightarrow{R^1q} T_{\mathscr{Y}/\Delta_n}$ l'application de Kodaïra-Spencer associée à la famille $\mathscr{Y} \xrightarrow{q} \Delta_n$, et soit $\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}$ l'application des périodes pour les $2m$-formes sur Δ_n, i.e. $\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}(s) =$ le sous-espace $H^{2m,0}(\mathscr{Y}_s) \subset H^{2m}(\mathscr{Y}_s, \mathbf{C})$. Il est alors bien connu qu'on a la commutativité du diagramme:

$$\begin{tikzcd}
T_{\Delta_n} \arrow[r, "d\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}"] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\rho_{\mathscr{Y}}"'] & \mathrm{Hom}(R^0qK_{\mathscr{Y}/\Delta_n}, R^{2m}q(\mathbf{C}_{\mathscr{Y}}) \otimes \mathscr{O}_{\Delta_n}/R^0qK_{\mathscr{Y}/\Delta_n}) \\
& \mathrm{Hom}(R^0qK_{\mathscr{Y}/\Delta_n}, R^1q\Omega^{2m-1}_{\mathscr{Y}/\Delta_n}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[d, "\omega\wr"] \\
R^1q\,(T_{\mathscr{Y}/\Delta_n}) \arrow[r, "\sim"', "\omega"] & R^1q\Omega^{2m-1}_{\mathscr{Y}/\Delta_n}
\end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillé signifie que $d\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}$ se factorise, par transversalité, par l'inclusion i; notons de plus que i est une inclusion de sous-fibrés vectoriels, d'après 2.1.

2.5. Corollaire. *L'ordre de ramification de* $\mathscr{P}_{\mathscr{Y}}$ *en zéro est égal à celui de* $\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}$ *en* 0.

En effet, $\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}$ se factorise par $\mathscr{P}_{\mathscr{Y}}$, donc l'inégalité dans un sens est évidente. Mais d'autre part $d\mathscr{P}_{\mathscr{Y}}$ se factorise par $\rho_{\mathscr{Y}}$ qui s'identifie d'après le diagramme précédent à $d\mathscr{P}_{\mathscr{Y},K}$.

2.6. Maintenant, l'absurdité de 2.0 est claire; en effet $\mathscr{P}_{\mathscr{Y}} = \mathscr{P}_2 \circ r$: d'après la §1, $d\mathscr{P}_2(0) \neq 0$, tandis que $d\mathscr{P}_{2,K}(0) = 0$. On en déduit que $\mathscr{P}_2 \circ r$ se ramifie à l'ordre n_0, tandis que $\mathscr{P}_{2,K} \circ r$ se ramifie à un ordre strictement supérieur à n_0, ce qui contredit 2.5.

2.7. La dernière assertion du théorème résulte du fait que si $\tilde{\mathscr{X}}_n$ est biméromorphe à $\mathscr{X}_n$, alors $\tilde{\mathscr{X}}_{n,0}$ est une variété de Moishezon, donc cohomologiquement kählérienne.

2.8. Problème. La question soulevée par Friedman reste ouverte tant que l'on ne peut pas supprimer l'hypothèse: $\mathscr{Y}_0$ est cohomologiquement kählérienne.

Je ne connais pas de variété limite de variétés kählériennes et non cohomologiquement kählérienne: en existe-t-il?

Utilisant les hypothèses supplémentaires faites sur la famille (par exemple $b_2(\mathscr{X}_s) = 1$, $\pi_1(\mathscr{X}_s) = 0$, etc), peut-on prouver que la variété $\mathscr{Y}_0$ doit être cohomologiquement kählérienne?

References

[1] A. Andreotti & T. Frankel, *The second Lefschetz theorem on hyperplane sections*, Global Analysis (A symposium in honor of K. Kodaïra), Princeton University Press, Princeton, NJ, 1969, 1–20.

[2] M. F. Atiyah, *On analytic surfaces with double points*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **247** (1958) 237–244.

[3] J. Carlson & P. Griffiths, *Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem*, Géométrie Algébrique, Sijthoff and Noordhoff, Angers, 1980, 51–76.

[4] C. H. Clemens, *Degeneration of kähler manifolds*, Duke Math. J. **44** (1977) 215–290.

[5] ——, *Double solids*, Advances in Math. **47** (1983) 107–230.

[6] R. Friedman, *A degenerating family of quintic surfaces with trivial monodromy*, Duke Math. J. **50** (1983) 203–214.

[7] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals*. I, II, Ann. of Math. (2) **90** (1969) 460–541.

[8] ——, *Periods of integrals on algebraic manifolds*. III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **38** (1970) 125–180.

[9] J. W. Morgan, *Topological triviality of various analytic families*, Duke Math. J. **50** (1983) 215–225.

[10] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Invent. Math. **31** (1976) 229–257.

UNIVERSITÉ DE PARIS–SUD