Math. Ann. 280, 605–611 (1988)

Mathematische Annalen

Une précision concernant le théorème de Noether

Claire Voisin

Université de Paris-Sud, mathématique, Bâtiment 425, Centre d'Orsay,
F-91405 Orsay Cedex, France

Soit $\mathscr{S}_d \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(d)))$ l'ensemble des surfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^3$ telles que $\operatorname{Pic} S \neq \mathbb{Z}$; on se propose dans ce qui suit de prouver le théorème suivant, proposé sous forme de conjecture dans [4] (p. 208):

Théorème. *Pour $d \geqq 5$, chaque composante de $\mathscr{S}_d$ est de codimension $\geqq d-3$, l'égalité étant réalisée seulement par la famille des surfaces de degré d contenant une droite.*

Au paragraphe 0, on rappelle la description infinitésimale de $\mathscr{S}_d$ et l'interprétation polynômiale de la variation de structure de Hodge d'une hypersurface de $\mathbb{P}^3$, ce qui permet de réduire le théorème à un énoncé purement algébrique (proposition 1 cidessous):

On note $S^k = H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k))$ et pour F un polynôme homogène, $J^k(F)$ la composante de degré k de l'idéal jacobien de F, engendré par les dérivées partielles de F.

Si $E \subset S^k$, $E' \subset S^{k'}$ sont des sous-espaces vectoriels, on note $[E:E'] \subset S^{k-k'}$ l'ensemble des polynômes P tels que $P \cdot E' \subset E$.

Si Z est un sous-ensemble algébrique de l'espace projectif, on note I_Z son idéal, et $I_Z(k)$ la composante homogène de degré k de son idéal.

Proposition 1. *Soit $d \geqq 5$; soit $H \subset S^{2d-4}$, un hyperplan contenant $J^{2d-4}(F)$: si* $\operatorname{codim}[H:S^d] \leqq d-3$, $[H:S^d]$ *contient la composante de degré $d-4$ de l'idéal d'une droite $\Delta \subset \mathbb{P}^3$.*

La section 1 est consacrée à la démonstration de cette proposition ainsi qu'au raffinement suivant, obtenu en restreignant les données à la droite Δ.

Proposition 2. *On a en fait $[H:S^d] = I_\Delta(d-4)$, et Δ satisfait à la condition:*

$$\operatorname{rang}(J^{d-1}|_\Delta) = 2.$$

La suite du raisonnement est de nature plus géométrique: soit X une composante de $\mathscr{S}_d$ de codimension inférieure ou égale à d -3; les propositions 1 et 2 montrent que X se plonge naturellement dans $G \subset \mathbb{P}(S^d) \times \text{Grass}\ (2;\ 4)$, où $G = \{(F, \Delta)/\operatorname{rang}(J^{d-1}(F)|_\Delta) = 2\}$. On montre alors qu'en un point (F, Δ) tel que

$F|_\Delta \neq 0$, G est lisse, de codimension $2(d-2)$ dans $\mathbb{P}(S^d)\times \mathrm{Grass}(2,4)$. Si $d\geq 6$, on a: $2(d-2)>d+1$, et donc la seule composante de G qui peut contenir X est constituée des couples (F,Δ) tels que $F|_\Delta=0$, ce qui prouve le théorème; le cas $d=5$ exige une analyse un peu plus fine.

0. Préliminaires

Soit S de degré d, lisse, dans $\mathbb{P}^3$: par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$, $\mathrm{Pic}\,S\neq\mathbb{Z}$ équivaut à l'existence d'une classe entière primitive, de type $(1,1)$ dans $H^2(S)$, soit λ. Du fait de la structure discrète de $H^2(S,\mathbb{Z})$, cette classe λ est localement constante sur une composante irréductible de $\mathscr{S}_d$, et l'on notera $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ la réunion des composantes de $\mathscr{S}_d$ sur lesquelles λ reste de type $(1,1)$.

Notant Q la forme d'intersection sur S, λ étant réelle, la condition pour que λ soit de type $(1,1)$ est que

$$Q(H^{2,0}(S),\lambda)=0,\ \text{car}\ H^{2,0}(S)^\perp=H^{2,0}\oplus H^{1,1}(S).$$

Soit $S\xrightarrow{p}B$ une famille de surfaces lisses de $\mathbb{P}^3$ paramétrée par $B\ni 0$. Soit ∇ la connexion de Gauss-Manin sur $R^2p_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}_B$: à l'aide de ∇, l'application des périodes, qui à $t\in B$ associe le sous-espace $H^{2,0}(S_t)\subset H^2(S_t,\mathbb{C})$, se différencie en 0, en

$$\partial/\partial t\to\nabla_0(\partial/\partial t)\in\mathrm{Hom}(H^{2,0}(S_0),H^2(S_0)/H^{2,0}(S_0)),$$

et, par le théorème de transversalité [1], l'image de $\nabla_0(\partial/\partial t)$ est contenue dans $H^{2,0}+H^{1,1}/H^{2,0}\cong H^{1,1}(S_0)$. En fait comme la classe d'une section hyperplane est localement constante et orthogonale à $H^{2,0}$, l'image est contenue dans $H^{1,1}_{\mathrm{prim}}(S_0)$.

Comme Q et λ sont plates, la condition $Q(H^{2,0}_t,\lambda)=0$ se différencie en: $Q(\nabla_0(\partial/\partial t)H^{2,0},\lambda)=0$.

Notant $\xi=\varrho(\partial/\partial t)$, l'image de $\partial/\partial t$ dans $H^1(T_{S_0})$ par l'application de Kodaira-Spencer, on sait que $\nabla_0(\partial/\partial t)$ est en fait le cup-produit par $\xi: H^0(K_{S_0})\to H^1(\Omega_{S_0})$. L'espace tangent à $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ est donc le noyau à gauche de l'application:

$$H^1(T_{S_0})_{\mathrm{proj}}\otimes H^0(K_{S_0})\to H^1(\Omega_{S_0})/\lambda^\perp,$$

où "proj" dénote le sous-espace de $H^1(T_{S_0})$ paramétrant les déformations de S_0 dans $\mathbb{P}^3$. L'espace tangent à $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ est donc de codimension égale à celle de $H^{2,0}(-\lambda)$ dans $H^{2,0}$, où

$$H^{2,0}(-\lambda)=\{\omega\in H^{2,0}/Q(\xi\cdot\omega,\lambda)=0,\forall\xi\in H^1(T_{S_0})_{\mathrm{proj}}\}.$$

Lorsque S_0 est une hypersurface de $\mathbb{P}^3$ définie par le polynôme F_0, notant $R^k=S^k/J^k$, on a de plus les interprétations algébriques suivantes des espaces considérés plus haut:

- $H^1(T_{S_0})_{\mathrm{proj}}\cong R^d=H^0(N_{S_0}\mathbb{P}^3)/H^0(T_{\mathbb{P}^3}|_{S_0})$
- $H^0(K_{S_0})\cong R^{d-4}$ (adjonction)
- $H^1(\Omega_{S_0})_{\mathrm{prim}}\cong R^{2d-4}$, par l'application résidu:

$$H^0(K_{\mathbb{P}^3}(2S_0))\to H^1(\Omega^c_{S_0}).$$

Enfin, à un coefficient universel près, le cup-produit

$$H^1(T_{S_0})_{\mathrm{proj}}\otimes H^0(K_{S_0})\to H^1(\Omega_{S_0})_{\mathrm{prim}}$$

n'est autre que le produit dans l'anneau $R: R^d\otimes R^{d-4}\to R^{2d-4}$.

La classe $\lambda \in H^1(\Omega_{S_0})_{\text{prim}}$ définit un hyperplan $\bar{H} = \lambda^\perp$ dans R^{2d-4}, et il est clair que $H^{2,0}(-\lambda)$ n'est autre que $[\bar{H} : R^d] \subset R^{d-4}$; prenant les images réciproques dans l'anneau S, on obtient un hyperplan H de S^{2d-4}, qui, si la codimension de $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ est $\leqq d-3$, satisfait à: $\operatorname{codim}[H : S^d] \leqq d-3$; on est donc dans les hypothèses de la proposition 1. On sait enfin que l'espace tangent à $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ est $[H : S^{d-4}]$.

Les démonstrations des résultats décrits ici sont à trouver dans: [1, 2, 6].

1. Démonstration de la proposition 1

Pour $k \leqq 2d-4$, on notera $E_k = [H : S^{2d-4-k}] \subset S^k$; évidemment $E_{k-1} = [E_k : S^1]$. Par récurrence descendante sur $k \leqq d-4$, on prouve la propriété $P(k)$ suivante: $\operatorname{codim} E_k \leqq k+1$; $P(d-4)$ étant vérifiée par hypothèse, on suppose donc $P(k)$ vérifiée: on a $E_{k-1} = \bigcap_{P \in S^1} [E_k : P]$. Comme $[E_k : P] \cong P \cdot S^{k-1} \cap E_k$, on a $\operatorname{codim}[E_k : P] \leqq \operatorname{codim} E_k \leqq k+1$. On en déduit que l'espace engendré par les $[E_k : P_i]_{i=1,k+1}$ est indépendant du $(k+1)$-uple *générique* $(P_1, \ldots, P_{k+1}) \in (S^1)^{k+1}$: en effet, pour chaque entier m il existe un ouvert U_m de $(S^1)^m$ et un entier $\varphi(m)$ tel que pour $(P_1, \ldots, P_m) \in U_m$ on ait: $\operatorname{codim} \sum_{i=1}^{m} [E_k : P_i]) = \varphi(m)$. On a bien sûr, $\varphi(m+1) \leqq \varphi(m) \leqq k+1$. D'autre part, $\varphi(m+1) = \varphi(m) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} [E_k : P_i]$ ne dépend pas du m-uple générique $(P_1, \ldots, P_m)$, et bien sûr le plus petit entier m tel que $\varphi(m) = \varphi(m+1)$ est inférieur ou égal à $k+1$.

On note H_{k-1} cet espace: soit $(P_1, \ldots, P_{k+2})$ un $(k+2)$-uple générique d'éléments de S^1: on a: $P_i \cdot [E_k \cdot P_i] \subset E_k$, d'où $P_1 \cdot \ldots \cdot P_{k+2} \cdot [E_k : P_i] \subset E_{2k+1}$, et donc $P_1 \cdot \ldots \cdot P_{k+2} \cdot H_{k-1} \subset E_{2k+1}$. Comme les produits $P_1 \cdot \ldots \cdot P_{k+2}$ engendrent S^{k+2} on en déduit: $S^{k+2} \cdot H_{k-1} \subset E_{2k+1}$, et comme $k \leqq d-4$, $2k+1 \leqq 2d-4$, d'où $H_{k-1} \subset E_{k-1}$. En fait on a l'égalité, puisque, pour P générique dans S^1, $H_{k-1} \supset [E_k : P] \supset E_{k-1}$.

Si maintenant $\operatorname{codim} E_{k-1} > k$, on trouve $k+1 \geqq \operatorname{codim} E_k \geqq \operatorname{codim}[E_k : P] = \operatorname{codim} E_{k-1} > k$, d'où l'égalité partout: cela entraîne que pour P générique dans S^1, la multiplication par P induit un isomorphisme: $\Phi_P : S_{k-1}/E_{k-1} \to S^k/E_k$, ces deux espaces étant de dimension $k+1$. Pour $Q \in S^1$, soit $\Psi_Q = \Phi_P^{-1} \circ \Phi_Q : S^{k-1}/E_{k-1} \to S^{k-1}/E_{k-1}$. Soit K l'hypersurface de S^1 de degré $k+1$ définie par $\det \Psi_Q = 0$. Si K engendre S^1, les produits de $k+2$ éléments génériques de K engendrent S^{k+2}: on raisonne alors comme précédemment: par définition de K, si $P \in K$, on a: $[E_k : P]$ contient strictement E_{k-1}: comme plus haut, il existe un espace H_{k-1} satisfaisant à: $H_{k-1} = \sum_{i=1}^{k+1} [E_k : P_i]$, pour $(P_1, \ldots, P_{k+1})$ un $k+1$-uple générique de K. Soit $(P_1, \ldots, P_{k+2})$ générique dans K^{k+2}: on a:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{k+2} \cdot H_{k-1} = \sum_{i=1}^{k+1} P_1 \cdot \ldots \cdot P_{k+2} \cdot [E_k : P_i]$$

et comme

$$P_i \cdot [E_k : P_i] \subset E_k, \qquad P_1 \cdot \ldots \cdot P_{k+2} \cdot H_{k-1} \subset S^{k+1} \cdot E_k.$$

D'où l'on tire: $S^{k+2} \cdot H_{k-1} \subset S^{k+1} \cdot E_k$, soit, puisque $2k+1 \leqq 2d-4$, $H_{k-1} \subset E_{k-1}$, contredisant $H_{k-1} \supset [E_k : P]$ pour P générique dans K.

Donc K doit être un hyperplan compté $k+1$ fois, et, par le théorème de Cayley-Hamilton, si $Q \in K$, $\Psi_Q^{k+1}=0$, du fait que $\Psi_P = \mathrm{Id}$. Or cela entraîne manifestement $Q^{k+1} \cdot S^{k-1} \subset E_{2k}$. On peut supposer que K est engendré par X_0, X_1, X_2: alors H contient les polynômes s'annulant à l'ordre $k+1$ au point $0=(0,0,0,1)$: mais H contient également J^{2d-4}, et comme J^{d-1} n'a pas de zéro dans $\mathbb{P}^3$, J^{d-1} contient un polynôme Φ tel que $\Phi(0) \neq 0$, i.e. $\Phi = X_3^{d-1} + \Phi'$, avec $d^0_{X_3}\Phi' < d-1$. Divisant les éléments de S^{2d-4} par Φ dans l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, tout élément s'écrit, modulo J^{2d-4},

$$P = \sum_{i \leqq d-2} X_3^i P_{2d-4-i}(X_0, X_1, X_2),$$

et comme $i \leqq d-2$, $2d-4-i \geqq d-2 \geqq k+1$. Donc $J^{2d-4} + I_0^{k+1} = S^{2d-4}$, ce qui contredit $J^{2d-4} \subset H$ et $I_0^{k+1} \subset H$.

L'hypothèse $\operatorname{codim} E_{k-1} > k$ était donc absurde, et l'on a bien $\operatorname{codim} E_k \leqq k+1$, pour tout k tel que $1 \leqq k \leqq d-4$: en particulier $\operatorname{codim} E_1 \leqq 2$, et E_1 contient l'idéal d'une droite Δ. Donc E_{d-4} contient $I_\Delta(d-4)$, ce qui prouve la proposition 1.

Soit $r: \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S^k \to \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S^k(\Delta) \underset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S^k/I_\Delta(k)$ la projection naturelle. Comme tous les espaces E_k, pour $k \leqq 2d-4$, contiennent $I_\Delta(k)$, ils sont égaux à $r^{-1}(r(E_k))$; on note $\bar{E}_k = r(E_k)$: il est clair que $\bar{E}_k = [\bar{H} : S^{2d-4-k}(\Delta)]$ et que $\bar{H}$ est un hyperplan de $S^{2d-4}(\Delta)$.

Preuve de la Proposition 2. Pour prouver que $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$, il suffit de prouver que $\bar{E}_{d-4} = 0$: supposons que $R \neq 0 \in \bar{E}_{d-4}$; alors $\bar{E}_{d-1}$ contient $R \cdot S^3(\Delta)$, et $J^{d-1}|_\Delta$; par conséquent, ce système linéaire n'a pas de point base, puisque $J^{d-1}|_\Delta$ n'en a pas, et il sépare deux points génériques de Δ puisque $R \cdot S^3(\Delta)$ le fait déjà. Soit alors p un point générique de Δ : $\bar{E}_{d-1}(-p)$ n'a pas de point base et donc, par la "ruse du pinceau sans point base" (7, p. 126), l'image de $\bar{E}_{d-1}(-p) \otimes S^{d-3}(\Delta)$ dans $S^{2d-4}(\Delta)$ est au moins de dimension $2(d-2) = \dim S^{d-4} - 1$; donc $\bar{E}_{d-1} \otimes S^{d-3}(\Delta) \to S^{2d-4}(\Delta)$ est surjective, ce qui contredit le fait que $\bar{E}_{d-1} = [\bar{H} : S^{d-3}(\Delta)]$. Un raisonnement identique prouve que $\bar{E}_{d-3} = 0$; or l'application:

$$S^{d-3}(\Delta)/\bar{E}_{d-3} \otimes S^{d-1}(\Delta)/\bar{E}_{d-1} \to S^{2d-4}(\Delta)/\bar{H}$$

établit par définition une parfaite dualité entre ces deux espaces: on a donc:

$$\dim S^{d-1}/\bar{E}_{d-1} = \dim S^{d-3}(\Delta)/\bar{E}_{d-3} = \dim S^{d-3}(\Delta) = d-2,$$

d'où $\dim \bar{E}_{d-1} = 2$. On en déduit $\dim J^{d-1}|_\Delta \leqq 2$ et comme ce système linéaire n'a pas de zéro sur Δ, on a en fait $\operatorname{deim} J^{d-1}|_\Delta = 2$; la proposition 2 est donc démontrée.

Il est maintenant facile d'évaluer l'espace tangent à $\mathscr{S}_{d,\lambda}$: en effet, d'aprés le paragraphe 0, c'est exactement $E_d = r^{-1}(\bar{E}_d)$. Or la dualité parfaite entre $S^{d-4}(\Delta)/\bar{E}_{d-4}$ et $S^d(\Delta)/\bar{E}_d$ donne, en utilisant $\dim \bar{E}_{d-4} = 0 : \dim \bar{E}_d = 4$. Or c'est aussi la dimension de $J^d|_\Delta$ car $J^d|_\Delta = J^{d-1}|_\Delta \cdot S^1(\Delta)$, et $J^{d-1}|_\Delta$ est un pinceau sans point base de degré supérieur à 2. Donc l'espace tangent à $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ est exactement $I_\Delta(d) + J^d$ [dans $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(d))$; l'espace tangent dans $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(d)))$ s'en déduit en quotientant par $\langle F \rangle$].

3. Preuve du théorème

On a prouvé dès maintenant que toute composante de $\mathscr{S}_d$ est de codimension $\geqq d-3$. De plus, si une composante de $\mathscr{S}_{d,\lambda}$ est de codimension $d-3$, en tout point S de cette composante, défini par le polynôme F, on a:

a) il existe Δ telle que $H^{2,0}(-\lambda)=I_\Delta(d-4)$, (en particulier Δ est uniquement déterminée par λ, et par la donnée de l'isomorphisme $H^{2,0}(S)\cong H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(d-4))$

b) $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F)|_\Delta)=2$

c) l'espace tangent à $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ en S est exactement $I_\Delta(d)+J^d/\langle F\rangle$.

On appellera M_λ cette composante ou plutôt, par commodité, son image réciproque dans $H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(d))\backslash\{0\}$ et $p: M_\lambda\to\operatorname{Grass}(2,4)$ définie en a), qui visiblement est de rang maximal, puisqu'elle commute avec l'action de $\mathbb{P}Gl(3)$. On note $M_{\lambda,\Delta}=p^{-1}(\Delta)$. Comme $\operatorname{codim} M_\lambda=d-3$ et $\dim\operatorname{Grass}(2,4)=4$, on a: $\operatorname{codim} M_{\lambda,\Delta}\leqq d+1$; enfin $T_S M_{\lambda,\Delta}\subset I_\Delta(d)+J^d$.

Maintenant, soit $G_\Delta\subset H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(d))\backslash\{0\}$, l'ensemble des polynômes F réguliers de degré d et tels que $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F)|_\Delta)=2$: d'après b) $M_{\lambda,\Delta}\subset G_\Delta$.

On a alors:

Proposition 3. *Si $F\in G_\Delta$ et $F|_\Delta\neq 0$, G_Δ est lisse en F, de codimension* $2(d-2)$.

Démonstration. il est facile de voir que G_Δ est définie partout par $2(d-2)$ équations (des petits déterminants), donc G_Δ est lisse de codimension $2(d-2)$ si ces équations ont des différentielles indépendantes.

Soient des coordonnées homogènes $(X_0,\ldots,X_3)$ sur $\mathbb{P}^3$, de sorte que Δ est définie par les équations $X_2=X_3=0$: pout tout polynôme P homogène de degré d, on écrit de façon unique: $P=P_0(X_0,X_1)+X_2P_2(X_0,X_1)+X_3P_3(X_0,X_1)+$(terme s'annulant à l'ordre $\geqq 2$ sur Δ); on identifiera P_0, P_2 et P_3 à leur restriction à Δ. Notant U l'ouvert de $H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(d))$ paramétrant les polynômes réguliers, et φ l'application: $\mathcal{O}_U^4\to H^0(\Delta,\mathcal{O}_\Delta(d-1))\otimes\mathcal{O}_U$, telle que: $\varphi_F(d/dX_i)=dF/dX_i|_\Delta$, G_Δ est définie par $\operatorname{rang}(\varphi)\leqq 2$: l'application $F\to\varphi_F\in\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^4,\ H^0(\Delta,\ \mathcal{O}_\Delta(d-1)))$ étant linéaire, en un point où $\operatorname{rang}(\varphi_F)=2$ l'espace tangent de Zariski à G_Δ est défini par:

$$T_FG_\Delta=\{R\in H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))\ /\ \operatorname{Im}(\varphi_{R|\operatorname{Ker}\varphi_F})\subset\operatorname{Im}\varphi_F\}.$$

Or, avec les notations définies plus haut, on a:

$$\varphi_F(d/dX_0)=dF_0/dX_0,\quad \varphi_F(d/dX_1)=dF_0/dX_1,$$
$$\varphi_F(d/dX_2)=F_2,\quad \varphi_F(d/dX_3)=F_3.$$

Si $F|_\Delta\neq 0$, c.est-à-dire $F_0\neq 0$, deux cas se présentent:

a) $\operatorname{rang}(dF_0/dX_0,dF_0/dX_1)=2$; alors $\operatorname{Ker}\varphi_F$ est engendré par:

$$d/dX_2-a_2d/dX_0-b_2d/dX_1 \quad\text{et}\quad d/dX_3-a_3d/dX_0-b_3d/dX_1$$
$$\text{et donc}\quad R\in T_FG_\Delta\Leftrightarrow$$

R satisfait les équations:

$$\left.\begin{aligned}&R_2-a_2dR_0/dX_0-b_2dR_0/dX_1\in\langle dF_0/dX_0,dF_0/dX_1\rangle\\ &R_3-a_3dR_0/dX_0-b_3dR_0/dX_1\in\langle dF_0/dX_0,dF_0/dX_1\rangle\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

il est clair que cela donne $2(d-2)$ conditions indépendantes sur R.

b) $\operatorname{rang}(dF_0/dX_0,dF_0/dX_1)=1$. En faisant un changement de variables approprié on peut supposer $F_0=X_0^d$, et le noyau de φ_F est engendré par d/dX_1 et par $d/dX_3-ad/dX_0-bd/dX_2$; donc T_FG_Δ est défini par les équations:

$$R\in T_FG_\Delta\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&dR_0/dX_1\in\langle X_0^4,F_2\rangle\\ &R_3-adR_0/dX_0-bR_2\in\langle X_0^4,F_2\rangle\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

Il est clair que dans ce cas également, ceci constitue un système de $2(d-2)$ équations indépendantes; d'où la proposition 3.

Dans le cas $d \geqq 6$, le théorème suit immédiatement, car $2(d-2) > d+1$, et donc la seule composante de G_Δ qui peut contenir $M_{\lambda,\Delta}$, est constituée des polynômes s'annulant sur Δ.

Si $d=5$, on ne peut pas conclure de la même façon, car $2(d-2)=d+1$. Mais du fait de cette égalité, et de l'inclusion $M_{\lambda,\Delta} \subset G_\Delta$, si $F \in M_{\lambda,\Delta}$, mais satisfait $F|_\Delta \neq 0$, on doit avoir $T_F G_\Delta = T_F M_{\lambda,\Delta} \subset I_\Delta(d) + J^d(F)$ (voir par. 2). Reprenons les systèmes d'équations (a) et (b).

Cas a. Si $R \in I_\Delta(d) + J^d(F)$ en particulier: $R_0 \in J^d(F)|_\Delta$, qui est différent de $S^d(\Delta)$; or il est clair que les équations (a) n'imposent pas de conditions sur R_0. On ne peut donc avoir

$$T_F G_\Delta \subset I_\Delta(d) + J^d(F).$$

Cas b. Si $R \in T_F G_\Delta$, R_0 doit satisfaire à la relation: $dR_0/dX_1 \in \langle X_0^4, F_2 \rangle$, et ceci doit entraîner: $R_0 \in J^d(F)|_\Delta$; choisissant un polynôme K_2 tel que $dK_2/dX_1 = F_2$, on doit avoir: $K_2 = A \cdot X_0^5 + B \cdot F_2$, où A et B sont des polynômes de degré 1 sur Δ; dérivant par rapport à X_1, on voit que F_2 satisfait une équation différentielle dépendant des paramètres A et B: comptant alors les dimensions, on voit que la sous-variété de G_Δ telle que b) soit satisfaite, ainsi que cette équation différentielle, est de codimension strictement supérieure à $d+1$, et ne peut donc contenir $M_{\lambda,\Delta}$. Donc, pour $d=5$, la seule composante de G_Δ qui peut contenir $M_{\lambda,\Delta}$ est constituée des polynômes F qui s'annulent sur Δ, et le théorème est démontré.

Remarque. Soit S une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^3$ de degré d, et soit $C \subset S$ une courbe dont la classe dans $H^2(S, \mathbb{Z})$ est un multiple rationnel de la classe d'une section hyperplane; cette dernière étant non divisible dans le $\mathbb{Z}$-module libre $H^2(S, \mathbb{Z})$, on doit en fait avoir: $c_1(\mathcal{O}_S(C)) = c_1(\mathcal{O}_S(k))$, avec $k > 0$, et la régularité de S entraîne alors que $\mathcal{O}_S(C)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_S(k)$. Comme S est projectivement normale, C est la trace sur S d'une surface de degré k dans $\mathbb{P}^3$. En particulier C est intersection complète dans $\mathbb{P}^3$.

Supposons que $d \geqq 7$: soit $U \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(d)))$, l'ouvert paramétrant les hypersurfaces irréductibles; soit $Y \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^{4*}$ le fibré projectif naturel de fibre $\mathbb{P}^3$ sur $\mathbb{P}^{4*}$. Soit $\mathcal{E} = R^0 pr_2 \mathcal{O}_Y(d)$ et soit $\tilde{\mathcal{S}}_d \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ la sous-variété $\bigcup_{H \in \mathbb{P}^{4*}} \mathcal{S}_d(H)$ le théorème entraîne que chaque composante de $\tilde{\mathcal{S}}_d$ est de codimension supérieure ou égale à $d-2$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, exceptée $\tilde{X} = \{(P, H),\ H \in \mathbb{P}^{4*},\ P \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_H(d))/\text{il existe une droite } \Delta \subset H, \text{ avec } P|_\Delta = 0\}$ qui est de codimension $d-3$. Soit $r: U \times \mathbb{P}^{4*} \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ l'application naturelle de restriction: r est dominante de fibre de dimension constante; $r^{-1}(\tilde{X})$ est de codimension $d-3$ mais sa projection sur U a des fibres de dimension positive: pour toute autre composante Y de $\tilde{\mathcal{S}}_d$, $r^{-1}(Y)$ est de codimension supérieure à $d-2 > 4$. Donc la projection sur U de $r^{-1}(\tilde{\mathcal{S}}_d)$ est une sous-variété propre de U. On a donc le corollaire suivant:

Corollaire. *Soit X une hypersurface de $\mathbb{P}^4$ de degré $d \geqq 7$ générale* i.e. *dans un ouvert complémentaire d'une réunion dénombrable de sous-ensembles algébriques de $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(d)))$: soit C une courbe contenue dans une section hyperplane lisse $X \cap H$ de X; alors il existe une surface $T \subset H$, telle que $C = X \cap T$.*

Bibliographie

1. Griffiths, P.: Periods of integrals on algebraic manifolds. II. Am. J. of Math. **90**, 804–864 (1968)
2. Griffiths, P.: On the periods of rational integrals. I, II. Ann. Math. **90**, 460–541 (1970)
3. Griffiths, P., Harris, J.: On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension-two cycles. Math. Ann. **271**, 31–51 (1985)
4. Griffiths, P., Harris, J.: Infinitesimal variations of Hodge structure. II. Compos. Math. **50**, 207–265 (1983)
5. Deligne, P.: Le théorème de Noether. SGA 7 exposé XIX
6. Carlson, J., Griffiths, P.: Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem. Journées de géométrie algébrique, pp. 51–76. Sijthoff-Nordhoff: Angers 1980
7. Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P., Harris, J.: Geometry of algebraic curves, Vol. 1. Berlin Heidelberg New York: Springer 1985
8. Donagi, R.: The generic Torelli theorem for projective hypersurfaces. Compos. Math. **50**, 325–353 (1983)
9. Clemens, C.H.: Curves on generic hypersurfaces. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. **19**, 629–636 (1986)

Reçu le 14 avril 1987

Note ajoutée à l'épreuve. Mark Green a motré indépendamment le même théorème avec les mêmes arguments; son texte est à paraitre dans J. Differ. Geom.