Université P. & M. Curie
M. Bertrand

Master M1 de mathématiques 10-11
MM001- Algèbre géométrique

Partiel du 29 Octobre 2010

Durée: 3 heures

L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.
Les 3 énoncés sont indépendants.
On se place sur un corps commutatif K, de caractéristique nulle.

I

Soit a un élément de K. On considère dans l'espace affine K^3 les sous-ensembles D, D' définis respectivement par les équations

$$(D) : x - 2y - z - 2 = 0 \text{ et } 2x + y + z + 1 = 0$$

$$(D') : x - 3y - 1 = 0 \text{ et } 3x - 5y + a = 0.$$

1^0/ Montrer que D et D' sont des droites affines, et qu'elles ne sont pas parallèles.

2^0/ Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a, que l'on déterminera, telle que D et D' soient des droites coplanaires.

3^0/ On suppose que $a = a_0$.

i) Trouver une équation cartésienne du plan affine engendré par D et D'.

ii) Donner les coordonnées cartésiennes du point $D \cap D'$.

II

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur K, d'espace vectoriel directeur E, de dimension $n \geq 1$. On considère deux repères affines $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$ et $\mathcal{R}' = \{A'_0, A'_1, ..., A'_n\}$ de $\mathcal{E}$. Chaque repère permet d'identifier $\mathcal{E}$ à K^n. Pour tout point P de E, on note $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(P)$ $\big($resp. $\overrightarrow{x'} = \overrightarrow{x'}(P)\big)$ le vecteur colonne de K^n représentant P relativement à $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$); ainsi, $\overrightarrow{x}(A_0) = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{x'}(A'_0) = \overrightarrow{0}$.

1^0/ Soit $Q \in GL_n(K)$ la matrice de passage de la base $\{e_i = \overrightarrow{A_0A_i}\ ; i = 1, ..., n\}$ de E à sa base $\{e'_i = \overrightarrow{A'_0A'_i}\ ; i = 1, ..., n\}$, et soit $\overrightarrow{q} \in K^n$ le représentant du point A'_0 relativement au repère $\mathcal{R}$. Calculer $\overrightarrow{x}$ en fonction de $\overrightarrow{x'}, Q$ et $\overrightarrow{q}$.

2^0/ Soit f un endomorphisme affine de $\mathcal{E}$. Le premier repère permet de représenter f par une application de la forme $\overrightarrow{x} \mapsto U\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$, où $U \in Mat_{n,n}(K)$ représente l'application linéaire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{L}(E,E)$, et $\overrightarrow{v} \in K^n$. De même, f est représenté dans $\mathcal{R}'$ par une application de la forme $\overrightarrow{x'} \mapsto U'\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{v'}$.

i) Calculer U' en fonction de U et de la matrice de passage Q.

ii) Calculer $\overrightarrow{v'}$ en fonction de $\overrightarrow{v}, U, Q$ et $\overrightarrow{q}$.

3^0/ i) Montrer que $\overrightarrow{v'} = 0$ si et seulement si A_0' est fixé par f.

ii) On suppose que $n = 4$, que U est la matrice diagonale $diag(1,1,-1,-1)$ et que $\overrightarrow{v} = (0,a,b,0)$, où $(a,b) \in K^2$. Décrire en fonction de a et b l'ensemble $Fix(f)$ des points de $\mathcal{E}$ fixés par f.

III

On considère un plan projectif $\mathbf{P}$, où on dispose d'une règle pour tracer la droite passant par deux points distincts donnés. Soient $\{A,B,C,D\}$ un repère projectif de $\mathbf{P}$. Montrer qu'il existe une unique homographie $\phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ telle que

$$\phi(A) = A\ ,\ \phi(B) = B\ ,\ \phi(C) = D\ ,\ \phi(D) = C\ .$$

1^0/ i) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont globalement stables sous ϕ.

ii) Construire à la règle un point E de (AB) distincts de A et de B tel que $\phi(E) = E$.

iii) Montrer que tous les points de la droite (AB) sont fixés par ϕ.

2^0/ Soient Δ la droite joignant les points $(AD)\cap(BC)$ et $(AC)\cap(BD)$, et π_A (resp. π_B) la perspective de centre A (resp. B) de la droite (CD) vers la droite Δ.

i) Montrer que le point $I = (CD)\cap\Delta$ est fixé par ϕ.

ii) Soit $\phi|_{(CD)}$ la restriction de ϕ à la droite (CD). Montrer que $\pi_B^{-1}\circ\pi_A = \phi|_{(CD)}$.

3^0/ Soit P un point de $\mathbf{P}$ hors de la droite (AB). Construire à la règle le point $\phi(P)$. On traitera d'abord le cas où $P \in (CD)$, puis le cas général.

4^0/ On identifie $\mathbf{P}$ à $\mathbf{P}_2(K)$, muni du repère projectif $A = (1:0:0), B = (0:1:0), C = (0:0:1), D = (1:1:1)$.

i) Écrire une matrice $f \in GL_3(K)$ telle que $\phi = \mathbf{P}(f)$.

ii) Déterminer l'ensemble $Fix(\phi)$ des points de $\mathbf{P}_2(K)$ fixés par ϕ.

5^0/ Soient P un point de $\mathbf{P}$ hors de $Fix(\phi)\cup(AB)\cup(CD)$, $P' = \phi(P)$ son image par ϕ et δ la droite (PP').

i) Déterminer le point $\delta\cap(CD)$.

ii) Calculer le birapport des points $P, P', \delta\cap(CD), \delta\cap(AB)$ de la droite δ.

Corrigé

I.1^0/ Pour toute forme affine non constante $\ell(x,y,z) = \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$, notons $\lambda(x,y,z) = \alpha x+\beta y+\gamma z$ la partie linéaire de ℓ, et $L(x,y,z,t) = \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t$ l'homogénéisée de ℓ. Si ℓ_1, ℓ_2 désignent les équations données pour le sous-espace affine D (qui est bien non vide), son sous-espace vectoriel directeur $\overrightarrow{D}$ dans l'espace vectoriel K^3 est $Ker(\lambda_1) \cap Ker(\lambda_2)$. On vérifie que λ_1 et λ_2 sont linéairement indépendantes, donc $\overrightarrow{D}$ est une droite vectorielle, de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = {}^t(1,3,-5)$. Ainsi, D est bien une droite affine. De même, D' est non vide et admet pour sous-espace vectoriel directeur la droite $\overrightarrow{D'}$ engendrée par $\overrightarrow{v'} = {}^t(0,0,1)$. Comme $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont linéairement indépendants sur K, les droites vectorielles $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D'}$ sont distinctes, donc D et D' ne sont pas parallèles.

2^0/ Passons au projectivisé $\mathbf{P}(\hat{\mathcal{E}})$ de $\mathcal{E}$, où le projectivisé Δ de D est $\mathbf{P}(Ker(L_1)) \cap \mathbf{P}(Ker(L_2)) := \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$, et idem pour D'. Les droites D et D' sont coplanaires si et seulement si Δ et Δ' le sont, autrement dit si et seulement si les faisceaux de plans engendrés d'une part par $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$, d'autre part par $\mathbf{H}'_1$ et $\mathbf{H}'_2$ admettent un plan $\mathbf{H}$ commun. Comme les formes linéaires L_1 et L_2 (resp. L'_1 et L'_2) sont linéairement indépendantes, cela revient à demander que les 4 formes soient linéairement dépendantes. La condition $det(L_1, L_2, L'_1, L'_2) = 0$ équivaut, après calcul, à $a = a_0$, avec $a_0 = -2$.

3^0/ i) L'equation de $\mathbf{H}$ s'écrit $L = uL_1 + vL_2$, qui doit appartenir au sous-espace vectoriel engendré par L'_1 et L'_2. En particulier, le coefficient en z de L est nul, ce qui impose $(u:v) = (1:1)$. Le plan H engendré par D et D' admet donc pour équation affine $\ell = 0$, où $\ell = \ell_1 + \ell_2 = 3x - y - 1$ (qui vaut aussi $-3\ell'_1 + 2\ell'_2$, donc H contient bien D et D'). - ii) Les droites non parallèles D, D' du plan H se rencontrent au point $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$.

II.1^0/ En notant $\underline{e} := (e_1, ..., e_n)$ le "vecteur ligne" formé des vecteurs $e_1, ..., e_n$, on a formellement $\Sigma_i x_i e_i = \underline{e}.\overrightarrow{x}$ et de même avec $\underline{e}' := (e'_1, ..., e'_n)$. Par définition des vecteurs colonnes de la matrice de passage Q de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$, on a $\underline{e}' = \underline{e}.Q$, tandis que $\overrightarrow{A_0A'_0} = \underline{e}.\overrightarrow{q}$. Alors, $P = A_0 + \Sigma_i x_i \overrightarrow{A_0A_i} = A_0 + \underline{e}.\overrightarrow{x} = A'_0 + \underline{e}'.\overrightarrow{x'} = A_0 + \underline{e}.\overrightarrow{q} + \underline{e}.Q\overrightarrow{x'}$, d'où $\underline{e}.(\overrightarrow{x} - Q\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{q}) = \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{x} = Q.\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{q}$.

2^0/ i) On sait que $U' = Q^{-1}UQ$, ou on retrouve cette formule en écrivant, pour un élément $Z = \underline{e}.\overrightarrow{z} = \underline{e}'.\overrightarrow{z'} = \underline{e}.Q\overrightarrow{z'}$ de E, que $\underline{e}.(U\overrightarrow{z}) = \underline{e}'.(U'\overrightarrow{z'}) = \underline{e}.QU'\overrightarrow{z'} = \underline{e}.(QU'Q^{-1}\overrightarrow{z})$. - ii) $f(P) = A_0 + \overrightarrow{A_0 f(A_0)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0P}) = A_0 + \underline{e}.\overrightarrow{v} + \underline{e}.U\overrightarrow{x} = A'_0 + \underline{e}'.(\overrightarrow{v'} + U'\overrightarrow{x'})$, qui vaut $A_0 + \underline{e}.\overrightarrow{q} + \underline{e}.Q(\overrightarrow{v'} + U'\overrightarrow{x'})$. Comme $\overrightarrow{x} = Q.\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{q}$, on en déduit que $\overrightarrow{v} + U(Q.\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{q}) = \overrightarrow{q} + Q(\overrightarrow{v'} + U'\overrightarrow{x'})$, d'où, outre $UQ = QU'$, la relation $\overrightarrow{v'} = Q^{-1}\big(\overrightarrow{v} + (U - \mathbf{I}_n)\overrightarrow{q}\big)$. Une autre preuve consiste à passer au prolongement vectoriel $\hat{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. Les repères affines en deviennent des bases, et la matrice de passage entre ces bases s'écrit $\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q & \overrightarrow{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tandis que l'application linéaire induite par f est représentée par $\hat{U} = \begin{pmatrix} U & \overrightarrow{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{U}' = \begin{pmatrix} U' & \overrightarrow{v'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La relation $\hat{U}' = \hat{Q}^{-1}\hat{U}\hat{Q}$ redonne les formules précédentes.

3^0/ i) $f(A'_0) = A'_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v'} := \overrightarrow{A'_0 f(A'_0)} = \overrightarrow{0}$. - ii) $Fix(f)$ est donc l'ensemble des points $A_0 + \underline{e}.\overrightarrow{q}$, où $\overrightarrow{q} = {}^t(q_1, ..., q_4)$, tels que $(U - \mathbf{I}_4)(\overrightarrow{q}) = -\overrightarrow{v}$. Si $a \neq 0$, il est vide; sinon, q_1, q_2 sont arbitraires, $q_3 = \frac{b}{2}, q_4 = 0$, et $Fix(f)$ est le plan affine parallèle au plan $(A_0A_1A_2)$ passant par le point $A_0 + \frac{b}{2}\overrightarrow{A_0A_3}$.

III.1^0/ i) Une homographie transforme une droite en une droite, donc (AB) en $(\phi(A)\phi(B)) = (AB)$, qui est donc stable sous ϕ. Idem pour $(CD) = (DC)$. - ii) L'image du point $E = (AB) \cap (CD)$ appartient donc aux deux droites, donc $\phi(E) = E$. - iii) ϕ induit sur la droite (AB) une homographie qui fixe les 3 points distincts A, B, E, et est donc l'identité.

2^0/ i) Le point $(AD) \cap (BC)$ s'envoie sur le point $(AC) \cap (BD)$, et inversement; la droite Δ est donc stable sous ϕ, et son intersection I avec (CD) s'envoie sur $\Delta \cap (CD) = I$. - ii) Notons d'abord que $\pi_A, \pi_B : (CD) \to \Delta$ sont bien définies, ainsi que leurs inverses, car $A, B \notin \Delta$. Dans ces conditions, $\pi_B^{-1} \circ \pi_A$ est une homographie de (CD), qui envoie C sur D, D sur C, I sur I et E sur E, tout comme $\phi|_{(CD)}$. Donc ces deux homographies de (CD) coïncident. Le même raisonnement montre que $\pi_A^{-1} \circ \pi_B = \phi|_{(CD)}$, mais cela se déduit aussi du fait que $\phi^{-1} = \phi$ (ϕ^2 fixant un repère projectif, c'est l'identité sur $\mathbf{P}$).

3^0/ Pour un point $p \in (CD)$, le 2^o/ donne une construction à la règle de $\phi(p) = p'$. Soit maintenant $P \in \mathbf{P}$ hors de (CD). On sait construire le point p' image de $p = (AP) \cap (CD)$, et P' se trouve sur la droite (Ap'). Mais la relation $\pi_A^{-1} \circ \pi_B = \phi|_{(CD)}$ permet aussi de construire l'image q' de $q = (BP) \cap (CD)$, et P' se trouve sur la droite (Bq'). La relation $P' = (Ap') \cap (Bq')$ donne ainsi une construction à la règle de P'. Une autre construction se déduit du $5^o/i)$: la droite (PP') est stable sous ϕ (car $\phi^2 = id$), donc rencontre (CD) en un point fixe sous ϕ, et on verra que c'est I (plutôt que E). Ainsi, $P' = (Ap') \cap (PI)$.

4^0/ i) Les relations $\phi(A) = A, \phi(B) = B, \phi(C) = D$ imposent $f = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, et $\phi(D) = C$ conduit alors à $a = 1, b = 1, c = -1$. - ii) (X_0, X_1, X_2) est vecteur propre de f si et seulement si $X_2 = 0$ ou si $(X_0 : X_1 : X_2) = (1 : 1 : 2)$. Comme $X_2 = 0$ est l'équation de la droite (AB), et que $I \notin (AB)$, on en déduit à fois que $Fix(\phi) = (AB) \cup \{I\}$, et que I est repéré par $(1 : 1 : 2)$ (ce qu'on peut bien sûr montrer plus directement).

5^0/ i) Pour $P = (c_0 : c_1 : c_2)$, on a $P' = (c_0 - c_2 : c_1 - c_2 : -c_2)$, tandis que $I = (1 : 1 : 2)$. Les 3 vecteurs correspondants sont linéairement dépendants, donc $I \in \delta$, et $\delta \cap (CD) = I$. - ii) Avec les notations du 3^o/, ce birapport est égal à $[p, p', I, E]$ (considérer le faisceau de droites de centre A), qui vaut $[p', p, I, E]$ (invariance sous ϕ), qui vaut $[p, p', I, E]^{-1}$; il vaut donc -1.