Université P & M. Curie
M. Bertrand

Master M1 de mathématiques 10-11
MM001- Algèbre géométrique

Examen du 14 Décembre 2010

Durée: 3 heures

L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.
Les 3 énoncés sont indépendants.

I

1^0/ Soit $\{ABM\}$ un repère affine d'un plan affine réel. On désigne par P le symétrique du point M par rapport à B, par G le point de la droite (AB) tel que $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AG}} = \frac{4}{3}$, et par M' le point d'intersection des droites (AP) et (MG).

Soient par ailleurs h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{4}{3}$, et g l'homothétie de centre P et de rapport 2. On pose $f = g \circ h$. Déterminer $f(G)$, montrer que f est une homothétie de centre M', et calculer $\frac{\overrightarrow{GM'}}{\overrightarrow{GM}}$.

2^0/ Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, et $\mathcal{T} = \{A_1A_2A_3A_4\}$ un tétraèdre (= un repère affine) de $\mathcal{E}$. Pour tout $i = 1, ..., 4$, on note B_i le centre de gravité du triangle formé par la face de $\mathcal{T}$ opposée au sommet A_i. Montrer que chacune des droites $(A_iB_i), i = 1, ..., 4$, passe par l'isobarycentre G de $\mathcal{T}$, et calculer $\frac{\overrightarrow{A_iB_i}}{\overrightarrow{A_iG}}$.

3^0/ On reprend les notations du 2^0/. Pour tout point M de $\mathcal{E}$ situé hors des droites $(A_iB_i), i = 1, ..., 4$, on désigne par P_i le symétrique de M par rapport à B_i. Montrer que les droites $(A_iP_i), i = 1, ..., 4$, concourent en un point M', image de M par une homothétie de $\mathcal{E}$ que l'on determinera.

II

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$, et $\mathbf{P}$ le plan projectif $\mathbf{P}(E)$. On considère une conique propre Γ de $\mathbf{P}$, et un triangle (ABC) circonscrit à Γ, autrement dit : la droite (AB) est tangente à Γ en un point C' de Γ, de même pour (BC) en A', (CA) en B'.

1^0/ i) Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et $\perp$ la relation d'orthogonalité relative à b. Montrer que si D, D' sont deux droites vectorielles distinctes d'un plan vectoriel H de E, alors $V = D^\perp \cap D'^\perp$ est une droite de E, et déterminer $V^\perp$.

ii) Soient M, M' deux points distincts de $\mathbf{P}$, et L (resp. L') la droite polaire de M (resp. M') relativement à Γ. Montrer que $L \cap L'$ est un point P dont la droite (MM') est la polaire relativement à Γ.

2^0/ Montrer que la droite (AA') est la polaire du point $P = (BC) \cap (B'C')$ relativement à Γ.

3^0/ i) On pose $Q = (AA') \cap (B'C')$. Montrer que les points (P, Q, B', C') forment une division harmonique sur la droite $(B'C')$. Par conséquent, la droite (AA') est également la polaire Δ de P par rapport aux droites $(AB'), (AC')$.

ii) Construire à la règle cette polaire Δ au moyen du quadrilatère $BCB'C'$ et du point A. En déduire que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

III

Soient V un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur un corps commutatif K, et $u \in \mathcal{L}(V, V)$ un endomorphisme de V. On rappelle que pour tout entier $p \in [1, n]$, il existe un unique endomorphisme $\wedge^p u$ de l'espace vectoriel $\wedge^p V$ tel que, pour tout $(v_1, ..., v_p) \in V \times ... \times V$ (p facteurs), on ait $(\wedge^p u)(v_1 \wedge ... \wedge v_p) = u(v_1) \wedge ... \wedge u(v_p)$.

1^0/ i) Soient $v_1, ..., v_p$ des vecteurs propres de u, linéairement indépendants sur K. Montrer que $v_1 \wedge ... \wedge v_p$ est un vecteur propre de $\wedge^p u$.

ii) On suppose que u est diagonalisable, et on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres (répétées en tenant compte des dimensions des sous-espaces propres). Montrer que pour tout $p \in [1, n]$, l'endomorphisme $\wedge^p u$ de $\wedge^p V$ est diagonalisable, et écrire la liste de ses valeurs propres (répétées avec la même convention).

2^0/ On suppose encore que u est diagonalisable. Déduire du 1^0/ que le polynôme caractéristique $P_u(T) = det(u - Tid_V)$ de u est donné par la formule

$$P_u(T) = (-1)^n T^n + \sum_{p=1,\ldots,n} (-1)^{n-p}\, Tr(\wedge^p u)\, T^{n-p}. \qquad (*)$$

(On rappelle que la trace $Tr(U)$ d'un endomorphisme U est la somme des éléments diagonaux de n'importe quelle matrice représentative de U.)

3^0/ On ne suppose plus u diagonalisable. En utilisant la relation $P_u(T) = \wedge^n(u - Tid_V)$, montrer que la formule $(*)$ reste encore valable.

Esquisse de corrigé

I. 1^0/ Comme $h(G) = B$ et $g(B) = M, f(G) = M$. Puisque $\frac{4}{3}\times 2 \neq 1$, f est une homothétie de rapport $\frac{8}{3}$, qui laisse globalement stables la droite (AP) et la droite (GM), donc de centre $(AP) \cap (GM) = M'$. Enfin, $\overrightarrow{M'M} = \frac{8}{3}\overrightarrow{M'G}$, donc $\frac{\overrightarrow{GM'}}{\overrightarrow{GM}} = -\frac{3}{5}$.

2^0/ Pour tout i, disons $i = 1$, $B_1 = \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{3}A_4$, donc $G = \frac{1}{4}A_1 + \frac{3}{4}B_1$, et G appartient à la droite (A_1B_1), avec $\frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{A_1G}} = \frac{4}{3}$. Idem pour $i = 2, 3, 4$.

3^0/ Pour chaque i, le point G vérifie l'hypothèse du 1^0/ relativement à A_iB_iM, donc le point M', image de M par l'homothétie F (indépendante de i) de $\mathcal{E}$ de centre G et de rapport $\frac{-3}{5}$, appartient à la droite A_iP_i, et les 4 droites passent par M'.

II. 1^0/ i) Par hypothèse $D + D' = H$. Comme b est non dégénérée, $(D+D')^\perp = D^\perp \cap D'^\perp$, qui est donc la droite $V = H^\perp$, d'orthogonal $V^\perp = H$. - ii) Soit b une forme bilinéaire symétrique associée à Γ. Comme Γ est propre, b est non dégénérée. Par définition, si $M = \mathbf{P}(D), M' = \mathbf{P}(D')$, leurs polaires relativement à Γ sont les droites projectives $L = \mathbf{P}(D^\perp), L' = \mathbf{P}(D'^\perp)$, dont l'intersection est le point $P = \mathbf{P}(V)$. La polaire de P est la droite $\mathbf{P}(V^\perp)$, où $V^\perp = H$ est le plan engendré par D et D', de sorte que $\mathbf{P}(H)$ est la droite projective engendrée par M et M'.

2^0/ Pour tout point M de Γ, la polaire de M est la tangente $T_M(\Gamma)$ à Γ en M. En particulier, la polaire de A' est la droite $L' = (BC)$. D'après le poly (ou en appliquant le 1^0/), la polaire de A est la droite $L = (B'C')$. Donc (AA') est la polaire de $P = L \cap L'$.

3^0/ i) Cela résulte de la Prop. III.2.2.ii du poly : $-1 = [B', C', P, Q]$ $(= [P, Q, B', C'])$. - ii) Soit R le point d'intersection des "diagonales" (BB') et $CC')$ du quadrilatère $BC'B'C$. D'après le Thm. II.2.6 du poly, (AR) est la polaire de P par rapport à $(AB'), (AC')$. Par conséquent, $(AR) = (AA')$ coïncident, et les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ concourent en R.

III. 1^0/ i) Si $u(v_i) = \lambda_i v_i, \wedge^p u(v_1 \wedge ... \wedge v_p) = \lambda_1 .... \lambda_p v_1 \wedge ... \wedge v_p$. - ii) Soit $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ une base de V formée de vecteurs propres, λ_i les valeurs propres correspondantes. Alors, $\{e_I, I \in S(p,n)\}$ est une base de $\wedge^p V$, formée, d'après i), de vecteurs propres de $\wedge^p u$, et la liste des valeurs propres de $\wedge^p u$ est donnée par $\{\lambda_I := \Pi_{i \in I}, \lambda_i, I \in S(p,n)\}$.

2^0/ $Tr(\wedge^p u) = \Sigma_{I \in S(p,n)} \lambda_I$, et $\Pi_{i=1,...,n}(T - \lambda_i) = T^n + \Sigma_{p=1,...,n}(-1)^p(\Sigma_{I \in S(p,n)} \Pi_{i \in I} \lambda_i) T^{n-p}$.

3^0/ Soient $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ une base de V, et pour tout $p \in [0, n]$, $\{e_I, I \in S(p,n)\}$ la base correspondante de $\wedge^p V$. Alors, $P_u(T)\, e_1 \wedge ... \wedge e_n = (\wedge^n(u - T id_V))(e_1 \wedge ... \wedge e_n) = (u(e_1) - Te_1) \wedge ... \wedge (u(e_n) - Te_n) = \Sigma_p \big(\Sigma_{I \in S(p,n)} \varepsilon_I (\wedge_{i \in I} u(e_i)) \wedge (\wedge_{j \in \overline{I}} e_j\big)(-T)^{n-p}$, où $\overline{I}$ est le complémentaire de I, et ε_I la signature de $\sigma_I : [1, ..., n] \mapsto [I, \overline{I}]$. Mais pour tout p, $\Sigma_{I \in S(p,n)} \varepsilon'_I (\wedge^p u)(e_I) \wedge e_{\overline{I}} = Tr(\wedge^p u)\, e_1 \wedge ... \wedge e_n$, où $\varepsilon'_I = \varepsilon_I$ est la signature de σ_I^{-1}.