Université Paris 6
LM 110 - Session de rattrapage/ Juin 2010

Examen de Mathématiques – Durée: 2 heures

Les calculatrices et documents sont interdits. La rédaction doit être concise et précise. Les réponses devront être justifiées.

Question de cours (15 points)
Enoncer le théorème des accroissements finis. En donner la démonstration en supposant connu le théorème de Rolle.

Exercice 1 (20 points)
a) Former le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = \ln(\cos x) + e^{x-x^3}.$$

b) Donner l'équation de la tangente au graphe Γ de f au point d'abscisse 0. Préciser la position de cette tangente par rapport à Γ.

Exercice 2 (15 points)
On considère la fonction réelle f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, 0[$ par:

$$f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

a) Calculer $f'(x)$ ($x \in I$).
b) Déterminer l'image J de I par f et montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur J.
c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer sa dérivée au point b défini par $b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$ (commencer par trouver $a \in I$ tel que $f(a) = b$).

Exercice 3 (15 points)
On considère la fonction de deux variables f définie par:

$$f(x,y) = \frac{\arctan(xy) + \arctan(\frac{1}{xy})}{\arctan(xy) - \frac{\pi}{2}}.$$

a) Quel est le domaine de définition de f?
b) Montrer que la fonction d'une variable $t \mapsto \phi(t) = \arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t})$ est constante sur $]0, +\infty[$, et donner la valeur de cette constante.
c) Calculer $c = f(1,1)$ et écrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $\big(1,1,c)$.

Exercice 4 (10 points)
a) Calculer la dérivée de la fonction

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right), \quad x \in]2, \infty[.$$

b) Trouver la solution générale sur l'intervalle $]2,\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{x(x-2)}y + 2(x-2)\ .$$

Corrigé

QC: voir poly, §2.2, Théorème 19.

I a) $\cos(x) = 1 - u(x)$, où $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x)$, donc $\ln(\cos x) = -u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) + u^2(x)\epsilon(u(x)) = -\frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x)$, tandis que $e^{x-x^3} = 1 + (x - x^3) + \frac{1}{2}(x - x^3)^2 + \frac{1}{6}(x - x^3)^3 + (x - x^3)^3\epsilon(x - x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$, d'où : $f(x) = 1 + x - \frac{5}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$. [NB : pour le 2e terme, on peut aussi écrire: $e^{x-x^3} = e^x e^{-x^3} = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)\right).(1 - x^3 + x^3\epsilon(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$.]
b) L'équation de la tangente T à Γ au point $(0,1)$ est donc $Y = 1 + X$. Comme $f(x) - (1 + x) = -\frac{5}{6}x^3(1 + \epsilon(x))$, le graphe traverse la tangente, en étant au-dessus de T pour $x < 0$, et au-dessous pour $x > 0$.

II a) $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\cos x(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} - 1)$.
b) Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, on a $\sqrt{1 + \sin x} < 1$, d'où $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur I, et établit une bijection de l'intervalle ouvert I sur un intervalle ouvert J, dont les extrémités sont données par $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \frac{1}{2}$ et par $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. Ainsi, l'image de f est $J =]\frac{1}{2}, 1[$, et f admet une application réciproque $f^{-1} : J \to I$.
c) Puisque $f'(x)$ est non nul pour tout $x \in I$, l'application f^{-1} est dérivable en tout point de J. Comme $-\frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$, on voit que $a = -\frac{\pi}{6}$ vérifie $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} = b$. Par conséquent, la dérivée de f^{-1} au point b, égale à $\frac{1}{f'(a)}$, vaut $\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2} - 1)\right)^{-1} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

III a) Comme arctan est défini sur tout $\mathbf{R}$ et n'atteint pas la valeur $\frac{\pi}{2}$, le domaine de définition $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, xy \neq 0\}$ de f est le plan xOy, privé de ses axes de coordonnées.
b) $\phi'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{t})^2} = 0$, donc ϕ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Cette constante vaut $\phi(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.
c) On a $f(1,1) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}} = -2$, et on déduit de (b) que pour $xy > 0$, on a $f(x,y) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\arctan(xy) - \frac{\pi}{2}}$. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{1+(xy)^2} \cdot \frac{-1}{(\arctan(xy) - \frac{\pi}{2})^2}$ au voisinage de $(1,1)$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1}{(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})^2} = -\frac{4}{\pi}$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{4}{\pi}$. L'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,-2)$ est donc $Z + 2 = -\frac{4}{\pi}(X - 1) - \frac{4}{\pi}(Y - 1)$.

IV a) $\varphi'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$.

b) La solution générale $y(x)$ de l'équation homogène vérifie $(\ln(y))' = \frac{y'}{y} = \frac{2}{x(x-2)} = \varphi'$, donc $y(x) = K\exp(\varphi(x)) = K \cdot \frac{x-2}{x}$, où K est une constante réelle. Par la méthode de variation des constantes, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(x) = K(x) \cdot \frac{x-2}{x}$, d'où $K'(x) \cdot \frac{x-2}{x} = 2(x-2)$, soit $K'(x) = 2x$, et $K(x) = x^2 + C$, où $C \in \mathbf{R}$. Ainsi, la solution générale de l'équation proposée est $y(x) = x(x-2) + C \cdot \frac{x-2}{x}$, où $C \in \mathbf{R}$.