Examen du 3 Juin 2010

La durée de l'examen est de **2 heures**. *Les calculatrices, téléphones portables et tous autres gadgets électroniques doivent être éteints et rangés hors d'atteinte. Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Le barême indiqué porte sur un total de* **75 points**.

Question de cours. (15 points)

1/ Énoncer le théorème de Rolle, en en donnant précisément les hypothèses et la conclusion.

2/ On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto f(x) = (x^2+1)\sin x$.

i) Calculer la dérivée de f.

ii) Montrer, de deux façons, que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$:

- a) soit en appliquant le théorème de Rolle sur $[0, \pi]$ à une fonction bien choisie.
- b) soit en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, \pi]$ à une fonction bien choisie.

Exercice I (15 points)

On considère les fonctions $f_1, ..., f_4$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ *qui s'annulent en* $x = 0$ et sont définies, pour $x \neq 0$, par :

$$f_1(x) = \frac{|x|}{x} \ , \ f_2(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x} \ , \ f_3(x) = \sin(\frac{1}{x}) \ , \ f_4(x) = x|x| \ .$$

Pour chacune des fonctions $f_i, i = 1, ..., 4$, donner, avec quelques mots de justification, les réponses aux questions suivantes :

1/ f_i est-elle continue en 0 ?

2/ f_i est-elle dérivable en 0 ?

3/ f_i admet-elle un développement limité d'ordre 2 en 0 ?

T.S.V.P.

Exercice II (20 points)

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \; + \; 2\; \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

1/ Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0, et tel que f soit définie sur $I \setminus \{0\}$.

2/ Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité $\hat{f}$ en 0, et que $\hat{f}$ admet en 0 un développement limité d'ordre 3, que l'on calculera.

3/ Soit α un nombre réel. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$F_\alpha(x) = \frac{\hat{f}(x)}{(1+x^2)^\alpha}.$$

4/ Soit (T) la tangente au graphe de F_α au point d'abscisse 0. Donner l'équation de (T).

5/ Discuter, suivant les valeurs de α, la position du graphe de F_α par rapport à (T) au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice III. (15 points)

On considère la fonction de deux variables f définie par

$$f(x,y) = \ln\Big(\arcsin(x) - \arcsin(y)\Big).$$

1/ Déterminer le domaine de définition de la fonction f. On le dessinera dans le plan $x0y$, en le hachurant.

2/ Calculer $c = f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

3/ Écrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, c\Big)$.

Exercice IV. (10 points)

1/ Trouver la solution générale sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{1+x^2} y = 0$.

2/ Trouver la solution générale sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{1+x^2}\, y = \cos(x) e^{\arctan(x)}.$$

Corrigé

QC 1/ Voir poly, §2.2.1, Théorème 17 (avec la convention, donnée plus haut, que $a < b$). - 2/ i) $f'(x) = (x^2+1)\cos(x)+2x\sin(x)$. ii) (a) La fonction f est continue sur $[0,\pi]$, dérivable sur $]0,\pi[$ (et même sur $[0,\pi]$, et même sur $\mathbf{R}$, mais peu importe), et on a $f(0) = f(\pi) = 0$. Elle vérifie donc sur $[0,\pi]$ les hypothèses du théorème de Rolle, qui entraîne l'existence d'un nombre $c \in]0,\pi[$ où sa dérivée s'annule. Ainsi c appartient à $[0,\pi]$ et vérifie $f'(c) = 0$, autrement dit, est solution de l'équation étudiée. (b) La fonction f' est continue sur $[0,\pi]$, et vérifie $f'(0) = 1 > 0, f'(\pi) = -(\pi^2+1) < 0$. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires (sous sa "première forme"), qui entraîne l'existence d'un nombre $c \in [0,\pi]$ tel que $f'(c) = 0$. (Et comme $f'(0) \neq 0, f'(\pi) \neq 0$, on peut même affirmer que $c \in]0,\pi[$.)

I • $\forall x > 0, f_1(x) = 1$, donc $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 1$, qui est différent de $f_1(0) = 0$. Donc f_1 n'est pas continue en 0, donc pas non plus dérivable, et admet encore moins un $d\ell_2$ en 0.
• Du $d\ell_3$ de la fonction $\exp(x)$ en 0, on déduit que : $f_2(x) = \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + x^2\epsilon(x)$, donc f_2 admet un $d\ell_2$ en 0.
• La suite $(x_n = 1/(2n\pi + \frac{\pi}{2}), n \geq 0)$ tend vers 0 et vérifie $f_3(x_n) = 1$ pour tout n, donc $\lim f_3(x_n) = 1$, qui est différent de $f_3(0) = 0$. Donc f_3 n'est pas continue en 0 (donc pas dérivable, et pas de $d\ell_2$ en 0).
• $\frac{f_4(x)-f_4(0)}{x-0} = |x|$ admet une limite (nulle) quand $x \to 0, x \neq 0$, donc f_4 est dérivable (et donc continue) en 0, de dérivée $f_4'(0) = 0$. Montrons que f_4 n'admet pas de $d\ell_2$ en 0. Sinon, et comme $f_4(0) = f_4'(0) = 0$, il existerait $c_2 \in \mathbf{R}$ tel que $f_4(x) - c_2x^2 = x^2\epsilon(x)$ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, d'où $|x| - c_2x = x\epsilon(x)$, ce qui impose à la fois $c_2 = 1$ et $c_2 = -1$. Contradiction.

II 1/ Le domaine de définition de $\ln(1+x)$ est $]-1,+\infty[$; le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $\frac{sin(x)}{x}$ reste strictement positif quand $x \neq 0$ est $]-\pi,\pi[$; et $-\pi < -1$. Donc $I =]-1,\pi[$.
2/ Avec la convention usuelle sur les fonctions $\epsilon(x)$, on a : $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\epsilon(x)$, et $\frac{\sin x}{x} = 1 - u(x)$ avec $u(x) = \frac{x^2}{3!} + x^3\epsilon(x))$, donc $\ln(\frac{\sin x}{x}) = -u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) + u^2(x)\epsilon(u(x)) = -\frac{1}{6}x^2 + x^3\epsilon(x)$. Donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 1$, et f admet un prolongement par continuité $\hat{f}$ en 0, où $\hat{f}(0) = 1$. De plus, $\hat{f}$ admet un $d\ell_3$ en 0, donné par $\hat{f}(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3 + x^3\epsilon(x)$.
3/ & 4/ $\left(1+x^2\right)^{-\alpha} = 1 - \alpha x^2 + x^3\epsilon(x)$, donc $F_\alpha(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3 + x^3\epsilon(x)\right)\left(1 - \alpha x^2 + x^3\epsilon(x)\right) = 1 - \frac{1}{2}x - \alpha x^2 + (\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4})x^3 + x^3\epsilon(x)$. - 4/ L'équation de (T) est donc $Y = 1 - \frac{1}{2}X$.
5/ $F_\alpha(x) - (1 - \frac{1}{2}x) = -\alpha x^2 + \frac{2\alpha-1}{4}x^3 + x^3\epsilon(x)$, donc le graphe de F_α est au-dessous (resp. au-dessus) de (T) si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$). Si $\alpha = 0$, la différence vaut $-\frac{1}{4}x^3\left(1 + \epsilon(x)\right)$, donc

le graphe traverse la tangente, en étant au-dessus (resp. au-dessous) pour $x < 0$ (resp. $x > 0$).

III 1/ Le domaine de définition de arcsin est $[-1, 1]$. Puisque arcsin est strictement croissante, $\arcsin(x) - \arcsin(y)$ est > 0 si et seulement si $x > y$. Donc le domaine de définition de f est la partie $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, -1 \leq y < x \leq 1\}$ du plan xOy. Elle est bordée par le triangle de sommets $(-1, -1), (1, -1), (1, 1)$.
2/ & 3/ $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}, \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, donc $f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \ln(\frac{\pi}{2})$. - 3/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\arcsin'(x)}{\arcsin(x)-\arcsin(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\arcsin(x)-\arcsin(y)}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\arcsin(x)-\arcsin(y)}$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{4}{\sqrt{3}\pi}$. L'équation du plan tangent au point $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \ln \frac{\pi}{2})$ est donc $Z - \ln \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}(X - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{4}{\sqrt{3}\pi}(Y + \frac{1}{2})$.

IV 1/ La solution générale de l'équation homogène $y' = \frac{1}{1+x^2}\, y$ vérifie $\big(\ln(y)\big)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2}$ qui est la dérivée de la fonction $\arctan(x)$, donc $y(x) = Ke^{\arctan(x)}$ pour une constante réelle K.
2/ Par variation de la constante, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(x) = K(x)e^{\arctan(x)}$. Alors, $y' - \frac{1}{1+x^2} y = K'(x)e^{\arctan(x)} = \cos(x)e^{\arctan(x)}$, soit $K'(x) = \cos(x)$, et $K(x) = \sin(x) + C$, pour une constante C. La solution générale de l'équation est donc $y(x) = sin(x)e^{\arctan(x)} + Ce^{\arctan(x)}$, où $C \in \mathbf{R}$.