FONCTIONS

UPMC - LM 110

2e semestre 2009-2010

Ce polycopié de LM110 “Fonctions” reprend, pour l’essentiel de sa présentation, les chapitres I à IV de celui qu’on trouvera en ligne sur le site

http ://www.edu.upmc.fr/maths/math1/

de l’Université. Il en diffère néanmoins par le choix des preuves développées, et l’accent mis sur certaines définitions, exemples et contre-exemples.

On recommande aux étudiants d’utiliser ce texte en accompagnement de leurs notes de cours, et de ne se reporter au poly en ligne que quand un point reste obscur. La meilleure solution dans ce cas reste bien entendu de consulter les enseignants.

L’examen final comporte une question de cours, choisie dans la liste suivante.

1. Démontrer que, s’il existe, le développement limité d’ordre n d’une fonction en un point est unique. (§1.5.1, Théorème 10.)

2. Donner le développement limité à l’ordre n en 0 de la fonction $(1+x)^\alpha$ pour α réel. Établir cette formule. (§1.5.3, Exemple 4.)

3. Montrer qu’une fonction dérivable qui présente un extremum en un point intérieur de son intervalle de définition y a une dérivée nulle (“condition nécessaire pour un extremum local”). (§2.2.1, Théorème 17.)

4. Énoncer le théorème de Rolle. Le déduire de la condition nécessaire pour un extremum local, en admettant que l’image d’un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné. (§2.2.1, Théorème 18.)

5. Énoncer le théorème des accroissements finis, et le déduire du théorème de Rolle. (§2.2.1, Théorème 19.)

6. Énoncer la condition pour que la fonction réciproque soit dérivable et démontrer ce résultat (la continuité de la fonction réciproque est admise). (§2.3.3, Théorème 21, point 4.)

7. Donner la définition, calculer la dérivée et dessiner le graphe de la fonction arcsinus. (§2.3.3, Exemple 2.)

Pour les annales d’examen des années précédentes, voir le site ci-dessus.

Table des matières

Chapitre 1

Etude locale

1.1 Généralités sur les fonctions numériques

1.1.1 Domaine de définition, graphe

Soient X et Y deux ensembles. Une application $f : X \to Y$ est une loi qui, à tout élément x de X, associe un élément, noté $f(x)$, de Y. On dit que X est le *domaine de définition* (ou : la source) de l'application f. Le sous-ensemble $\{f(x); x \in X\}$ de Y s'appelle l'*image de* f, et est noté $f(X)$. Lorsque X est une partie de $\mathbb{R}$, et que $Y = \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction numérique, ou une fonction réelle d'une variable réelle. On note alors souvent $X = D$, ou D_f le domaine de définition de f. On résume ces données en posant

$$f : D \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto f(x)$$

Il est très important, quand on considère une fonction, de bien préciser son domaine de définition. Dans la pratique, ce sera un intervalle, ou une réunion d'intervalles, de $\mathbb{R}$.

Beaucoup de propriétés d'une fonction f peuvent se voir sur son *graphe* :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)); \quad x \in D\} \subset D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, le graphe de f est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que x soit un élément de D et $y = f(x)$. Ce graphe rencontre la droite verticale d'équation $X = x_0$ en exactement un point si $x_0 \in D$, et en aucun point si $x_0 \notin D$. Ainsi, *un graphe rencontre une droite verticale en plus au plus un point*; en revanche, une droite horizontale, d'équation $Y = y_0$, peut rencontrer le graphe en plusieurs points : autant que l'équation $f(x) = y_0$ a de solutions en $x \in D$.

Il convient de bien distinguer les objets suivants : la fonction f (application), le nombre réel $f(x)$ et le graphe $\mathcal{C}_f$ (partie de $\mathbb{R}^2$). Parler de la fonction $f(x) = \ell n(1-x)$ est un abus de langage, qui signifie : on regarde la plus grande partie $D = D_f$ de $\mathbb{R}$ où f est interprétable naturellement (ici : $D =]-\infty, 1[$), et on considère la fonction $f : D \to \mathbb{R} \ : x \mapsto f(x) := \ell n(1-x)$.

[NB : le signe $A := B$ signifie que A est défini par B : par exemple, $a^2 := a \times a$. En revanche, le signe $=$ représente en général un énoncé mathématique : par exemple, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.]

1.1.2 Méthodes de définition

Dès que l'on connait quelques fonctions, on peut en construire de (nombreuses) nouvelles en utilisant les procédés suivants :

Les opérations algébriques : si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle I ,

$*$ la fonction $f+g$ est définie sur l'intervalle I par

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$

$*$ la fonction fg est définie sur l'intervalle I par

$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

$*$ si la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction f/g est définie sur l'intervalle I par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La composition : soit f une fonction définie sur l'intervalle I et g une fonction définie sur l'intervalle J. On suppose en outre que l'image $f(I)$ de l'intervalle I par la fonction f est contenue dans J. La fonction *composée* des fonctions f et g est la fonction $g \circ f$ définie sur l'intervalle I par

$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

La restriction : soit f une fonction définie sur l'intervalle I et soit J un intervalle contenu dans I. On appelle restriction de f à J et on note $f|_J$ la fonction définie sur J par $x \mapsto f|_J(x) := f(x)$. Autrement dit, les fonctions f et $f|_J$ prennent la même valeur en chaque point de l'intervalle J mais la fonction $f|_J$ n'est définie que sur cet intervalle alors que la fonction f est aussi définie aux points de I qui ne sont pas dans J. Ce ne sont donc pas les mêmes fonctions (si $J \subsetneq I$).

Le recollement : on définit une nouvelle fonction "par morceaux" c'est-à-dire par une formule dépendant du sous-intervalle dans lequel se trouve la variable. Par exemple, on peut définir une fonction en "deux morceaux" : à partir d'une fonction f_1 définie sur l'intervalle $[a, c[$ et d'une fonction f_2 définie sur l'intervalle $[c, b]$, on obtient une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$f(x) := f_1(x) \quad \text{si} \quad a \leq x < c, \quad f(x) := f_2(x) \quad \text{si} \quad c \leq x \leq b.$$

1.1.3 Majorations

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :*
$*$ f est majorée (par M) sur I s'il existe un nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout nombre réel x de I. Ou encore, en notation mathématique :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M.$$

$*$ f est minorée (par m) sur I si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$.
$*$ f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I, c-à-d. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

Exemples :
1. Les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$ car majorées par 1 et minorées par -1.
2. La fonction exponentielle est minorée par 0 mais non majorée sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction logarithme n'est ni majorée ni minorée sur $]0, \infty[$.

Définition 2 *Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On dit que g majore f, ou que f minore g, si l'on a $f(x) \leq g(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle I. On écrira alors $f \leq g$.*

Exemple 1. Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction $x \to x-1$ majore la fonction logarithme.
Exemple 2. Sur l'intervalle $[0,+\infty[$ la fonction $x \to \sin(x)$ est majorée par la fonction $x \to x$.

1.1.4 Fonctions monotones

Définition 3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est*
$*$ *croissante (resp. décroissante) sur I si :*

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad (x_1 \leq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2))$$

$$(\textit{resp.} \quad \forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad (x_1 \leq x_2 \implies \quad f(x_1) \geq f(x_2)))$$

$*$ *strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si :*

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad (x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2))$$

$$(\textit{resp.} \quad \forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad (x_1 < x_2 \implies \quad f(x_1) > f(x_2)))$$

$*$ *monotone (resp. strictement monotone) sur I si f est croissante ou décroissante sur I (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur I).*

Remarque. Etudier les variations d'une fonction c'est partager son ensemble de définition en intervalles tels que, sur chacun d'eux, la fonction soit monotone.
Exemples
1. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0,\infty[$.
3. Les fonctions puissances $x \to x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$ sont
   $*$ strictement croissantes si n est impair,
   $*$ si n est pair : strictement décroissantes (resp. croissantes) sur $]-\infty,0]$ (resp. sur $[0,+\infty[$).

[NB : "resp." se lit : respectivement, et permet de regrouper deux énoncés sous une seule phrase.]

1.1.5 Fonctions paires et impaires, fonctions périodiques

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*
$*$ *On dit que f est paire si, pour tout réel x, on a $f(-x) = f(x)$.*
$*$ *On dit que f est impaire si, pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$.*

Remarques.
1. Si f est impaire alors $f(0) = 0$.
2. Si f est paire (resp. impaire), alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe $0y$ (resp. par rapport à l'origine).

Les propriétés de parité permettent donc de réduire l'étude de la fonction à l'intervalle $[0,\infty[$: on trace alors la partie du graphe correspondante et on complète par la symétrie convenable.

Définition 5 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un nombre réel non nul. On dit que T est une période de f (ou que f est T-périodique) si, pour tout nombre réel x, on a $f(x+T) = f(x)$.*

Par exemple, les fonctions *cos* et *sin* sont 2π-périodiques. En tout point x de son domaine de définition $D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}[$, la fonction *tan* vérifie : $\tan(x+\pi) = \tan(x)$.

1.2 Fonctions continues

1.2.1 Continuité en un point : Définition

Un rappel sur les suites numériques tout d'abord. Soit $(x_n \ ; n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels, et ℓ un nombre réel. On dit que la suite (x_n) converge vers ℓ, ou qu'elle admet ℓ pour limite, si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N \Longrightarrow |x_n - \ell| < \epsilon,$$

c-à-d. si, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant en général de ϵ) tel que pour tout entier $n > N$, on ait $|x_n - \ell| < \epsilon$. On vérifie aisément que si (x_n) admet un second nombre réel ℓ' pour limite, alors $\ell' = \ell$. On peut donc parler de *la* limite de cette suite, et on écrit : $\ell = lim(x_n)$.

Définition 6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un point de I. On dit que f est continue en a si, pour* **toute** *suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

De façon imprécise, on peut dire qu'une fonction est continue en un point a de son domaine de définition si, lorsque la variable x "s'approche" de a, la valeur $f(x)$ de la fonction "s'approche" (pas forcément à la même vitesse) de $f(a)$. On peut alors dessiner le graphe de f dans un voisinage de a dans I "sans lever le crayon".

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue au point $a = 0$. La fonction $E : x \mapsto [x] :=$ partie entière de x ($=$ plus grand entier $\leq x$) est continue au point $a' = \frac{1}{2}$, mais pas au point $a = 2$. En effet, la suite $(x_n = 2 - \frac{1}{n}; n \geq 1)$ converge vers $a = 2$ et vérifie $E(x_n) = 1$ pour tout $n > 1$, donc $limE(x_n) = 1$, qui n'est pas égal à $E(a) = 2$.

Voici le sens exact de l'expression *un voisinage de a dans I* : c'est une partie $\mathcal{V}_a$ de I telle qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ pour lequel $]a - \delta, a + \delta[\cap I$ soit contenu dans $\mathcal{V}_a$. Pour étudier la continuité de f en a, il suffit d'étudier celle de sa restriction $f|_{\mathcal{V}_a}$ à un tel voisinage.

1.2.2 Propriétés algébriques et composition

Théorème 1 *(continuité en un point et opérations algébriques). Soit f et g des fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point de I. Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f+g$ et fg sont définies sur I et continues en a. Si $g(a) \neq 0$, et si g est continue en a, la fonction $1/g$ est définie sur un voisinage de a dans I et est continue en a.*

Preuve. Montrons par l'absurde que si $g(a) \neq 0$, il existe un voisinage de a dans I où g ne s'annule pas. S'il n'en était pas ainsi, il existerait, pour tout entier $n > 0$, un point x_n de l'intervalle $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\cap I$ tel que $g(x_n) = 0$. Alors, la suite (x_n) tendrait vers a, donc la suite $(g(x_n))$ tendrait vers $g(a)$ par continuité de g en a. Or la suite $(g(x_n))$ est identiquement nulle, donc tend vers 0. Mais $g(a) \neq 0$ par hypothèse : c'est la contradiction recherchée. Les autres énoncés se déduisent facilement des résultats sur les limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.

Théorème 2 *(continuité des fonctions composées) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur un intervalle J qui contient $f(I)$. Si f est continue en un point a de I et si g est continue au point $f(a)$ (qui appartient à J par hypothèse), alors la fonction composée $g \circ f$ est définie sur l'intervalle I et continue en a.*

Preuve. Les hypothèses sont destinées à assurer que la fonction composée $g \circ f$ est bien définie. La continuité elle-même est une conséquence immédiate de la définition.

Théorème 3 *(continuité des fonctions usuelles)*

Les fonctions usuelles : $x \to x$*, la fonction logarithme* ℓn*, la fonction exponentielle* $\exp$*, les fonctions trigonométriques* $\sin, \cos, \tan$ *sont continues en tout point où elles sont définies.*

Par conséquent

– Les fonctions polynômes $x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ (où n est un entier naturel et où les a_i sont des nombres réels) sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

– Les fractions rationnelles $x \to P(x)/Q(x)$ (où P et Q sont des polynômes et Q n'est pas identiquement nul) sont continues en tout point où le polynôme Q ne s'annule pas.

– soit α un nombre réel. La fonction puissance α-ième : $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie par la formule

$$x^\alpha := \exp(\alpha \, \ell n \, x)$$

sur son domaine de définition $D =]0, +\infty[$. Les propriétés des fonctions composées montrent qu'elle est continue en tout point a de D . NB : si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, la formule précédente redonne la fonction usuelle x^n, dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n < 0$. Pour $\alpha = \frac{1}{n}$ (avec n entier > 0) et $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine n-ième $\sqrt[n]{x} > 0$ de x.

1.3 Limites

De nouveau, quelques rappels sur les suites numériques. On dit qu'une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ tend vers $+\infty$, ou qu'elle admet $+\infty$ comme limite, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N = N(A) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N \Longrightarrow x_n > A.$$

On écrit alors $\lim(x_n) = +\infty$. Définition similaire avec $-\infty$. L'ensemble des limites possibles de suites numériques est donc formé de tous les nombres réels $\ell \in \mathbb{R}$ (on parle alors de limite finie), et des symboles $+\infty, -\infty$. On pose :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\};$$

On notera que $\overline{\mathbb{R}}$ est aussi l'ensemble des "extrémités" des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ est *convergente* si elle admet une limite **finie**. Dans tous les autres cas, on dit qu'elle est divergente. Si $lim(x_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$), on dit parfois qu'elle diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

1.3.1 Limite en un point : Définition.

Définition 7 *Soit* D *une partie de* $\mathbb{R}$ *et soit* a *un point de* $\overline{\mathbb{R}}$ *. On dit que le point* a *est adhérent à* D *s'il existe une suite* $(x_n; n \in \mathbb{N})$ *de points de* D *qui tend vers* a*.*

Exemples.

$*$ tout point a de D est adhérent à D (considérer la suite constante $x_n = a$)..

$*$ Soient $a < b$ deux nombres réels. Alors, a est adhérent à l'intervalle $]a, b[$ (considérer la suite $(x_n = a + (b - a)/n \ , \ n > 1)$.)

* $+\infty$ est adhérent à l'intervalle $]b, \infty[$. (considérer la suite $x_n = n$).

Définition 8 *Soit* f *une fonction définie sur* D *et soit* a *un point adhérent à* D*. On dit que la fonction* f *a une limite quand* x *tend vers* a *s'il existe un élément* λ *de* $\overline{\mathbb{R}}$ *tel que pour* **toute** *suite* (x_n) *d'éléments de* D *qui tend vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *tend vers* λ *.*

Notation et terminologie. Le point λ de $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi défini est alors unique. On dit que λ est la limite de f quand x tend vers a et on écrit :

$$\lambda = \lim_{x\to a} f(x), \text{ ou encore : } \lambda = \lim_{x\in D, x\to a} f(x)$$

Exemples

* Les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ admettent toutes deux $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour domaine de définition, dont $a = 0$ est un point adhérent. La fonction f n'admet pas de limite quand x tend vers 0 ; la fonction g admet $+\infty$ pour limite quand x tend vers 0.

* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

* $\lim_{x\to 0} \ell n(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \ell n(x) = +\infty$

* la fonction sin n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$

* la fonction tan n'admet pas de limite quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

* la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \tan(x)$ admet $+\infty$ pour limite qd x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

* la fonction $f :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \tan(x)$ admet $-\infty$ pour limite qd x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Proposition 1 *Soit f une fonction définie sur D et soit a* **un point de** *D. La fonction f a une limite* **finie** *$\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si et seulement si elle est continue au point a ; dans ce cas, on a : $\ell = f(a)$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des Définitions 1 et 8.

1.3.2 Opérations algébriques et composition

Les théorèmes sur les limites de suites entraînent les théorèmes 4, 5, 6 suivants :

Théorème 4 *(limites finies et opérations algébriques). Soit f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point adhérent à I. On suppose que les fonctions f et g ont des limites finies respectives l et m en a. Alors :*

$*$ *la fonction $f + g$ a une limite égale à $l + m$ en a,*

$*$ *la fonction fg a une limite égale à lm en a,*

$*$ *si la limite m n'est pas nulle, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la fonction f/g soit définie sur l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[\cap I$ et la fonction f/g a une limite égale à l/m en a.*

Ce théorème s'étend dans certains des cas où l'une, au moins, des limites l ou m est infinie.

Théorème 5 *(limites infinies et opérations algébriques). Soit f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point adhérent à I. Si les fonctions f et g ont des limites respectives $+\infty$ et m en a. Alors :*

$*$ *Si $m \neq -\infty$, la fonction $f + g$ a une limite égale à $+\infty$ en a,*

$*$ *Si $m > 0$ ou ou si $m = +\infty$, la fonction fg a une limite égale à $+\infty$ en a,*

$*$ *Si $m < 0$ ou si $m = -\infty$, la fonction fg a une limite égale à $-\infty$ en a,*

$*$ *Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la fonction $1/f$ soit définie sur l'intervalle $]a-\delta, a+\delta[\cap I$ et la fonction $1/f$ a une limite égale à 0 en a.*

Les cas où on ne peut pas conlure en utilisant ce théorème sont dits indéterminés. Ce sont les suivants : $\infty - \infty$,$\infty \times 0$, $0/0$ et ∞/∞. La suite du chapitre présente les principales techniques qui permettent dans ce cas de dire s'il y a une limite, et de la calculer. On dit alors que l'on a "levé l'indétermination".

Théorème 6 *(limite d'une fonction composée). Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit g une fonction définie sur un intervalle J qui contient $f(I)$ et soit a un point adhérent à I.*

- Si la fonction f a une limite l en a, alors le point l est adhérent à J.

- Si, de plus, la fonction g a une limite m en l, alors la fonction $g \circ f$ a une limite égale à m en a.

1.3.3 Limites à gauche et à droite

Dans le but, en particulier, d'étudier la continuité des fonctions définies par recollement, on introduit la notion de limite à gauche et à droite.

Définition 9 *(limite à gauche). Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a un nombre réel adhérent à D, et f une fonction définie sur D. On dit que la fonction f a une limite à gauche quand x tend vers a si :*

(i) a est adhérent à $D \cap]-\infty, a[$; c'est le cas, par exemple, si $D = [b, a]$, ou $D = [b, a[$, avec $b < a$.

(ii) la restriction g de la fonction f à $D \cap]-\infty, a[$ a une limite λ quand x tend vers a.
On note alors

$$\lambda = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

On laisse au lecteur le soin de définir la notion de *limite à droite* de f en a ; notation (quand elle existe) : $\lambda = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Exemples
$*$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
$*$ pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, on a : $lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ (applique le théorème 6).

Proposition 2 *Soit f une fonction définie sur $D =]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. La fonction f a une limite quand x tend vers a si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite et si ces limites sont égales. On a alors :*

$$lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a^-} f(x) = lim_{x \to a^+} f(x).$$

Ceci permet de relier la continuité d'une fonction à l'existence de limites à gauche et à droite :

Théorème 7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un point de I. La fonction f est continue au point a si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite en ce point et si on a :*

$$f(a) = lim_{x \to a^-} f(x) = lim_{x \to a^+} f(x).$$

Prolongement par continuité.

Le théorème 7 est particulièrement utile dans la situation suivante, proche du recollement introduit au §1.1.3. On part de deux fonctions f_1, définie sur l'intervalle $[a, c[$, et f_2, cette fois seulement définie sur l'intervalle $]c, b]$. On suppose que $\lim_{x \to c^-} f_1(x) = \lim_{x \to c^+} f_2(x)$, et que cette limite commune est *finie*. Notons-la ℓ. Alors, il existe une unique fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue en c, et dont la restriction à $[a, c[$ (resp.$]c, b]$) coïncide avec f_1 (resp. f_2). Elle est définie par

$$f(x) := f_1(x) \quad \text{si} \quad a \leq x < c, \quad f(c) := \ell \;\;, \;\; f(x) := f_2(x) \quad \text{si} \quad c < x \leq b.$$

On dit que f se déduit de $\{f_1, f_2\}$ par prolongement par continuité et recollement.

Plus simplement, partons d'une fonction $f_0 : [a, c[\cup]c, b] \to \mathbb{R}$, telle que $\lim_{x\to c^-} f_0(x) = \lim_{x\to c^+} f_0(x)$, et supposons que cette limite commune, soit ℓ, est finie. Alors, il existe une unique fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue en c, et dont la restriction à $[a, c[\cup]c, b]$ coïncide avec f_0 (poser $f(c) = \ell$). On dit que f est *le prolongement par continuité* de f_0 au point c.

1.4 Dérivabilité

1.4.1 Définition

Définition 10 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) et soit a un point de I. On dit que la fonction f est dérivable en a si la fonction $\tau = \tau_f$, définie sur le domaine $D = I \setminus \{a\}$ par :*

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

a une limite **finie** *en a. Dans ces conditions, la limite de la fonction τ en a s'appelle dérivée de la fonction f en a et se note $f'(a)$.*

(Pour l'interprétation graphique de cette notion, voir le §1.5.4.) On peut présenter cette définition sous une forme différente :

Définition 11 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) et soit a un point de I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe deux réels A et B tels que :*

$$f(x) = A + B(x - a) + (x - a)\epsilon(x - a)$$

où ϵ est une fonction continue et nulle en 0. On a alors $A = f(a)$ et $B = f'(a)$.

L'équivalence entre les deux définitions précédentes et les égalités $A = f(a)$ et $B = f'(a)$ se démontrent immédiatement si on définit la fonction ϵ comme le prolongement par continuité en 0 de la fonction

$$x \to \tau(x + a) - f'(a).$$

(Si $I = [b, c]$, cette fonction est définie sur $[b - a, 0[\cup]0, c - a]$.) On en déduit :

Proposition 3 *Si la fonction f est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple la fonction $x \to |x|$ est **continue** en 0 mais n'est **pas dérivable** en ce point.

Dérivée à droite, à gauche :

Si la fonction τ_f admet seulement une limite à droite en a (ce qui, rappelons-le, impose que a soit adhérent à $I\cap]a, +\infty[$), et si cette limite ℓ est finie, on dit que f est dérivable à droite ; le nombre $\ell := f'_d(a)$ s'appelle alors la dérivée à droite de f en a. Définition similaire pour la dérivée à gauche $f'_g(a)$, si elle existe.

Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0, et $f'_d(x) = 1, f'_g(x) = -1$. La fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est dérivable ni à gauche ni à droite en 0, car $\lim_{x\to 0^+} \tau_f(x) = +\infty, \lim_{x\to 0^-} \tau_f(x) = -\infty$.

Proposition 4 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]b, c[$ de $\mathbb{R}$, et soit a un point de $]b, c[$. On suppose que f est dérivable à droite et à gauche en a, et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. Alors, f est dérivable en a, de dérivée $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Preuve : appliquer la Proposition 2 du §1.3 à la fonction τ_f.

1.4.2 Fonctions de type ϵ

La définition 11 fait apparaître une notion (et une notation) qui sera utilisée de façon constante dans la suite du cours. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ contenant le point 0. On dit qu'une fonction f, définie sur D, est une fonction (de type) ϵ en 0 si $\lim_{x\in D, x\to 0} f(x) = 0$, c-à- d. si f est continue en 0 et s'annule en 0. On représente ces propriétés en écrivant

$$f(x) = \epsilon(x).$$

Autrement dit, le symbole $\epsilon(x)$ représente **n'importe quelle** fonction f continue en 0, et nulle en 0. Plus généralement, pour tout nombre réel a, le symbole $\epsilon(x-a)$ représente n'importe quelle fonction f continue en a, et telle que $f(a) = 0$.

Par exemple, $|x| = \epsilon(x)$, $\exp(x) - 1 = \epsilon(x)$, $\ell n(x) = \epsilon(x-1)$.

Si deux fonctions f, g définies sur D sont de type ϵ en 0, $f+g$ et fg le sont aussi, ce qui justifie les relations symboliques : $\epsilon(x) + \epsilon(x) = \epsilon(x)$, $\big(\epsilon(x)\big)^2 = \epsilon(x)$. Si $f(x) = \epsilon(x)$ et si g est une fonction *bornée* au voisinage de 0, on a encore : $(fg)(x) = \epsilon(x)$.

Une relation du type $f(x) = \epsilon(x-a)$ ne donne de renseignement sur f qu'au voisinage de a. En particulier, pour $a \neq b$, une expression de la forme $\epsilon(x-a) + \epsilon(x-b)$ n'a aucun sens (ou plus précisément : ne donne aucun renseignement).

Soit enfin $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue en un point a de D, telle que $u(a) = 0$. Pour toute fonction f de type ϵ en 0, la fonction $f \circ u$ est continue en a et s'annule en a. Autrement dit : $(f \circ u)(x) = \epsilon(x-a)$, et on peut écrire sans ambiguité : $\epsilon(u(x)) = \epsilon(x-a)$. En particulier

$$\epsilon(\epsilon(x-a)) = \epsilon(x-a).$$

1.4.3 Opérations algébriques et composition

Théorème 8 *(dérivabilité en un point et opérations algébriques). Soit f et g des fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point de I. Si f et g sont dérivables en a, alors les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables en a et on a :*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si $g(a) \neq 0$, et si g est dérivable en a, la fonction $1/g$ est définie sur un voisinage de a dans I, est dérivable en a et l'on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Preuve Vérifions la dernier énoncé. Puisque g est dérivable en a, elle est continue en a, et le théorème 1 montre que $\frac{1}{g}$ est définie sur un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a dans I. Puisque g et dérivable en a, la fonction $\tau_g(x)$ admet $g'(a)$ pour limite en a. Or $\tau_{\frac{1}{g}}(x) = \frac{(1/g)(x)-(1/g)(a)}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\tau_g(x)$, donc $\tau_{\frac{1}{g}}$ admet une limite finie en a, égale à $-\frac{g'(a)}{g(a)^2}$. On conclut par la Définition 10.

Voici une autre preuve, qui permettra de se familiariser avec le maniement des fonctions ϵ. On a : $g(x) = A + B(x-a) + (x-a)\epsilon(x-a)$, avec $A = g(a) \neq 0, B = g'(a)$, d'où, pour $x \in \mathcal{V}_a$:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{A} \times \frac{1}{1 + \big(B/A + \epsilon(x-a)\big)(x-a)}.$$

Or $(1+u)(1-u) = 1-u^2$, donc $\frac{1}{1+u} = 1-u+u\epsilon(u)$. Les propriétés des fonctions de type ϵ entraînent :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{A}\big(1 - \frac{B}{A}(x-a) + (x-a)\epsilon(x-a)\big) = \frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{g(a)^2}(x-a) + (x-a)\epsilon(x-a)$$

(se souvenir que les notations $\epsilon(x-a)$ apparaissant dans chaque terme peuvent représenter des fonctions différentes !). La Définition 11 permet de conclure.

Théorème 9 *(dérivabilité des fonctions composées). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur un intervalle J qui contient $f(I)$. Si f est dérivable en un point a de I et si g est dérivable au point $f(a)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et on a :*

$$g \circ f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Preuve. Nous allons ici détailler un peu plus, en désignant par ϵ_1, ϵ_2, etc les fonctions de type ϵ apparaissant dans les différents termes du calcul. Posons $b = f(a)$. La dérivabilité de la fonction f en a s'écrit :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon_1(x-a),$$

où ϵ_1 est une fonction continue et nulle en 0. La dérivabilité de la fonction g en b s'écrit :

$$g(x) = g(b) + (x-b)g'(b) + (x-b)\epsilon_2(x-b),$$

où ϵ_2 est une fonction continue et nulle en 0. En remplaçant x par $f(x)$ dans la deuxième formule, on trouve :

$$g(f(x)) = g(b) + ((x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon_1(x-a))g'(b) + ((x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon_1(x-a))\epsilon_2(f(x)-b).$$

On remarque alors que, f étant continue en a, on a $f(x) - b = f(x) - f(a) = \epsilon_3(x-a)$, ϵ_3 désignant une fonction continue et nulle en 0. Il en résulte que $\epsilon_2(f(x)-b) = \epsilon(x-a)$, où, suivant notre convention, ϵ désigne n'importe quelle fonction continue et nulle en 0.

Finalement en regroupant les termes qui contiennent à la fois un facteur $(x-a)$ et un facteur $\epsilon(x-a)$ il vient :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(b) + (x-a)f'(a)g'(b) + (x-a)\epsilon(x-a),$$

ce qui montre que la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et que $(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$.

1.4.4 Fonction dérivable sur un intervalle, dérivées successives.

Définition 12 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point). On dit que la fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui, à chaque point a de l'intervalle I, associe le nombre réel $f'(a)$.*

Remarque. Au lieu de f' on utilise également la notation différentielle $f' = \frac{df}{dx}$.

Dérivées successives

Si la fonction f est dérivable sur I et si sa dérivée f' elle même est dérivable sur I, on dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I. La dérivée de f' s'appelle alors la dérivée seconde de f, et se note f''. Plus généralement :

Définition 13 *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit, si c'est possible, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de f par la récurrence :*

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Ainsi on a $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. On utilise aussi la notation différentielle. $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Définition 14 *Si f a une dérivée n-ième, on dit que f est n fois dérivable sur I. Si, pour tout entier n, f a une dérivée n-ième, on dit que f est indéfiniment dérivable sur I.*

Exemples : les polynômes, les fonctions sinus, cosinus et l'exponentielle sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles sont indéfiniment dérivables sur tout intervalle qui ne contient pas de racine du dénominateur, les fonctions logarithme, racine carrée, puissance α-ième ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont indéfiniment dérivables sur $]0, \infty[$.

1.5 Développements limités

1.5.1 Définition

Définition 15 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un point de I et soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe des nombres réels c_0, c_1,..., c_n et une fonction ϵ continue et nulle en 0 tels que :*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x-a),$$

pour tout nombre x de l'intervalle I. On écrit alors : f admet un $d\ell_n$ en a.

Remarques.

1. Cette définition respecte la convention introduite au §1.4.2 de désigner par ϵ toute fonction continue et nulle en 0. Elle entraîne immédiatement [voir la Définition 11 pour le point (ii)] que :
   (i) f admet un $d\ell_0$ en a si et seulement si f est continue en a (et alors, $c_0 = f(a)$ convient) ;
   (ii) f admet un $d\ell_1$ en a si et seulement si f est dérivable en a (et alors, $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$.)

2. *Quand x s'approche de a*, c'est-à-dire quand $x - a$ devient petit, chacun des termes du développement limité devient négligeable devant le terme qui le précède. Plus précisément, c_0 est une constante, $c_1(x-a)$ devient petit, c'est-à-dire négligeable devant toute constante non nulle, $c_2(x-a)^2$ devient très petit, c'est-à-dire négligeable devant $(x-a)$,..., idem pour $c_n(x-a)^n$ par rapport à $(x-a)^{n-1}$, et finalement $(x-a)^n\epsilon(x-a)$ devient encore plus petit, c'est-à-dire négligeable devant $(x-a)^n$.

3. Plus généralement, étant donnés deux entiers k, m compris entre 0 et n, avec $k < m$, on a : $(x-a)^m = (x-a)^k(x-a)^{k-m} = (x-a)^k\epsilon(x-a)$. Par conséquent, si f admet un $d\ell_n$ en a, il admet un $d\ell_k$ pour tout entier $k = 0, .., n$, donné par $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\epsilon(x-a)$. On dit que ce $d\ell_k$ est obtenu en *tronquant* le $d\ell_n$ à l'ordre k.

4. Même si le développement limité donne apparemment la valeur de la fonction en tout point de l'intervalle I, il ne faut pas oublier que l'on ne connait aucune propriété de la fonction ϵ en dehors de sa limite en 0. C'est donc uniquement lorsque l'on recherche la limite en a d'une expression faisant intervenir la fonction f qu'il peut être avantageux de remplacer la fonction f par son développement limité en a.

5. Le terme $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n$ s'appelle *la partie principale* (ou : *régulière*) du développement limité. C'est un polynôme de degré n (ou $< n$ si $c_n = 0$). Comme on l'a vu dans la remarque 2 , l'écriture de ce polynôme est adaptée à l'étude de ce qui se passe lorsque x tend vers a, et il ne faut pas développer les termes $(x-a)^k$. Par exemple, le coefficient c_0 donne la valeur du polynôme P au point a, le coefficient c_1 donne la dérivée de P en a, etc...

6. Le terme $(x-a)^n\epsilon(x-a)$ s'appelle *le reste* du développement limité. Il est indispensable de l'écrire, puisqu'en l'oubliant, on affirmerait que la fonction f est un polynôme. Il indique la précision avec laquelle on veut connaître la fonction f au voisinage du point a, précision qu'il est parfois difficile de prévoir avant de faire les calculs explicites. Par exemple, pour montrer que la fonction $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ admet une limite quand x tend vers 0, il ne suffit pas de savoir que $\cos x = 1+\epsilon(x)$ (développement limité à l'ordre 0), ni même que $\cos x = 1+0.x+x\epsilon(x) = 1+x\epsilon(x)$ ($d\ell_1$) ; il faut, comme on dit, "pousser" le $d\ell$ jusqu'à l'ordre 2 : on verra que $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon(x)$, donc $f(x) = \frac{1}{x^2}(-\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) = -\frac{1}{2} + \epsilon(x)$, donc f a une limite quand $x \to 0$, égale à $-\frac{1}{2}$.

Théorème 10 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un point de I. Si f a un développement limité d'ordre n en a alors ce développement est unique. On peut donc alors parler* **du** *$d\ell_n$ de f en a.*

Preuve. supposons que la fonction f admette deux développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x-a)$$

$$f(x) = d_0 + d_1(x-a) + ... + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x-a),$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont deux fonctions de type ϵ. Nous devons montrer que leurs parties principales sont égales (ce qui entraînera d'ailleurs que $\epsilon_1 = \epsilon_2$, mais peu importe). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors un indice $k \leq n$ tel que $c_k \neq d_k$, et on peut considérer le plus petit indice vérifiant cette propriété. Autrement dit : $c_i = d_i$ pour $i = 0, ..., k-1$, et $c_k \neq d_k$. En faisant la différence des deux expressions, on obtient :

$$0 = (c_k - d_k)(x-a)^k + (c_{k+1} - d_{k+1})(x-a)^{k+1} + ... + (c_n - d_n)(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x-a).$$

D'où, pour $x \neq a$ et après division par $(x-a)^k$:

$$d_k - c_k = (c_{k+1} - d_{k+1})(x-a) + ... + (c_n - d_n)(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k}\epsilon(x-a).$$

Or tous les termes du membre de droite sont de type $\epsilon(x-a)$ (c'est clair si $n-k \geq 1$, mais aussi si $k = n$, le seul terme subsistant étant alors le dernier). Ainsi, $d_k - c_k = \epsilon(x-a)$, ce qui impose que la constante $d_k - c_k$ soit nulle. Cela contredit l'hypothèse $c_k \neq d_k$, et conclut la preuve.

Exemple 0. Développement limité de $\frac{1}{x}$ en $a > 0$.

La fonction $x \mapsto 1/x$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Nous allons en trouver le développement limité en un point $a > 0$.

Première étape : $d\ell_n$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0.

La formule classique donnant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique :

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

se réécrit :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\frac{x}{1-x}.$$

Comme $\frac{x}{1-x}$ est une fonction de type $\epsilon(x)$ au voisinage de 0, cela donne bien le $d\ell_n$ de $\frac{1}{1-x}$ en 0.

Deuxième étape : $x = a + t$

Une méthode générale pour obtenir le développement limité d'une fonction en un point a est de se ramener à un développement limité en 0 en posant $x = a + t$, de telle sorte que t tende vers 0 lorsque x tend vers a.

En utilisant le développement qui vient d'être trouvé, on obtient :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+t} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 - \frac{-t}{a}} = \frac{1}{a}\Big(1 + \big(\frac{-t}{a}\big) + \big(\frac{-t}{a}\big)^2 + ... + \big(\frac{-t}{a}\big)^n + \big(\frac{-t}{a}\big)^n \epsilon\big(\frac{-t}{a}\big)\Big)$$

c'est-à-dire finalement :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a^3}(x-a)^2 + ... + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x-a).$$

1.5.2 Formule de Taylor-Young

On résume l'important énoncé qui suit en disant qu'on peut intégrer terme à terme un développement limité.

Proposition 5 *(intégration des développements limités) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un point de I. Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' a un développement limité d'ordre n en a :*

$$f'(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x-a)$$

alors f a un développement limité d'ordre $n+1$ en a dont la partie principale est la primitive de la partie principale du développement limité de f' qui prend la valeur $f(a)$ en a :

$$f(x) = f(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\epsilon(x-a).$$

Preuve : elle repose sur le théorème des accroissements finis, dont on trouvera l'énoncé au chapitre II, §2.2.1. Bien que nous n'établirons ce théorème qu'au chapitre II, le lecteur inquiet (à juste titre) pourra vérifier que sa démonstation ne fait appel à aucune des notions qui vont suivre, et qu'il n'y a donc pas de cercle vicieux.

Pour prouver la Proposition 5, posons

$$g(x) = f(x) - \Big(f(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\Big)$$

et montrons que

$$g(x) = (x-a)^{n+1}\epsilon(x-a).$$

La fonction g est dérivable sur I, de dérivée

$$g'(x) = f'(x) - c_0 - c_1(x-a) - ... - c_n(x-a)^n = (x-a)^n\epsilon(x-a).$$

Pour $x > a$, la fonction g est continue sur l'intervalle $[a, x]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, x[$ (et même sur $[a, x]$, mais peu importe). D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc un nombre $c = c(x)$ de l'intervalle $]a, x[$ tel que :

$$g(x) = (x-a)g'(c) = (x-a)(c-a)^n\epsilon(c-a) = (x-a)^{n+1}\frac{(c-a)^n}{(x-a)^n}\epsilon(c-a),$$

où $\epsilon(c-a)$ désigne la fonction $x \mapsto \epsilon(c(x)-a)$. Idem pour $x < a$, en remplaçant $[a,x]$ par $[x,a]$. Or le point c reste compris entre a et x. On en déduit d'une part que

$$0 < \left| \frac{(c-a)^n}{(x-a)^n} \right| < 1$$

et d'autre part que $c = c(x)$ tend vers a lorsque x tend vers a et donc, par composition des limites, que $c(x) - a$ tend vers 0. Autrement dit, la fonction $x \mapsto c(x) - a$ est de type $\epsilon(x-a)$. Il en résulte finalement que :

$$\frac{(c-a)^n}{(x-a)^n} \epsilon(c-a) = \epsilon(x-a),$$

ce qui achève la démonstration.

Exemple 1. Développement limité de la fonction logarithme.

On intègre le développement limité d'ordre $n-1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x).$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x}$ est $-\ell n(1-x)$, fonction qui s'annule pour $x = 0$. Il vient donc :

$$\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x).$$

En changeant x en $-x$ on obtient :

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x).$$

Théorème 11 (formule de Taylor-Young) *Soit n un entier ≥ 1. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Si f est n fois dérivable en a, alors f admet un développement limité d'ordre n en a, donné par :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x-a).$$

Rappelons que pour $n \geq 2$ et par définition, si la fonction f est n-fois dérivable en a, elle est nécessairemenr $(n-1)$-fois dérivable dans un voisinage de a dans I, et qu'on désigne par $f^{(i)}$ la dérivée i-ème de f.

Preuve. Pout tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion dont le théorème 11 affirme l'exactitude. Nous allons démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie par récurrence sur n.

Première étape $(n = 1)$: démontrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit f une fonction (une fois) dérivable en a. D'après l'équivalence des Définitions 10 et 11,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon(x-a).$$

Autrement dit, f admet un développement limité d'ordre 1 en a de la forme annoncée.

Deuxième étape : soit n un entier ≥ 2. Admettons que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie (et ce, pour toute fonction f qui est $(n-1)$-fois dérivable en a).

Troisième étape : déduisons-en que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit f une fonction n-fois dérivable au point a. Alors, sa dérivée f' est $(n-1)$-fois dérivable en a. D'après l'hypothèse de récurrence (2e étape), elle a un développement limité d'ordre $n-1$ en a, donné par :

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\epsilon(x-a).$$

(la i-ème dérivée de f' est la $(i+1)$-ème dérivée de f). Il suffit d'intégrer ce développement limité pour obtenir le $d\ell_n$ de f en a, qui correspond bien à la formule cherchée.

1.5.3 Développements limités usuels

Outre ceux de $\frac{1}{1-x}$ et de $\ell n(1+x)$ au point 0 (Exemples 0 et 1), voici ceux qu'il convient de connaître, ou au moins, de savoir reconstituer rapidement.

Exemple 2. Développement limité de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle $\exp(x) := e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et égale à sa dérivée. Elle est donc indéfiniment dérivable, et vérifie $\exp^{(n)}(a) = \exp(a)$ pour tout $n \geq 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent, son $d\ell_n$ en a est donné par

$$\exp(x) = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x-a).$$

En particulier, pour $a = 0$, on a : $e^0 = 1$, et le $d\ell_n$ de exp en 0 est :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

On peut d'ailleurs déduire le $d\ell_n$ en a de celui en 0 au moyen de l'équation fonctionnelle vérifiée par l'exponentielle : posant $x = a + t$, on a

$$\exp(x) = \exp(a+t) = \exp(a)\exp(t) = e^a\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} + t^n\epsilon(t)\right)$$

$$= e^a\left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{3!} + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\epsilon(x-a)\right).$$

Exemple 3. Développement limité des fonctions sinus et cosinus.

En itérant les relations différentielles $\cos'(x) = -\sin(x), \sin'(x) = \cos(x)$, et en rappelant les valeurs $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$, on déduira :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\epsilon(x).$$

Les formules trigonométriques

$$\sin(a+t) = \sin(a)\cos(t) + \cos(a)\sin(t)$$

$$\cos(a+t) = \cos(a)\cos(t) - \sin(a)\sin(t)$$

permettent, en posant $x = a + t$, d'en déduire les $d\ell_n$ de ces fonctions en un point a quelconque.

Exemple 4 : Formule du binôme généralisé (Développement limité de $(1+x)^\alpha$ en 0).

Soient α un nombre réel. On va chercher le développement limité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$, qui est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Les dérivées successives de la fonction f en 0 sont données par :

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f"(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \ \ldots \ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n};$$

$$f'(0) = \alpha, \quad f"(0) = \alpha(\alpha-1), \ \ldots \ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1).$$

La formule de Taylor-Young s'écrit alors :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x).$$

Lorsque $\alpha = m$ est un entier > 0, et qu'on choisit pour ordre du $d\ell$ un entier $n \geq m$, on retrouve la formule du binôme de Newton classique :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + ... + \frac{m!}{k!(m-k)!}x^k + ... + x^m.$$

Dans ce cas la fonction ϵ est identiquement nulle.

Lorsque $\alpha = -1$, on retrouve la formule de l'exemple 0 (remplacer x par $-x$).

Lorsque $\alpha = 1/2$ et, par exemple, $n = 4$, on trouve :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\epsilon(x).$$

Tableau récapitulatif.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\epsilon(x).$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x).$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\epsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x).$$

De plus, on étudiera au chapitre II, §2.3.5, les fonctions réciproques $arctan, arcsin$, dont les développements limités en 0 sont donnés par

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.2}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1.3....(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x).$$

On les établit facilement en intégrant terme à terme les $d\ell_{2n}$ en 0 de leurs dérivées, qui sont respectivement égales à :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \ , \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour la recherche d'autres $d\ell_n$, on conduira les calculs en gardant en tête les remarques suivantes.

Remarques

1. Parité. Soit f une fonction paire admettant un $d\ell_n$ au point 0. Alors, tous les coefficients c_{2k+1} d'indices impairs de son $d\ell_n$ en 0 sont nuls. En effet, les fonctions $f(x)$ et $f(-x)$ sont égales, donc les parties principales de leurs $d\ell_n$ en 0 sont égales :

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n = c_0 - c_1x + c_2x^2 + ... + (-1)^n c_nx^n,$$

de sorte que chaque coefficient d'indice impair est égal à son opposé, donc nul. En particulier, si n est impair, par exemple $n = 5$, le $d\ell_5$ de f prendra la forme $f(x) = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + x^5\epsilon(x)$.

De même, si f est une fonction impaire, tous les coefficients c_{2k} d'indice pair de son $d\ell_n$ en 0 sont nuls. En particulier, si f admet un $d\ell_6$ en 0, celui-ci prendra la forme $f(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + x^6\epsilon(x)$.

2. Opérations algébriques et composition de $d\ell$ en 0. Lors de telles opérations, on choisit un ordre de reste (on doit parfois pousser les $d\ell$ à un ordre n plus grand que celui auquel on veut aboutir). Une fois ce choix fait, il est inutile de conserver des termes d'ordre plus grand que n. En effet,

$$\forall p > n, x^p + x^n\epsilon(x) = x^n\epsilon(x) \text{ et } \forall p \geq n, x^p\epsilon(x) + x^n\epsilon(x) = x^n\epsilon(x)$$

Lors de composition de fonctions faisant apparaître des expressions du type $\epsilon(u(x))$ au voisinage de $x = 0$, on ne peut espérer aboutir que si $lim_{x\to 0}u(x) = 0$. Si une telle fonction u admet un $d\ell$ en 0, et qu'on doive étudier un terme de la forme $u^k\epsilon(u)$, il est utile de connaître le premier terme non nul du $d\ell$ de u. En effet, si $u(x) = c_rx^r + \cdots + x^m\epsilon(x)$ avec $r \geq 1$, alors, $u^k\epsilon(u) = x^{kr}\epsilon(x)$. En revanche, cette information ne permet en général pas de raffiner la relation $\epsilon(u) = \epsilon(x)$: par exemple, si $u(x) = x^r$, il se peut que $\epsilon(x) = |x|^{\frac{1}{2r}}$, et on aura seulement $\epsilon(u(x)) = \sqrt{|x|}$, qui tend bien vers 0, mais moins vite que x, donc n'est pas de la forme $x\ \epsilon(x)$.

Exemple 5 : $d\ell_6$ de la fonction tangente en 0

Comme la fonction tan est indéfiniment dérivable en 0, elle admet un $d\ell$ en 0 d'ordre arbitrairement grand, et en particulier, un $d\ell_6$. Mais tan étant une fonction impaire, celui-ci se déduira de son $d\ell_5$ en 0. On a :

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)) \times \frac{1}{1-u(x)}$, où $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)$. Donc $u^2(x) = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x), u^3(x) = x^5\epsilon(x)$ et $\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^3\epsilon(u) = 1+\frac{x^2}{2}+(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4})x^4+x^5\epsilon(x)$.
Ainsi, $\tan(x) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)) \times (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x))$

$$= x + (-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2})x^3 + (\tfrac{5}{24} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{120})x^5 + x^5\epsilon(x) = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).$$

On en déduit par parité que

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\epsilon(x).$$

3. Raccordement de $d\ell_n$

Définition 16 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[b, c[$ (resp. $]b, c]$) de $\mathbb{R}$, et soit a un point de cet intervalle. On dit que la fonction f a un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en a si sa restriction g (resp. h) à l'intervalle $[a, c[$ (resp. $]b, a]$) a un développement limité d'ordre n en a.*

On déduit du §1.1.3, théorème 7 :

Proposition 6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b, c[$ de $\mathbb{R}$, et soit a un point de $]b, c[$. La fonction f a un développement limité d'ordre n en a si et seulement si elle a un développement limité d'ordre n à gauche en a et un développement limité d'ordre n à droite en a, et si ces deux développements limités sont égaux (c'est-à-dire s'ils ont les mêmes parties principales).*

1.5.4 Applications aux graphes

Les développements limités servent essentiellement à calculer des **limites**. On en a vu un exemple élémentaire à la Remarque 6 du §1.5.1. Les feuilles de TDs en fournissent beaucoup d'autres - et de plus approfondis.

Les développements limités permettent également de préciser l'allure d'un graphe au voisinage d'un de ses points. Plus précisément, soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, a un point de I, d'image $f(a)$, et $\mathcal{C} := \mathcal{C}_f$ le graphe de f (voir §1.1.1). Ce graphe passe alors par le point $A = (a, f(a))$ d'abscisse $x_A = a$, d'ordonnée $y_A = f(a)$, du plan $\mathbb{R}^2$.

Dans ce qui suit, on suppose que la fonction f est **dérivable** au point a. La relation $\lim_{x \to a} \tau_f(x) = f'(a)$ s'exprime géométriquement en disant que les sécantes (AP) au graphe, c'est-à-dire les droites joignant A à un point quelconque $P = (x, f(x))$ de $\mathcal{C}$, “admettent une limite” quand le point P se rapproche de A en restant sur le graphe. En effet, la pente $\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$ d'une telle sécante est précisément le taux de variation $\tau_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de f entre a et x. La droite limite, qu'on note $T_A(\mathcal{C})$, a pour pente la limite $f'(a)$ des pentes des sécantes, et puisqu'elle passe par A, son équation est donnée par

$$Y = f(a) + f'(a)(X - a) \qquad (T_A(\mathcal{C})).$$

On appelle $T_A(\mathcal{C})$ la (droite) **tangente** au graphe $\mathcal{C}$ au point A.

1) Position du graphe par rapport à la tangente.

Considérons, pour $x \in I$ proche de a, la droite verticale d'équation $X = x$. Elle rencontre le graphe $\mathcal{C}$ au point P d'abscisse $x_P = x$, d'ordonnée $y_P = f(x)$, et la tangente $T_A(\mathcal{C})$ au point Q d'abscisse $x_Q = x$, d'ordonnée $y_Q = (x, f(a) + f'(a)(x - a))$. La différence $y_P - y_Q$ fournit deux types de renseignements :

* par son signe : $y_P - y_Q$ est ≥ 0 si P est au-dessus de Q, c'est-à-dire si le graphe est au-dessus de la tangente pour cette valeur de x ; de même, $y_P - y_Q$ est ≤ 0 si P est au-dessous de Q, c'est-à-dire si le graphe est au-dessous de la tangente pour cette valeur de x ;
* par sa valeur absolue : $|y_P - y_Q|$ mesure de combien le graphe est éloigné de la tangente pour cette valeur de x.

Supposons maintenant que f admette un $d\ell_2$ en a, c-à-d. qu'il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2 + (x-a)^2\epsilon(x-a),$$

et que, de plus, c_2 **soit non nul**. Alors,

$$y_P - y_Q = f(x) - \big(f(a) + f(a)(x-a)\big) = (x-a)^2\big(c_2 + \epsilon(x-a)\big),$$

et pour $x \neq a$, le signe de $y_P - y_Q$ est égal à celui de $c_2 + \epsilon(x-a)$. La proposition 7 qui suit montre alors que pour x suffisamment proche de a, le signe de $y_P - y_Q$ est égal au signe de c_2. Par conséquent,

$*$ *si* $c_2 > 0$*, le graphe* $\mathcal{C}$ *reste au-dessus de la tangente* $T_A(\mathcal{C})$ *dans un voisinage de* a *dans* I.
$*$ *si* $c_2 < 0$*, le graphe* $\mathcal{C}$ *reste au-dessous de la tangente* $T_A(\mathcal{C})$ *dans un voisinage de* a *dans* I.

Lorsque c_2 est nul, on doit, si c'est possible, pousser le développement limité plus loin. Supposons que f admette un $d\ell_n$ en a, dont la partie principale ait un coefficient $c_i \neq 0$, avec $2 \leq i \leq n$, et notons r le plus petit de ces indices. Autrement dit,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c_r(x-a)^r + ... + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x-a)^n,$$

$$\text{donc } : y_P - y_Q = f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big) = (x-a)^r\big(c_r + \epsilon(x-a)\big),$$

On distingue alors deux cas :

$**$ si r est pair : la situation est la même que pour $r = 2$: $(x-a)^r$ reste positif et la Proposition 7 montre que pour x suffisamment proche de a, le signe de $y_P - y_Q$ est égal à celui de c_r . Par conséquent, si $c_r > 0$ (resp. $c_r < 0$), le graphe $\mathcal{C}$ reste au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente $T_A(\mathcal{C})$ dans un voisinage de a dans I.
$**$ si r est impair : alors, $(x-a)^r$ est négatif si $x < a$, et positif si $x > a$, tandis que d'après la Proposition 7, le signe de $c_r + \epsilon(x-a)$ reste égal à celui de c_r pour x suffisamment proche de a. Supposons par exemple $c_r > 0$. Alors, le graphe $\mathcal{C}$ est au-dessous de la tangente $T_A(\mathcal{C})$ pour $x < a$, et au-dessus pour $x > a$ (inverser les termes si $c_r < 0$). On dit que le graphe traverse sa tangente au point A, ou encore que A est un *point d'inflexion* du graphe $\mathcal{C}$.

Proposition 7 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *et soit* a *un point de* I*. On suppose que* f *a un développement limité d'ordre* r *en* a *de la forme :*

$$f(x) = c_r(x-a)^r + (x-a)^r\epsilon(x-a)$$

avec $c_r \neq 0$*. Alors, pour* x *suffisamment proche de* a*,* $f(x)$ *est du signe de* $c_r(x-a)^r$.

Preuve : comme $\lim_{x\to a} \epsilon(x-a) = 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V}_a$, on ait : $|\epsilon(x-a)| < \frac{1}{2}|c_r|$. En effet (voir la preuve du théorème 1, §1.2.2), il existerait dans le cas contraire une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ d'éléments de I tendant vers a tels que $|\epsilon(x_n - a)| > \frac{1}{2}|c_r|$ pour tout n, et la suite $\epsilon(x_n - a)$ ne convergerait pas vers $\epsilon(0) = 0$.

Pour x dans $\mathcal{V}_a$, le nombre $c_r + \epsilon(x-a)$ est donc compris entre $\frac{1}{2}c_r$ et $\frac{3}{2}c_r$; en particulier, il a le même signe que c_r, et $f(x)$ a le même signe que $c_r(x-a)^r$.

2) Asymptotes

Supposons que le domaine de définition de f contienne un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$ (le lecteur généralisera sans peine au cas où D_f contient $]-\infty, A[$). On dit qu'une droite Δ, d'équation $Y = mX + p$, est asympote au graphe $\mathcal{C}$ de f quand x tend vers $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx - p\big) = 0.$$

Considérons de façon générale une fonction g, définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, avec $A > 0$, et telle que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. La fonction $G : t \mapsto G(t) := g(\frac{1}{t})$ est alors définie sur l'intervalle $]0, \frac{1}{A}[$, et admet 0 pour limite à droite en 0. Soit $\tilde{G} : I := [0, \frac{1}{A}[\to \mathbb{R}$ son prolongement par continuité en 0 : c'est une fonction continue en 0 et nulle en 0, autrement dit une fonction de type $\epsilon(t)$ sur I. On s'autorise dans ces conditions à écrire

$$g(x) = \epsilon(\frac{1}{x}) \qquad \text{pour } x \to +\infty.$$

Ainsi, Δ est asympote à $\mathcal{C}$ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x) - mx - p = \epsilon(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.

Avec les notations $g, G, \tilde{G}$ ci-dessus, supposons maintenant que $\tilde{G}$ admette un $d\ell_n$ à droite en 0. Comme $\tilde{G}(0) = 0$, il sera de la forme $\tilde{G}(t) = c_1 t + ... + c_n t^n + t^n \epsilon(t)$. On dit alors que g admet un $d\ell_n$ quand x tend vers $+\infty$, et on écrit :

$$g(x) = \frac{c_1}{x} + ... + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x}) \quad , \ x \to +\infty.$$

Si c'est le cas de la fonction $f(x) - mx - p$, on écrit

$$f(x) = mx + p + \frac{c_1}{x} + ... + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x}) \quad , \ x \to +\infty,$$

et on appelle cette expression un $d\ell_n$ généralisé d'ordre n de f pour x tendant vers $+\infty$.

Une discussion similaire au paragraphe précédent permet alors préciser la position de l'asympote Δ par rapport au graphe $\mathcal{C}$. Supposons que l'un des coefficients c_i soit non nul, et soit $r \in [1, n]$ le plus petit indice vérifiant cette propriété. Alors (et quelle que soit la parité de r) :

$*$ si $c_r > 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ pour $x \to +\infty$;
$*$ si $c_r < 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ pour $x \to +\infty$.

(En revanche, la parité de r intervient quand on étudie $\mathcal{C}$ pour $x \to -\infty$.)

Chapitre 2

Etude globale

2.1 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 17 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Les théorèmes de continuité en un point se traduisent immédiatement en théorème de continuité globale :

Théorème 12 *(i)* (continuité et opérations algébriques) *Soit f et g des fonctions définies et continues sur un intervalle I. Les fonctions $f+g$ et fg sont définies et continues sur I. Si la fonction g ne s'annule pas sur I, la fonction $1/g$ est définie et continue sur I.*

(ii) (continuité des fonctions composées). *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et soit g une fonction définie et continue sur un intervalle J qui contient $f(I)$. Alors la fonction composée gof est définie et continue sur l'intervalle I.*

(iii) (continuité des fonctions usuelles) *Les fonctions polynômes et les fonctions* $\exp, \sin, \cos$ *sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction ℓn et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur* $]0, \infty[$.

Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques et composition sont donc continues sur tout intervalle où elles sont définies. Par exemple, les fractions rationnelles $x \to P(x)/Q(x)$ sont continues sur tout intervalle où le polynôme Q ne s'annule pas ; la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est continue sur tout intervalle $]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}[$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Ces théorèmes permettent souvent de conclure à la continuité d'une fonction dans son domaine de définition, à l'exception éventuelle de quelques points pour lesquels on doit faire une étude directe locale. Par exemple, la fonction : $x \mapsto f(x) := x \sin(1/x), x \neq 0; f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus 0$, mais aussi en 0 (noter que $|f(x)| \leq |x|$ pout tout $x \in \mathbb{R}$), donc est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 13 (Théorème des valeurs intermédiaires - première forme) *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ (c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas tous les deux > 0, ou tous les deux < 0), alors il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

L'hypothèse de continuité en tout point de $[a, b]$ est fondamentale. Par exemple, si $E(x) = [x]$ désigne la fonction "partie entière", la fonction $f(x) = E(x) + \frac{1}{2}$ est continue sur $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, vérifie $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2} < 0, f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} > 0$, mais ne s'annule en aucun point de $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Preuve. On se ramène aisément au cas où $f(a) \leq 0, f(b) > 0$. Construisons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ une suite croissante $(a_n, n \in \mathbb{N})$ et une suite décroissante $(b_n, n \in \mathbb{N})$ de nombres réels dans l'intervalle $[a, b]$, telles pour tout $n \geq 0$, on ait

$$a_n \leq b_n \ , \ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \text{et } f(a_n) \leq 0, f(b_n) > 0.$$

Pour cela, on pose $a_0 = a, b_0 = b$, qui vérifient bien ces propriétés pour $n = 0$. Admettant les suites construites jusqu'a l'ordre n, on considère le milieu m_n de $[a_n, b_n]$. Si $f(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m_n$; si $f(m_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = m_n, b_{n+1} = b_n$. Dans tous les cas, a_{n+1} et b_{n+1} vérifient les propriétés demandées, et les suites $(a_n, n \in \mathbb{N}), (b_n, n \in \mathbb{N})$ répondent bien aux conditions imposées.

La suite (a_n) est croissante et majorée par b. D'après les propriétés générales des suites numériques, elle admet donc une limite finie $\alpha \leq b$. De même, la suite (b_n), décroissante et minorée, admet une limite finie $\beta \geq a$. La suite $(b_n - a_n)$ admet donc pour limite $\beta - \alpha$; mais elle vaut $\frac{b-a}{2^n}$, qui tend vers 0. Donc $\alpha = \beta$. Notons $c \in [a, b]$ cette valeur commune des limites des deux suites.

Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle l'est au point c. Ce point étant la limite de la suite a_n, on a donc $\lim f(a_n) = f(c)$. De même, $\lim f(b_n) = f(c)$. Or $f(a_n) \leq 0$ pour tout n, donc la limite $f(c)$ de cette suite est ≤ 0. De même, $f(b_n) > 0$ pour tout n, donc la limite $f(c)$ de cette suite est ≥ 0. Ainsi, $f(c)$ est nécessairement nul. $\blacksquare$

[Le symbole $\blacksquare$ indique la fin d'une démonstration. On l'utilise pour les preuves assez longues. Il remplace le symbole, passé de mode : CQFD = ce qu'il fallait démontrer.]

Noter qu'il peut exister plusieurs valeurs de c telles que $f(c) = 0$ (en mathématiques, l'expression $\exists c \in [a, b], f(c) = 0$ signifie : l'équation $f(c) = 0$ admet *au moins une* solution c dans l'intervalle $[a, b]$). Il en va de même dans la version apparemment plus générale suivante du théorème 13 :

Théorème 14 (Théorème des valeurs intermédiaires - deuxième forme) *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout nombre réel γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Preuve : on se ramène au théorème 13 en considérant la fonction $F(x) = f(x) - \gamma$.

Le théorème 14 énonce que toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes comme valeurs de f, d'où son nom. En voici une 3e version. Rappelons qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est par définition une partie I de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ x \leq y \Rightarrow \ [x, y] \subset I,$$

c-à-d. : pour tout couple $x \leq y$ d'éléments de I, le segment $[x, y] := \{z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y\}$ est contenu dans I.

Théorème 15 (Théorème des valeurs intermédiaires - troisième forme) *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I. Alors, l'image $J := f(I)$ de f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve : montrons que le thm 14 entraîne le thm 15. Soient $x \leq y$ deux points de $J = f(I)$, et z un point de $[x, y]$. Par définition de l'image (voir le §1.1.1), il existe deux point a, b de I tels que $f(a) = x, f(b) = y$. D'après le théorème 14, il existe un point c du segment $[a, b]$ (ou $[b, a]$, si $b \leq a$) tel que $f(c) = z$. Donc z appartient bien à l'image $f(I)$ de f.

On laisse au lecteur le soin de montrer que le théorème 15 entraîne le théorème 13, et d'en déduire ainsi que les théorèmes 13, 14 et 15 sont bien équivalents.

Remarque : soit I un intervalle (non vide) d'extrémités $a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a \leq b$. On dit que I est *ouvert* s'il ne contient pas ses extrémités, autrement dit, si $I =]a, b[$. On dit que I est *fermé* s'il contient ses extrémités finies, autrement dit (en réservant les notations a, b aux éléments de $\mathbb{R}$), si $I = [a, b]$, ou $I =]-\infty, b]$, ou $I = [a, +\infty[$, ou $I =]-\infty, , +\infty[$ (ce dernier intervalle est donc à la fois ouvert et fermé). On dit que I est *borné* si a et b sont tous les deux finis ; les **intervalles fermés bornés** sont donc de la forme $[a, b]$ où a et b appartiennent à $\mathbb{R}$. Enfin, les intervalles semi-ouverts sont les intervalles de la forme $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$, ou $]a, b]$ avec $b \in \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle caractéristique de l'intervalle ce type de propriété.

Le théorème 15 ne dit rien des caractéristiques de J en fonction de celles de I : en effet, ces caractéristiques ne sont en général pas conservées par image par une fonction continue. Par exemple, l'image de l'intervalle ouvert $] - 2\pi, +2\pi[$ par la fonction continue sin est l'intervalle fermé borné $[-1, +1]$. L'image de l'intervalle ouvert borné $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par la fonction tan est l'intervalle fermé (et ouvert) non borné $] - \infty, +\infty[$.

Toutefois, si l'intervalle I est fermé et borné, son image par une fonction continue sera encore fermé et borné. Ceci est l'objet du très important *théorème de Weierstrass* suivant, dont nous admettrons la preuve.

Théorème 16 (dit de Weierstrass, ou de l'image d'un intervalle fermé borné). *L'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.*

Principe de la preuve. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On sait d'après le théorème 15 que l'image $J := f([a, b])$ est un intervalle, qu'on note (m, M), sans savoir encore le type des crochets que représentent les parenthèses, ni si m et M sont dans $\mathbb{R}$ ou seulement dans $\overline{\mathbb{R}}$. On montre alors successivement les points suivants :

- m et M sont finis, autrement dit : $J = f([a, b])$ est un intervalle borné, ou encore : f est majorée et minorée sur l'intervalle $[a, b]$;
- $J := f([a, b])$ est un intervalle fermé. Puisque ses extrémités m et M sont finies, ils s'agit de voir que m et M appartiennent à J, autrement dit, qu'il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que $f(c_1) = m, f(c_2) = M$, ce qu'on exprime en disant que la fonction f atteint ses bornes m et M sur l'intervalle $[a, b]$.

On peut vérifier chacune de ces assertions en construisant des couples de suites adjacentes $(a_n), (b_n)$, par la méthode de "dichotomie" déjà vue lors de la preuve du théorème 13. En les combinant, on conclut que $f([a, b]) = [m, M]$ est bien un intervalle fermé et borné.

2.2 Fonctions dérivables sur un intervalle

Rappelons la définition 12 du chapitre I, en convenant que les intervalles de définition I sont désormais supposés non vides et non réduits à un point.

Définition : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.*

2.2.1 Extrema locaux, Rolle, accroissements finis

Ce paragraphe regroupe trois des théorèmes les plus importants du cours.

Définition (extremum d'une fonction) : soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et soit c un point de D. On dit que

* f admet un *maximum* en c si $f(x) \leq f(c)$ pour tout nombre x de D.
* f admet un *minimum* en c si $f(x) \geq f(c)$ pour tout nombre x de D.
* f admet un *extremum* en c si elle admet un maximum ou un minimum en c.

La valeur $f(c)$ prise par f en un tel point s'appelle alors *le maximum* ou *le minimum* de f *sur* D. Noter qu'en général, une fonction n'admet pas de maximum sur son domaine de définition. Par exemple, la fonction $f : [0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x$ n'admet pas de maximum sur $[0, 1[$.

Définition (extremum local) : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit c un point de I. On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum, extremum)* **local** en c s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_c$ de c dans I tel que la restriction $f|_{\mathcal{V}_c} : \mathcal{V}_c \to \mathbb{R}$ de la fonction f à $\mathcal{V}_c$ admette un maximum (resp. minimum, extremum) en c.

Lorsque $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert, on peut imposer que $\mathcal{V}_c$ soit de la forme $]c - \delta, c + \delta[$ où δ est un nombre réel > 0 suffisamment petit. Lorsque $I = [a, b[$ et que $c = a$, on peut imposer que $\mathcal{V}_c$ soit de la forme $[c, c + \delta[$. La valeur $f(c)$ prise par f en un tel point s'appelle alors *le maximum* ou *le minimum* de f *au voisinage de* c.

Théorème 17 (Condition nécessaire pour un extremum local) *Soit f une fonction définie sur un intervalle* **ouvert** $I =]a, b[$, *et soit c un point de I. On suppose que f est dérivable en c. Alors, si f admet en c un extremum local, on a nécessairement :* $f'(c) = 0$.

Avant de passer à la preuve, il est crucial de noter (toujours sous les hypothèses : I ouvert, f dérivable en $c \in I$) que cette condition nécessaire n'est **pas suffisante** : autrement dit, il se peut qu'une telle fonction vérifie $f'(c) = 0$, mais que f n'admette pas d'extremum local en c. Par exemple, avec $I =] -1, 1[$ et $c = 0$, la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$. Pourtant, $f(x) > f(c)$ pour tout $x > c$, $f(x) < f(c)$ pour tout $x < c$, et comme tout voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 dans I contient des nombres $x > 0$ et des nombres $x < 0$, la fonction f n'admet pas d'extremum local en 0.

L'hypothèse préliminaire faite sur I dans le théorème est également nécessaire pour que son énoncé soit exact. Plus précisément, si I n'est pas ouvert, disons $I = [a, b[$, et si $c = a \in I$, f peut admette un extremum local en c sans que $f'(c) = 0$ (il s'agit alors ici de la dérivée à droite de f en c, voir le §1.4.1). Ainsi, la fonction $f : [0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x$ admet un mimimum local en $c = 0$, bien que $f'(0) = 1 \neq 0$.

On notera enfin que même si I est ouvert, f peut admettre un extremum local en $c \in I$ sans que f soit dérivable en c. Exemple : $f :] -1, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := |x|, c = 0$.

Preuve. La propriété d'avoir une dérivée nulle au point c est locale (elle ne dépend que des valeurs de f au voisinage du point c). Quitte à travailler avec la restriction de f à un sous intervalle ouvert, nous pouvons donc supposer que $f(c)$ est un extremum de la fonction f sur tout l'intervalle I. Et quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer qu'il s'agit d'un maximum.

Pour tout $x \in I, x < c$, on a alors $f(x) \leq f(c)$, d'où $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, et

$$f'(c) = f'_g(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Pour tout $x \in I, x > c$, on a aussi : $f(x) \leq f(c)$, d'où $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, et

$$f'(c) = f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

On en déduit que $f'(c) = 0$.

Application pratique. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. D'après le théorème de Weierstrass, elle atteint son maximum M en (au moins) un point c de I. Si f est de plus dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, tous les points c où elle admet son maximum sont à rechercher

- soit parmi les points $c \in]a, b[$ tels que $f'(c) = 0$;
- soit aux extrémités $c = a$ et $c = b$.

Une comparaison des valeurs de f en ces différents points permet alors de trouver M. Idem pour le mimimum m de f sur $[a, b]$.

Théorème 18 (théorème de Rolle) *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$..*

Preuve. Comme la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, l'image $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$. On distingue deux cas :

1) si la fonction f est constante sur l'intervalle $[a, b]$, alors sa dérivée f' est identiquement nulle sur cet intervalle. N'importe quel point c de l'intervalle $]a, b[$ convient car il vérifie $f'(c) = 0$.

2) si la fonction f n'est pas constante, l'intervalle $[m, M]$ n'est pas réduit à un point. Donc l'une, au moins, des deux inégalités strictes : $M > f(a) = f(b)$ ou $m < f(a) = f(b)$ est vérifiée.

Dans ce 2e cas, supposons que l'on a $M > f(a)$ (le cas $m < f(a)$ se traite de manière). Par définition de l'image d'un intervalle, comme M est un point de $[m, M]$, il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ telque $f(c) = M$ (autrement dit, comme on l'a déjà vu : f atteint son maximum sur $[a, b]$). Comme $M > f(a)$ et $M > f(b)$, c appartient en fait à l'intervalle $]a, b[$. Ainsi, la fonction f admet en c un maximum (donc a fortiori un maximum local). Étant dérivable sur $]a, b[$, elle l'est en c. La condition nécssaire d'extremum local entraîne alors que $f'(c) = 0$.

Traduction géométrique : soient $\mathcal{C}$ le graphe de f, qui passe par les points $A = (a, f(a)$ et $B = (b, f(b)$. L'hypothèse $f(a) = f(b)$ du théorème de Rolle revient à dire que les points A et B sont situés sur une droite horizontale (d'équation $Y = f(a)$). Comme f est dérivable sur $]a, b[$, on peut considérer, pour tout point $C = (c, f(c))$ du graphe distinct de A et B, la droite tangente $T_C(\mathcal{C})$ au graphe $\mathcal{C}$ en C, dont la pente vaut $f'(c)$. La conclusion du théorème est donc qu'il existe un point C de $\mathcal{C}$ situé entre A et B, où la tangente $T_C(\mathcal{C})$ est horizontale.

En particulier, *il existe $C \in \mathcal{C}$ entre A et B, tel que la tangente $T_C(\mathcal{C})$ à $\mathcal{C}$ en C soit parallèle à la droite (AB)*. Le théorème des accroissements finis énonce que cette conclusion vaut encore si la droite (AB) n'est pas horizontale (sa pente est alors donnée par $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

Théorème 19 (théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors il existe un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Preuve. Considérons la fonction $\varphi(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Elle est, comme la fonction f, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par ailleurs elle vérifie : $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Rolle, qui entraîne : il existe c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et c vérifie bien la relation souhaitée.

La conséquence la plus couramment utilisée du théorème des accroissements finis est de relier le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction, justifiant ainsi les *tableaux de variations* introduits en Terminale. Supposons par exemple que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit dérivable sur $]a, b[$, et que sa dérivée y reste toujours ≥ 0. Alors, pour tout $x, y \in [a, b]$, avec $x < y$, il existe $z \in]x, y[\subset]a, b[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(z)$; comme $f'(z) \geq 0$, on a $f(y) \geq f(x)$ et la fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Si, de plus, f' reste > 0 sur $]a, b[$, alors, $f(y) > f(x)$ et f est strictement croissante sur $[a, b]$. Si f' est ≤ 0 (resp. < 0) sur $]a, b[$, f sera décroissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Une autre application du théorème des accroissements finis concerne les *calculs d'erreurs*. Nous en donnerons un exemple dans le cadre plus général suivant, qui redonne le théorème des accroissements fini pour $n + 1 = 1$.

2.2.2 Formule de Taylor-Lagrange ; calculs d'erreurs

Théorème 20 (formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n + 1$) *Soient n un entier ≥ 0, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que :*

$*$ *la fonction f est n-fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$*

$*$ *la dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

Alors il existe un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2}(b - a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Preuve. Soit A le nombre réel défini par :

$$\frac{A}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1} = f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - \frac{f''(a)}{2}(b - a)^2 - ... - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n.$$

Il s'agit de trouver un point c de $]a, b[$ tel que $A = f^{(n+1)}(c)$. On introduit pour cela la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - \frac{f''(x)}{2}(b - x)^2 - ... - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^n - \frac{A}{(n + 1)!}(b - x)^{n+1}.$$

Il est évident que $\varphi(b) = 0$ et le choix du nombre A fait que $\varphi(a) = 0$. Par ailleurs la fonction φ est, comme la fonction f et chacune de ses n premières dérivées, continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Ainsi, la fonction φ satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, un calcul facile montre que :

$$\varphi'(x) = \frac{A - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Comme $c \neq b$, on en déduit bien que $A = f^{(n+1)}(c)$.

Application aux calculs d'erreurs : contrairement à la formule de Taylor-Young, qui ne décrit que le comportement de f au voisinage du point a, la formule de Taylor-Lagrange fournit un lien entre les valeurs de f en a et en b. Certes, on ne connait pas le nombre c explicitement, mais l'encadrement $a < c < b$ permet de contrôler le terme "reste" $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$, c'est-à-dire l'erreur qu'on commet en remplaçant $f(b)$ par $f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$.

Supposons par exemple qu'on veuille calculer $\sqrt{50}$ à $0,01$ près. On écrit $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\sqrt{1+\frac{1}{49}}$. Considérons alors la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Le théorème des accroissements finis (Taylor-Lagrange à l'ordre 1), appliqué à f entre les points $a = 0$ et $b = \frac{1}{49}$, assure l'existence de $c \in]0, \frac{1}{49}[$ tel que

$$\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 1 + \frac{1}{49}\frac{1}{2\sqrt{1+c}}, \text{ avec } 1 < \sqrt{1+c} < \frac{\sqrt{50}}{7} < \frac{8}{7}.$$

Donc $\frac{1}{14} - \frac{1}{14} \times \frac{1}{8} < \sqrt{50} - 7 < \frac{1}{14}$, et $7 + \frac{1}{14}$ est une approximation par excès de $\sqrt{50}$ avec une erreur d'au plus $\frac{1}{14 \times 8} < 0,01$. En particulier, $|\sqrt{50} - 7,07| < 0,01$.

Bien entendu, Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne une approximation plus précise. Comme $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, il existe $c \in]0, \frac{1}{49}[$ tel que

$$\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 1 + \frac{1}{49} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{49^2} \times \frac{1}{8(1+c)^{\frac{3}{2}}}, \text{ avec } 1 < (1+c)^{\frac{3}{2}} < \frac{4}{3}.$$

Donc $-\frac{1}{8.7^3} + \frac{1}{8.7^3} \times \frac{1}{4} > \sqrt{50} - (7 + \frac{1}{14}) > -\frac{1}{8.7^3}$, et $7 + \frac{1}{14} - \frac{1}{2744}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{50}$ avec une erreur d'au plus $\frac{1}{32.7^3} < 10^{-4}$. Ainsi, $|\sqrt{50} - 7,0710| < 0,0001$.

2.3 Fonctions réciproques

2.3.1 Injections, surjections, bijections

Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application de X vers Y. Si $y \in Y$, tout élément x de X tel que $f(x) = y$ s'appelle un *antécédent* de y (relativement à f). Ainsi, un élément y de Y admet au moins un antécédent si et seulement s'il appartient à l'image $f(X) \subset Y$ de f. On dit que

$*$ f est *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, autrement dit, si chaque élément y de Y admet au plus un antécécent (et donc exactement un si $y \in f(X)$) ;

$*$ f est *surjective* si tout élément y de Y admet au moins un antécécent, autrement dit si $f(X) = Y$;

$*$ f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément y de Y admet un et un seul antécécent.

Une application injective $f : X \to Y$ définit donc automatiquement une application bijective $\overline{f} : X \to f(X) : x \mapsto \overline{f}(x) := f(x)$, qu'on s'autorise à noter encore f.

Soit f une application bijective de X vers Y. Pour chaque élément y de Y, il existe, par définition, un et un seul élément x de X tel que $f(x) = y$. On le note $f^{-1}(y)$. L'application $f^{-1} : Y \to X : y \mapsto f^{-1}(y)$ de Y vers X ainsi définie est appelée application réciproque de la bijection f. Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x \in X, f^{-1}(f(x)) = x \text{ autrement dit : } f^{-1} \circ f = id_X;$$

$$\forall y \in Y, f(f^{-1}(y)) = id_Y(y) = y \text{ autrement dit : } f \circ f^{-1} = id_Y.$$

Ces propriétés entraînent que $f^{-1} : Y \to X$ est elle aussi bijective, et que son application réciproque $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ coïncide avec f.

On va étudier ces notions dans le cas des fonctions numériques définies sur un intervalle I, et continues sur I. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, leur image $f(I)$ est alors un intervalle J, et l'application $f : I \to J$ admet une application réciproque $f^{-1} : J \to I$ (autrement dit : est bijective) si et seulement si elle est injective. D'où la

Définition 18 *Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I, d'image l'intervalle J. On appelle fonction récriproque de f l'unique fonction $f^{-1} : J \to I$ telle que*

$$\forall x \in I, \forall y \in J \ : \ f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Remarques.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone (Chapite I, Définition 3). Alors, f est automatiquement injective.
2. Dans ce cas, on peut considérer la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$. Celle-ci est également *strictement monotome, et de même sens de monotonie que f*. En effet, supposons par exemple f strictement croissante, et soient $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ deux points de $f(I)$. Si $y_1 < y_2$, les points $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ vérifient forcément $x_1 < x_2$, sans quoi on aurait $y_1 > y_2$ d'après la croissance de f.

2.3.2 Fonctions réciproques et continuité

On vient de noter que si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors elle est automatiquement injective. La proposition suivante énonce que cette condition suffisante d'injectivité est également nécessaire si f est continue.

Proposition 8 *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Si f est injective, alors elle est strictement monotone.*

Preuve. Il suffit, f étant injective, de monter qu'elle est monotone. S'il n'en était pas ainsi, il existerait trois points $x < y < z$ de I tels que $f(x)$ et $f(z)$ soient tous les deux $> f(y)$ (ou tous deux $< f(y)$, auquel cas on remplacera f par $-f$ dans le raisonnement). Quitte à inverser les rôles de x et z dans ce qui suit, on peut supposer que $f(x) \leq f(z)$. Mais alors, $f(x) \in [f(y), f(z)]$ et le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la restriction de la fonction continue f à $[y, z]$, fournit un point t de l'intervalle $[y, z]$, donc distinct de x, tel que $f(t) = f(x)$. Cela contredit l'injectivité de f sur I.

Proposition 9 *Soient a, b deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b. Alors, $\alpha := \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta := \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existent, et l'intervalle $J = f(I)$ admet α et β pour extrémités. De plus, si I est fermé (resp. ouvert, resp. semi-ouvert), alors J est fermé (resp. ouvert, resp. semi-ouvert).*

Même si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné, cet énoncé n'est pas de même nature que le théorème de Weierstrass, puisqu'on précise ici où sont atteintes les bornes m, M de f. On notera par ailleurs que si I est ouvert en son extrémité a, c-à-d. si $a \notin I$, il se peut que a soit fini, mais que α soit infini, et inversement : penser à la fonction $f :]-\infty, 0[\to]-\infty, 0[: x \mapsto \frac{1}{x}$. Noter également que pour $a < b$, on a $\alpha < \beta$ si f est strictement croissante, sinon on a $\beta < \alpha$.

Principe de la preuve : on se ramène à étudier le comportement de f, strictement croissante, en l'extrémité inférieure a de I. Si $a \in I$, $\alpha = f(a)$ existe, appartient à $J = f(I)$ (par définition), et en est l'extrémité inférieure (croissance de f). Supposons maintenant $a \notin I$. Pour toute suite décroissante $(u_n, n \in \mathbb{N})$ de points de I tendant vers a, la suite $(f(u_n), n \in \mathbb{N})$ est décroissante, et admet donc une limite $\alpha_u \in \overline{\mathbb{R}}$. On vérifie alors que cette limite est indépendante du choix de la suite (u_n), et peut donc se noter α. On montre enfin que pout toute suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ de points de I tendant vers a , la suite $f(x_n)$ tend vers α. Ainsi, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$ existe. Dans ces conditions, α est adhérent à J, en est l'extrémité inférieure (croissance de f), et $\alpha \notin J$, sans quoi il existerait un sous-intervalle $]a, x]$, avec $x > a$, de I où f ne serait pas croissante.

Proposition 10 *Soient $f : I \to J$ une fonction continue et bijective de I vers J, et $f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque. Alors, f^{-1} est continue sur J.*

Preuve : soient u un point de J, et $a = f^{-1}(u)$ son antécédent relativement à f. Supposons que f^{-1} ne soit pas continue en u. Il existe alors un nombre $\delta > 0$ et une suite $(y_n), n \in \mathbb{N}$ de points de J tendant vers u, d'antécédents $x_n := f^{-1}(y_n)$, tels que pour tout entier n, $|x_n - a| > \delta$. Sans perte de généralité, on peut, en en extrayant une sous-suite, supposer la suite (y_n) strictement monotone. D'après la Remarque (2) ci-dessus, la suite (x_n) l'est alors aussi et admet donc une limite $a' \in \overline{\mathbb{R}}$, qui vérifie : $|a' - a| \geq \delta$, donc $a' \neq a$.

Montrons maintenant que a' appartient à I. En effet, a' est adhérent à l'intervalle I, donc si $a' \notin I$, c'en serait forcément une extrémité. On déduirait alors de la Proposition 9 d'une part que $\lim_{x\to a'} f(x)$ existe, et est donc égal à $\lim f(x_n) = \lim y_n = u$, d'autre part que cette limite n'appartiendrait non plus pas à J, ce que contredit l'hypothèse faite sur u. Ainsi, $a' \in I$.

Enfin, f est continue en $a' = \lim x_n$, donc la suite $y_n = f(x_n)$ tend vers $f(a')$. Or elle tend vers $u = f(a)$. Donc $f(a) = f(a')$, alors que a et a' sont deux points distincts de I. C'est la contradiction recherchée. ■

2.3.3 Théorème des fonctions réciproques

Théorème 21 (théorème des fonctions réciproques) *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors :*

1. *L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I, et ont le même type d'ouverture..*
2. *La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.*
3. *La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de monotonie que f.*
4. *Si la fonction f est dérivable en un point a de I et si $f'(a)$ est non nul, alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Preuve. Les points 1 , 2 et 3 ont été vus à la Remarque 2 et aux Propositions 9 et 10 qui précédent. Il reste à prouver le point 4. On suppose donc que la fonction f est dérivable en un point $a \in I$, et que la dérivée $f'(a)$ est non nulle.

Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ revient à montrer que le rapport

$$\tau_{f^{-1}}(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

a une limite finie quand y tend vers b en restant dans $J \setminus \{b\}$.

Si $y \in J \setminus \{b\}$, le nombre $x = f^{-1}(y)$, qui appartient à $I \setminus \{a\}$, vérifie par définition la condition $y = f(x)$. On trouve donc :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\tau_f(x)}.$$

Or la fonction f^{-1} est continue au point b. Donc, quand y tend vers b, le nombre $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$, et $\tau_f(x)$ tend vers $f'(a)$. Comme $f'(a)$ est supposée non nulle, on trouve bien que $\lim_{y \to b} \tau_{f^{-1}}(y)$ existe (donc f^{-1} est dérivable en b), et que cette limite vaut $\frac{1}{f'(a)}$.

Remarque 3 : une fois la dérivabilité de la fonction f^{-1} établie, la formule donnant sa dérivée est immédiate. En effet, on a pour tout $x \in I$: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, et la fonction $x \mapsto x$ a pour dérivée 1 en tout point. Si f est dérivable en a et si f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, on déduit donc du théorème 9 sur la dérivée des fonctions composées que $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(b) f'(a) = 1$. Ceci montre d'ailleurs que si $f'(a) = 0$, la fonction f^{-1} n'est pas dérivable en b.

2.3.4 Représentation graphique

Rappelons que le graphe $\mathcal{C} := \mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle I est l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, f(x))$, où x parcourt I.

Soit f un fonction continue strictement monotone sur l'intervalle I, et soit $J = f(I)$. Alors,

$$x \in I \text{ et } \quad f(x) = y \quad \text{ si et seulement si } \quad y \in J \text{ et } \quad f^{-1}(y) = x.$$

Il en résulte que le graphe $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C}_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1}, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(y, f^{-1}(y))$, où y parcourt l'intervalle J, coïncide avec l'ensemble des couples $(f(x), x)$, où x parcourt l'intervalle I.

Or, dans un repère orthonormé, le point de coordonnées (b, a) est le symétrique par rapport à la première bissectrice des axes de ce repère, du point de coordonnées (a, b). Par conséquent, dans un tel repère, *les graphes $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Cette observation fournit une troisième preuve de la formule donnant la dérivée de f^{-1} au point $b := f(a)$. Considérons en effet les points $A = (a, b)$ du graphe de f et $\tilde{A} = (b, a)$ du graphe de f^{-1}, et supposons que f soit dérivable en a, de dérivée $f'(a) \neq 0$. Alors, f^{-1} est dérivable en b, et on peut parler de la droite tangente $T_A(\mathcal{C})$ (resp. $T_{\tilde{A}}(\tilde{\mathcal{C}})$) au graphe de f en A (resp. de f^{-1} en $\tilde{A}$). Désignons par θ (resp. $\tilde{\theta}$) l'angle que fait avec l'axe Ox la tangente $T_A(\mathcal{C})$ (resp. $T_{\tilde{A}}(\tilde{\mathcal{C}})$). Comme $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, ainsi que A et $\tilde{A}$, il en va de même des droites $T_A(\mathcal{C})$ et $T_{\tilde{A}}(\tilde{\mathcal{C}})$. Les angles qu'elles forment avec l'axe Ox vérifient donc

$$\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

La pente $f'(a)$ de la droite $T_A(\mathcal{C})$ est égale à $\tan(\theta)$; de même, $(f^{-1})'(b) = \tan(\tilde{\theta})$. Or pour $\theta \not\equiv 0$ modulo π, on a : $\tan(\tilde{\theta}) = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}$. Donc $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

2.3.5 Exemples

Exemple 0 : la fonction logarithme

La fonction exponentielle $exp :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est dérivable, de dérivée > 0, donc strictement croissante. Elle admet donc une fonction réciproque $exp^{-1} :]0, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$, qui n'est bien sûr autre que la fonction ℓn. Si a est un point de $\mathbb{R}$, d'image $exp(a) = b \in]0, +\infty[$, on a $exp'(a) = exp(a) = b$, et on retrouve la formule $(\ell n)'(b) = \frac{1}{b}$.

On pourrait tout aussi bien démarrer avec la fonction ℓn, et définir exp comme la fonction récriproque de ℓn.

Exemple 1 : la fonction Arctangente

Soit f la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'après le théorème des fonctions réciproques, on peut affirmer que

$$f\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) =]\lim_{x\to -\pi/2^+} \tan(x), \lim_{x\to \pi/2^-} \tan(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

et que f établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction réciproque de f est appelée Arctangente et notée $x \mapsto \arctan(x)$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout réel x, $\arctan(x)$ est donc l'unique élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui a pour tangente le réel x. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \tan(\arctan(x)) = x.$$

Mais attention : si x est un nombre réel du domaine de définition $D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}[$ de la fonction tangente, il n'est en général **pas vrai** que $\arctan(\tan(x))$ soit égal à x. Par exemple, $\tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{4})) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$: il y a une infinité de réels dont la tangente est égale à 1, et parmi ces réels, seul $\frac{\pi}{4}$ appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Propriétés de la fonction Arctangente.

1. D'après le théorème des fonctions réciproques, la fonction Arctangente est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a : $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. La fonction Arctangente est impaire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine - et symétrique par rapport à la première bissectrice du graphe de la restriction f de tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$. La dérivée de f ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; la fonction Arctangente est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exemple 2 : la fonction Arcsinus

Soit g la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème des fonctions réciproques on peut affirmer que

$$g\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$$

et que g établit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

La fonction réciproque de g est appelée Arcsinus et notée $x \mapsto \arcsin(x)$. C'est une bijection de $[-1, 1]$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est donc l'unique élément de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ qui a pour sinus le réel x, et

$$\forall x \in [-1, 1] \ , \ \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Ainsi, $\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Attention : $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{6})) = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

Propriétés de la fonction Arcsinus.

1. La fonction Arcsinus est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

2. La fonction Arcsinus est impaire. Traduction géométrique comme plus haut. Noter que d'un point de vue géométrique, le graphe de arcsin “admet une tangente” aux points $(-1, -\frac{\pi}{2})$ et $(1, \frac{\pi}{2})$, mais ces droites tangentes sont verticales (ou si l'on veut : de pente infinie).

3. La fonction g est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $g'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. La dérivée de g ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; la fonction Arcsinus est donc dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exemple 3 : la fonction Arccosinus

Soit h la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction h est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. D'après le théorème des fonctions réciproques on peut affirmer que

$$h([0, \pi]) = [-1, 1]$$

et que h établit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

La fonction réciproque de h est appelée Arccosinus et notée $x \mapsto \arccos(x)$. C'est une bijection de $[-1, 1]$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est donc l'unique élément de l'intervalle $[0, \pi]$ qui a pour cosinus le réel x :

$$\forall x \in [-1, 1] \ , \ \cos(\arccos(x)) = x.$$

Ainsi, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}, \arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$.

Propriétés de la fonction Arccosinus.

1. La fonction Arccosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

2. La fonction h est dérivable sur $[0, \pi]$ et $h'(x) = -\sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)}$. La dérivée de g ne s'annule pas sur $]0, \pi[$; la fonction Arccosinus est donc dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Chapitre 3

Fonctions de plusieurs variables

Les notions abordées dans les chapitres III et IV qui suivent sont fondamentales : elles interviennent dans toutes les sciences, et cela justifie leur inscription au programme de L1. Mais il s'agit ici d'une simple introduction, qui nécessitera les outils d'algèbre linéaire et d'analyse de la 2ème année pour être développée.

3.1 Généralités

3.1.1 Domaines de définition, graphes.

Soient p un entier ≥ 1 et D une partie de $\mathbb{R}^p$. C'est essentiellement le cas $p = 2$ que nous étudierons ici : le passage de $p = 1$ à $p = 2$ est délicat, alors que le passage de $p = 2$ à $p > 2$ ne fait pas apparaître de phénomène nouveau.

Par définition (voir le §1.1.1), une application $f : D \to \mathbb{R}$ attache à tout point $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_p)$ de $D \subset \mathbb{R}^p$ un nombre réel $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_p)$. On dit que f est une fonction de p variables réelles, de *domaine de définition* D. Comme pour $p = 1$, on parle parfois simplement de la fonction $f(\mathbf{x})$, le domaine de définition $D = D_f$ de f étant alors à définir comme la plus grande partie de $\mathbb{R}^p$ où la formule donnée pour calculer le nombre $f(\mathbf{x})$ a un sens.

Pour $p = 2$, on note les variables (x, y) plutôt que (x_1, x_2). Par exemple, la fonction $f(x, y) = \ell n(xy)$ admet pour domaine de définition $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > 0\}$, c-à-d. la réunion du premier quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ et du 3e quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0\}$ du pan xOy. On dessinera D_f en hachurant ces deux quadrants. Le domaine de définition de la fonction $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est la partie $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ du plan, c-à-d. le disque de centre 0 et de rayon 1, cercle au bord compris. On dessinera D_g en hachurant l'intérieur du disque. (Dans tout ce qui suit, c'est sur "l'intérieur" de D, supposé non vide, qu'on se concentrera).

Le *graphe* d'une fonction de deux variables $f : D \to \mathbb{R}$ est la partie $\mathcal{S}_f$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Par exemple, si $f(x, y) = 2x + 3y - 5$, le graphe $\mathcal{S}_f$ est le plan d'équation $Z = 2X + 3Y - 5$ dans $\mathbb{R}^3$. Dans le cas général, $\mathcal{S}_f$ est une "surface" (mais c'est précisément au moyen des graphes que la notion de surface se définit rigoureusement). Pour tout point (x, y) du plan $xOy = \mathbb{R}^2$, considérons la droite verticale (c-à-d. parallèle à l'axe Oz) Δ passant par (x, y). Alors, Δ ne rencontre pas $\mathcal{S}_f$ si $(x, y) \notin D$, et rencontre $\mathcal{S}_f$ en exactement un point si $(x, y) \in D$.

Exemple : le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ est le demi-cône de révolution de sommet $O = (0, 0, 0)$, d'axe Oz, dont la génératrice fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec Oz.

Remarque ($F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$) : soit q un entier ≥ 1. Pour $D \subset \mathbb{R}^p$ comme plus haut, on peut, plus généralement, considérer des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^q$:

$$F : D \to \mathbb{R}^q : \mathbf{x} = (x_1, ..., x_p) \mapsto F(\mathbf{x}) := (z_1, ..., z_q) \in \mathbb{R}^q.$$

Pour tout $i = 1, ..., q$, la coordonnée z_i de $F(\mathbf{x})$ s'écrit alors $z_i = f_i(\mathbf{x})$, où $f_i : D \to \mathbb{R}$ est une fonction de p variables. Autrement dit, la donnée d'une application de D dans $\mathbb{R}^q$ équivaut à la donnée simultanée de q fonctions $f_i : D \to \mathbb{R}$, qu'on note parfois $z_i(\mathbf{x})$ $(i = 1, ..., q)$.

Pour $p = 1$ et $q = 2$, notons $t \in D \subset \mathbb{R}$ la variable de la source, et (x, y) les coordonnées de $\mathbb{R}^2$; une application $F : D \to \mathbb{R}^2$ revient à la donnée de deux fonctions $\{t \mapsto x(t), t \mapsto y(t)\}$, et décrit la position d'un point mobile du plan xOy en fonction du temps t. L'image $F(D) = \{(x(t), y(t)); t \in D\} \subset \mathbb{R}^2$ de F s'appelle alors la *trajectoire* de F : c'est une "courbe" du plan $\mathbb{R}^2$. Ne pas confondre la trajectoire de F avec son *graphe* $\mathcal{C}_F := \{(t, x(t), y(t)), t \in D\} \subset \mathbb{R}^3$, qui est une "courbe gauche" de l'espace $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si $D = \mathbb{R}$ et $F(t) = (\sin(t), \cos(t))$, la trajectoire de F est le cercle de centre O et de rayon 1 du plan xOy ; le graphe de F est une hélice de l'espace $Otxy$ (comme dans les molécules d'ADN).

Pour $p = q \geq 2$, une application $F : (D \subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^p$ s'appelle un *champ de vecteurs*. Pour représenter cette application, on dessine, en chacun des points $\mathbf{x}$ de D, le vecteur $F(\mathbf{x})$ en placant son origine en $\mathbf{x}$. Pour $p = q = 3$, on retrouve ainsi les champs de forces de la physique.

3.1.2 Courbes de niveau

Définition 19 *Soit $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables, définie dans le domaine D de $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour chaque nombre réel c, l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels tels que*

$$f(x, y) = c$$

est appelé courbe de niveau (c) de la fonction f.

La courbe de niveau c est donc la projection sur le plan xOy de l'intersection du graphe $\mathcal{S}_f$ de f avec le plan horizontal d'équation $Z = c$. Elle peut être vide (par exemple, pour la fonction $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ et le nombre $c = 2$). Elle peut être tout le plan (pour une fonction constante). Mais, en général, elle est constituée d'une ou de plusieurs courbes du plan.

Interprétation géographique : un point de la surface terrestre est repéré par 3 coordonnées : sa latitude x, sa longitude y et son altitude z. En dehors de reliefs exceptionnels (surplombs), l'altitude est une fonction $z = f(x, y)$ de (x, y), et la surface terrestre est le graphe $\mathcal{S}_f$ de cette fonction f. Pour tout c compris entre 0 (niveau de la mer) et le sommet d'une montagne, la courbe de niveau (c) décrit les coordonnées (x, y) des points d'altitude c de cette montagne. On peut la voir comme la projection sur le plan xOy du chemin que parcourt un promeneur voulant rester à l'altitude c. Les cartes IGN des régions montagneuses dessinent ces courbes pour des valeurs de c en progression arithmétique (par exemple : c = 2000 m, 2020 m, 2040 m, ...) ; plus elles sont rapprochées, plus la pente est forte.

Exemple 1. Soit D le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 2500\}$. On considère la fonction de deux variables

$$f : D \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := 2500 - x^2 - y^2.$$

Son graphe $\mathcal{S}_f$ est la surface obtenue en faisant tourner un arc de parabole autour de son axe vertical ; on l'appelle un paraboloïde de révolution. La courbe de niveau $c = 0$ est le cercle de centre O, de rayon 50 (qui, ici, borde D). La courbe de niveau $c = 1600$ est le cercle de centre O et de rayon 30. La "courbe" de niveau $c = 2500$ (altitude du sommet) est réduite au point O. Les courbes de niveau $c > 2500$ ou $c < 0$ sont vides.

Exemple 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := 1000 + xy.$$

Son graphe $\mathcal{S}_f$ est une surface en forme de col de montagne (ou à plus petite échelle, de selle de cheval). Pour $c > 1000$ (resp. $c < 1000$), sa courbe de niveau c est une hyperbole, dont les deux branches sont situées dans les 1er et 3e quadrants (resp. 2e et 4e quadrants) du plan xOy. Sa ligne de niveau 1000 est la reunion des axes de coordonnées Ox et Oy, et le point $(0, 0, 1000)$ s'appelle un point col de f. On dit que cette surface $\mathcal{S}_f$ est un paraboloïde hyperbolique (car son intersection avec un plan vertical d'équation $Y = mX, m \neq 0$, est une parabole).

3.2 Continuité

La continuité d'une fonction f de plusieurs variables se définit, comme celle des fonctions d'une variable, par une propriété du type $\lim \big(f(\mathbf{x}_n)\big) = f(\lim \mathbf{x}_n)$. On doit donc définir d'abord la limite d'une suite $(\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N})$ de points de $\mathbb{R}^p$.

3.2.1 Suites de $\mathbb{R}^p$

Nous limitons l'exposé au cas $p = 2$. Un point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^2$ est un couple (x, y) de réels. Une suite $(\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N})$ de points de $\mathbb{R}^2$ est donc un suite $((x_n, y_n), n \in \mathbb{N})$ de couples de nombres réels, c'est-à-dire un couple de suites $\big((x_n, n \in \mathbb{N}), (y_n, n \in \mathbb{N})\big)$ de nombres réels.

La distance (euclidienne) entre deux points $\mathbf{x} = (x, y)$ et $\mathbf{x}' = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ est le nombre réel

$$dist(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

qui est toujours ≥ 0, et est nul si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

Définition 20 *Soient $(\mathbf{x}_n = (x_n, y_n), n \in \mathbb{N})$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$, et $\mathbf{a} = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\delta_n := dist(\mathbf{x}_n, \mathbf{a}) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$$

la distance entre les points $\mathbf{x}_n$ et $\mathbf{a}$. On dit que la suite $(\mathbf{x}_n)$ converge vers $\mathbf{a}$ si la suite de nombres réels $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers 0.

Puisque $|x_n - a|$ et $|y_n - b|$ sont tous deux $\leq \delta_n$, tandis que $0 \leq \delta_n \leq |x_n - a| + |y_n - b|$, on a :

Proposition 11 . *Pour que la suite $(\mathbf{x}_n) = ((x_n, y_n))$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers le point $\mathbf{a} = (a, b)$, il faut et il suffit que la suite (x_n) converge vers a et que la suite (y_n) converge vers b.*

3.2.2 Continuité : définitions et propriétés élémentaires.

Définition 21 *Soit $F : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, et soit $\mathbf{a}$ un point de D. On dit que F est* continue en $\mathbf{a}$ *si pour toute suite $(\mathbf{x}_n)$ de points de D qui converge vers $\mathbf{a}$ (dans $\mathbb{R}^p$) , la suite $(F(\mathbf{x}_n))$ converge vers $F(\mathbf{a})$ (dans $\mathbb{R}^q$). On dit que F est* continue sur D *si elle est continue en tout point $\mathbf{a}$ de D.*

Exemples (avec $p = 2, q = 1$).

$*$ La fonction de deux variables définie sur $D = \mathbb{R}^2$ par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad \text{et } f(0, 0) = 0,$$

n'est pas continue au point $\mathbf{a} = (0, 0)$. En effet, la suite $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ de $\mathbb{R}^2$ tend vers $\mathbf{a}$, mais la suite (constante) $f(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{2}$ tend vers $\frac{1}{2} \neq f(\mathbf{a})$. Il n'y a d'ailleurs aucune valeur possible de $f(\mathbf{a})$ permettant de rendre cette fonction continue, car avec la suite $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n})$, qui tend aussi vers $\mathbf{a}$, on obtient une suite $f(\mathbf{x}_n) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, dont la limite dépendra du choix de λ.

$*$ La fonction de deux variables définie sur $D = \mathbb{R}^2$ par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad \text{et } f(0, 0) = 0,$$

est continue au point $\mathbf{a} = (0, 0)$. En effet, la relation $0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ entraîne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

donc $f(x, y) \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$. Ainsi, $0 \leq f(x, y) \leq dist(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$ pour tout points $\mathbf{x} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$. Pour toute suite $\mathbf{x}_n$ tendant vers $\mathbf{a}$, c-à-d. telle que la suite $dist(\mathbf{a}, \mathbf{x}_n)$ tende vers 0, la suite $f(\mathbf{x}_n)$ tend donc bien vers $0 = f(\mathbf{a})$.

Les énoncés suivants découlent facilement de la Proposition 11.

Proposition 12 (passage de $\mathbb{R}^q$ à $\mathbb{R}$) *Soit $F : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, et telle que pour $\mathbf{x}$ dans D, on ait $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x}))$ où les f_i sont des fonctions définies dans D et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction F est continue en un point $\mathbf{a}$ de D si et seulement si chacune des fonctions f_i est continue en $\mathbf{a}$.*

Théorème 22 (continuité et opérations algébriques). *Soit f et g des fonctions définies sur le même domaine D de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et continues sur D. Les fonctions $f + g$ et fg sont définies et continues sur D. Si la fonction g ne s'annule pas sur D, la fonction $1/g$ est définie et continue sur D.*

Théorème 23 (continuité et fonctions composées). *Soit F une fonction définie et continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, et soit G une fonction définie et continue sur un domaine E de $\mathbb{R}^q$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^s$. On suppose que $F(D)$ est contenu dans E. Alors la fonction composée $G \circ F : D \to \mathbb{R}^s$ est définie et continue sur le domaine D.*

3.3 Dérivabilité des fonctions de deux variables

3.3.1 Définitions

C'est la Définition 11 du §1.4.1 (c'est-à-dire l'existence d'un $d\ell_1$) qui permet d'étendre à plusieurs variables la notion de fonction dérivable en un point.

Définition 22 *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, et soit $\mathbf{a} = (a, b)$ un point de D. On dit que la fonction f est dérivable en $\mathbf{a}$ s'il existe des nombres réels A et B tels que :*

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + dist(\mathbf{x}, \mathbf{a})\epsilon(x - a, y - b)$$

où $dist(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ est la distance entre les points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{a}$, et où ϵ désigne une fonction (de deux variables) continue et nulle en $(0, 0)$.

Remarques.

1. Si une suite $(\mathbf{x}_n) = (x_n, y_n)$ de points de D tend vers $\mathbf{a}$, la suite $dist(\mathbf{x}_n, \mathbf{a})$ tend vers 0, et la suite $\epsilon(x_n - a, y_n - b)$ tend donc aussi vers 0. La formule prédédente montre que la suite $f(\mathbf{x}_n)$ tend alors $f(\mathbf{a})$. Par conséquent, une fonction dérivable en $\mathbf{a}$ est automatiquement continue en $\mathbf{a}$. Bien entendu, la réciproque est fausse : la fonction $f(x, y) = |x|$ est continue, mais pas dérivable, en $(0, 0)$

2. Si f est dérivable en $\mathbf{a}$, on vérifie, en choisissant des suites de la forme (x_n, b) et (a, y_n), que les nombres A et B sont alors uniques. Une façon de les décrire simultanément consiste à introduire la *forme linéaire* L sur $\mathbb{R}^2$ définie par $(u, v) \mapsto L(u, v) = Au + Bv$. Cette forme linéaire s'appelle la *différentielle* de f en (a, b). On peut aussi introduire le vecteur (A, B) de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle le *gradient* de f en (a, b).

3.3.2 Dérivées partielles.

Supposons la fonction f dérivable au point $\mathbf{a} = (a, b)$. Si on ne fait varier que x en fixant $y = b$, on constate que la fonction $\phi : x \mapsto \phi(x) := f(x, b)$ vérifie la relation

$$\phi(x) = f(x, b) = f(a, b) + A(x - a) + |x - a|\epsilon(x - a, 0) = f(a, b) + A(x - a) + (x - a)\epsilon(x - a),$$

où ϵ désigne maintenant une fonction de type ϵ d'une variable. Cette relation montre que la fonction ϕ est dérivable en a et que $\phi'(a) = A$. De même, si on ne fait varier que y en fixant $x = a$, on constate que la fonction $\theta : y \mapsto \theta(y) := f(a, y)$ est dérivable en b et que $\theta'(b) = B$.

Définition : les fonctions d'une variable $\phi(x) = f(x, b)$ et $\theta(y) = f(a, y)$ sont appelées les *applications partielles* de f au point (a, b). On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x (resp. y) au point (a, b) si la fonction ϕ (resp. θ) est dérivable en a (resp. b). Dans ces conditions, on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \phi'(a), \text{ resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \theta'(b).$$

Ces expressions s'appellent les *dérivées partielles* par rapport à x (resp. à y) de f au point (a, b). Ainsi, une fonction dérivable en (a, b) satisfait l'égalité :

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \left((x - a)^2 + (y - b)^2\right)^{1/2} \epsilon(x - a, y - b)$$

où ϵ est une fonction continue et nulle en (0,0). La différentielle de f en (a, b) est alors la forme linéaire en deux variables

$$L(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\ u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\ v.$$

Le gradient de f en (a, b) est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Une fonction $f(x, y)$ peut fort bien admettre des dérivées partielles en (a, b) sans qu'elle soit dérivable en (a, b). Par exemple, la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0$, considérée plus haut admet pour applications partielles au point $(0, 0)$ les fonctions $\phi(x) = f(x, 0) = 0$, $\theta(y) = f(0, y) = 0$, qui sont identiquement nulles, donc dérivables. Donc les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent (et sont nulles). Mais f n'est pas dérivable en $(0, 0)$, puisqu'elle n'y est même pas continue.

Néanmoins, soit f une fonction de deux variables définie sur un disque $D \subset \mathbf{R}^2$ de centre $\mathbf{a}$, de rayon > 0. Supposons que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en *tout* point (x, y) de D, et que ces dérivées partielles soient des fonctions *continues* sur D. On peut alors démontrer que f est dérivable au point $\mathbf{a}$.

Dérivabilité d'applications composées

Théorème 24 *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un point de I. On suppose que la trajectoire de l'application $(u, v) : I \to \mathbb{R}^2$ est contenue dans D, que les fonctions u et v sont dérivables en a, et que la fonction f est dérivable au point $(u(a), v(a)) \in D$. Alors la fonction d'une variable $g : I \to \mathbb{R}, t \mapsto g(t) := f(u(t), v(t))$ est dérivable en a et :*

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(a), v(a))u'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(a), v(a))v'(a).$$

Preuve. Puisque f est dérivable au point $(u(a), v(a))$,

$$f(x, y) = f(u(a), v(a)) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(a), v(a))(x - u(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(a), v(a))(y - v(a))$$

$$+ \left((x - u(a))^2 + (y - v(a))^2\right)^{1/2} \epsilon(x - u(a), y - v(a)).$$

Puisque u et v sont dérivables au point a,

$$u(t) = u(a) + (t - a)u'(a) + (t - a)\epsilon(t - a), \quad v(t) = v(a) + (t - a)v'(a) + (t - a)\epsilon(t - a).$$

En utilisant la définition de g et en reportant dans la première relation, on obtient :

$$g(t) - g(a) = (t - a)\left((u'(a) + \epsilon(t - a))\frac{\partial f}{\partial x}(u(a), v(a)) + (v'(a) + \epsilon(t - a))\frac{\partial f}{\partial y}(u(a), v(a))\right)$$

$$+|t - a| \left((u'(a) + \epsilon(t - a))^2 + (v'(a) + \epsilon(t - a))^2\right)^{1/2} \epsilon(t - a)$$

autrement dit

$$g(t) = g(a) + \left(u'(a)\frac{\partial f}{\partial x}(u(a), v(a)) + v'(a)\frac{\partial f}{\partial y}(u(a), v(a))\right)(t - a) + (t - a)\epsilon(t - a),$$

et g admet bien un $d\ell_1$ en a, de la forme recherchée.

Par une preuve du même style, on obtient :

Théorème 25 *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle J de $\mathbf{R}$, soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J et soit (a, b) un point de D. On suppose f dérivable en (a, b) et g dérivable en $c = f(a, b)$. Alors, $h := g \circ f$ est dérivable en (a, b), et on a*

$$\frac{\partial h}{\partial x}(a,b) = g'(c)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ , \ \frac{\partial h}{\partial y}(a,b) = g'(c)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

3.3.3 Plan tangent au graphe

Ce paragraphe fait pendant au §1.5.4 du chapitre I . Soient $f : (D \subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, définie sur D, de sorte que le graphe $\mathcal{S}_f$ de f est une surface de $\mathbb{R}^3$ se projetant sur D, et soit (a, b) un point de D, d'image $c = f(a, b)$. La surface $\mathcal{S}_f$ passe donc par le point $A = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ d'abscisse $x_A = a$, d'ordonnée $y_A = b$, de cote $z_A = c = f(a, b)$.

Soit par ailleurs Π un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par le point A. Si Π n'est pas vertical (c-à.d pas parallèle à l'axe Oz), il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad (x,y,z) \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad z - c = \alpha(x-a) + \beta(y-b).$$

On dit alors que $Z = c + \alpha(X - a) + \beta(Y - b)$ est l'équation du plan Π. Relativement à un repère orthonormé, un point $P = (x, y, z)$ est situé sur le plan Π si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AP} = (x-a, y-b, z-c)$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{N_\Pi} = (\alpha, \beta, -1)$, qu'on appelle le vecteur normal au plan Π.

Pour tout point (x, y) de D, notons Δ la droite verticale passant par (x, y). Comme on l'a dit au §3.1.1, Δ rencontre $\mathcal{S}_f$ en un seul point $P = (x, y, f(x, y))$, de cote $z_P = f(x, y)$. Pour un plan Π non vertical comme ci-dessus, Δ renconte Π en un seul point $Q = (x, y, z_Q)$, de cote $z_Q = c + \alpha(x - a) + \beta(y - b)$. La valeur absolue de la différence

$$z_P - z_Q = f(x,y) - f(a,b) - \alpha(x-a) - \beta(y-b)$$

mesure donc la longeur du segment vertical PQ, tandis que son signe indique la position de Π par rapport à $\mathcal{S}_f$. Pour $(x, y) = (a, b)$, les points P et Q coïncident avec le point A, et cette différence s'annule.

Supposons maintenant que f est dérivable au point (a, b). Alors,

$$f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\epsilon(x-a, y-b),$$

de sorte qu'avec le choix $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, la différence $z_P - z_Q$ devient plus petite que n'importe quelle fonction non nulle de la forme $A(x - a) + B(y - b)$ lorsque le point (x, y) s'approche suffisamment du point (a, b). D'où la définition suivante.

Définition 23 *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable en un point (a, b) de D, le plan $\Pi_A(\mathcal{S}_f)$ d'équation*

$$Z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(X-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(Y-b)$$

est appelé plan tangent au graphe $\mathcal{S}_f$ de f au point $A = (a, b, f(a, b))$.

Le raisonnement fait plus haut montre que le plan tangent est, parmi tous les plans qui passent par le point A, celui qui approche le mieux la surface $\mathcal{S}_f$. On retiendra que le gradient de f en (a, b) donne les deux premières coordonnées du vecteur normal au plan tangent.

3.4 Théorème des fonctions implicites.

Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, et le cercle d'équation $f(x,y) = 0$. Ce cercle ne peut être le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$, puisqu'une droite verticale peut le rencontrer en deux points. Mais tout arc du cercle ne contenant ni le point $(1,0)$ ni le point $(-1,0)$ est le graphe d'une fonction ($\sqrt{1+x^2}$ ou $-\sqrt{1+x^2}$, suivant que l'arc est au dessus ou au dessous de l'axe Ox). Les points $(a,b) = (1,0)$ et $(-1,0)$ à éviter vérifient $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Plus généralement :

Théorème 26 (théorème des fonctions implicites) *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et (a,b) un point de D tel que $f(a,b) = 0$. On suppose que D contient un disque de centre (a,b), de rayon > 0, que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en tout point (x,y) de D, et que ces fonctions sont continues sur D. Enfin, on suppose que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant le point a, un intervalle ouvert J contenant le point b, et une fonction φ définie et continue sur I, à valeurs dans J (et unique si I est suffisamment petit) tels que $I \times J \subset D$ et que

$$\forall (x,y) \in I \times J \quad : \quad f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

(en particulier, $\varphi(a) = b$). De plus, φ est dérivable en a, et

$$\varphi'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

La démonstration de ce théorème est difficile et nécessite des connaissances qui ne seront abordées qu'en troisième année. Cependant, si on admet que φ existe et est dérivable en a, on peut facilement retrouver la valeur de $\varphi'(a)$: puisque la fonction $f(x, \varphi(x))$ est identiquement nulle sur I, sa dérivée en a est nulle ; la formule de dérivation d'une fonction composée (théorème 24) entraîne alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).\phi'(a) = 0$.

Plus généralement, soit $\mathbf{a} = (a,b)$ un point de D, d'image $c = f(a,b)$, tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, et soit Γ la courbe de niveau (c) du graphe $\mathcal{S}_f$ de f. Elle passe par le point $\mathbf{a}$, et le théorème 26, appliqué à la fonction $f(x,y) - c$, montre qu'au voisinage de ce point, Γ est le graphe d'une fonction ϕ dérivable en a. Par conséquent, Γ admet une tangente $T_\Gamma(\mathbf{a})$ au point $\mathbf{a}$, dont l'équation est donnée par $Y - b = \varphi'(a)(X - a)$, soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(X-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(Y-b) = 0. \qquad (T_\Gamma(\mathbf{a}))$$

Ainsi, la tangente à Γ en $\mathbf{a}$ est perpendiculaire au gradient de f en $\mathbf{a}$. On peut en déduire que les courbes de niveau de la surface $\mathcal{S}_f$ sont perpendiculaires à ses “lignes de plus grande pente", c-à-d. aux directions le long desquelles la fonction f croît le plus vite possible. On déduit par ailleurs de la Définition 23 que $T_\Gamma(\mathbf{a})$ est la projection sur le plan xOy de l'intersection du plan horizontal d'équation $(Z = c)$ avec le plan tangent $\Pi_A(\mathcal{S}_f)$ à $\mathcal{S}_f$ en A..

Chapitre 4

Équations différentielles

On appelle équation différentielle une équation dont l'inconnue est un fonction $y(x)$ d'une variable réelle x, et où interviennent y, une ou plusieurs de ses dérivées y', y'', $...y^{(n)}$, ainsi qu'éventuellement la variable x elle-même : par exemple,

$$y' = 2y \ \ , \ \ yy' + x = 1 \ \ , \ \ y' + y^2 = 0 \ \ , \ \ y'' = y' - xy^2 \ ,$$

sont des équations différentielles. Toutes ces équations peuvent s'écrire

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

où f est une fonction réelle de plusieurs variables. Le plus grand entier n intervenant dans f s'appelle l'ordre de l'équation différentielle. Dans les exemples précédents, il vaut respectivement 1 , 1 , 1 , 2 . Les équations différentielles généralisent donc les équations de la forme $f(x, y) = 0$, que traite le théorème des fonctions implicites, et qu'on peut voir comme des équations différentielles d'ordre 0.

On dit qu'une fonction φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une solution sur I de l'équation différentielle $f(x, y, y', ...y^{(n)}) = 0$ si φ est n-fois dérivable sur l'intervalle I, et si pour tout nombre x de l'intervalle I, on a : $f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0$. Insistons sur le fait qu'une solution de l'équation différentielle est la donnée du couple formé de la fonction φ *et* de son intervalle de définition I.

Exemple : pour tout nombre réel $c > 0$, la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{x-c}$ est définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, où elle vérifie $\varphi'(x) = -\frac{1}{(x-c)^2} = -(\varphi(x))^2$. C'est donc une solution sur I de l'équation différentielle $y' + y^2 = 0$ (ce qui montre qu'une équation différentielle possède en général une infinité de solutions), mais cette équation n'admet que la solution $\varphi_0 = 0$ sur $I' =]-\infty, +\infty[$. De même, l'équation différentielle $xy' - 1 = 0$ possède une infinité de solutions sur $I =]0, +\infty[$, de la forme $\varphi(x) = \ell n(x) + c$, mais aucune sur $I'' =] - 1, + + \infty[$.

Nous nous limitons dans ce qui suit à des équations d'ordre 1 (puis 2) linéaires, c-à-d. où la fonction f est une forme linéaire affine en y, y' (et y'') ; pour l'ordre 2, on impose de plus des contraintes à la dépendance de f en x. Avec ces restrictions, on dispose d'algorithmes généraux pour trouver toutes les solutions. Ce sont ces algorithmes qu'il convient de connaître.

4.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

4.1.1 Équations différentielles du premier ordre sans second membre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre (on dit aussi : homogène) est une équation de la forme

$$y' = a(x)y \quad , \quad (\mathcal{E}_a)$$

où a est une fonction de x que l'on suppose continue sur un intervalle ouvert donné I de $\mathbb{R}$.

La fonction nulle $\varphi_0 = 0$ est clairement une solution de $\mathcal{E}_a$ sur I. Si φ_1, φ_2 sont deux solutions sur I, la fonction $\varphi_1 + \varphi_2$ en est également une, car $(\varphi_1 + \varphi_2)'(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = a(x)\varphi_1(x) + a(x)\varphi_2(x) = a(x)(\varphi_1 + \varphi_2)(x)$ pour tout $x \in I$. De même, si α est une constante réelle, la fonction $\alpha\varphi_1$ est solution, puisque $(\alpha\varphi_1)'(x) = \alpha\varphi_1'(x) = a(x)(\alpha\varphi_1)(x)$. En d'autres termes, l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_a$ sur I forme un *espace vectoriel*.

Nous allons maintenant *construire* une solution φ de $\mathcal{E}_a$ non identiquement nulle sur I. Pour cela, nous notons que si J est un sous-intervalle de I où une telle solution φ ne s'annule en aucun point (il en existe par continuité de φ), alors

$$\forall x \in J \ , \ \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a(x).$$

La fonction continue φ ne s'annulant pas sur J, elle y garde un signe constant. Si $\varphi > 0$, la fonction $\ell n \circ \phi$ est définie et dérivable sur J, et vérifie $(\ell n(\varphi(x))' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a(x)$. Dans ces conditions, soit

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt \qquad (x \in I)$$

une primitive de la fonction continue $a(x)$, de sorte que la dérivée de la fonction $\ell n \circ \phi - A$ est identiquement nulle sur J. Comme J est un *intervalle*, il existe donc une constante C telle que

$$\forall x \in J \ , \ \ell n(\phi(x)) = A(x) + C.$$

En posant $K = e^C \in \mathbb{R}, K > 0$, on en déduit que

$$\varphi(x) = Ke^{A(x)}.$$

Si $\varphi < 0$ sur J, c'est la fonction $\ell n \circ (-\varphi)$ qui vérifie les propriétés précédentes, et le même raisonnement entraîne que $\varphi(x) = Ke^{A(x)}$, où $K \in \mathbb{R}, K < 0$. Dans tous les cas, la fonction $\varphi = Ke^{A(x)}$ ainsi construite est définie sur tout I, y est dérivable, et vérifie bien

$$\forall x \in I \ , \ \varphi'(x) = KA'(x)e^{A(x)} = a(x)\varphi(x).$$

C'est donc une solution non nulle de $\mathcal{E}_a$ sur I.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_a$ sur I est un espace vectoriel de dimension ≥ 1. De plus, la preuve précédente montre que tous ses éléments sont linéairement dépendants de la solution $e^{A(x)}$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 1.

4.1.2 Équations différentielles du premier ordre avec second membre

Il s'agit des équations de la forme

$$y' = a(x)y + b(x) \quad , \quad (\mathcal{E}_{a,b})$$

où a et b sont des fonctions de x, supposées continues sur un intervalle donné I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $b(x)$ est le second membre de l'équation, tandis que l'équation différentielle $y' = a(x)y$ correspondante est appelée équation sans second membre ou équation homogène associée.

Proposition 13 *Soit y_1 et y_2 deux solutions (définies sur le même intervalle J) de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$. Alors la différence $y_2 - y_1$ est une solution (définie sur J) de l'équation homogène associée $y' = a(x)y$.*

Preuve : avec les notations de l'énoncé : $(y_2-y_1)' = a(x)y_2+b(x)-(a(x)y_1+b(x)) = a(x)(y_2-y_1)$.

Par conséquent, si on connaît une solution y_0 de $\mathcal{E}_{a,b}$ définie sur un intervalle J, n'importe quelle solution y de $\mathcal{E}_{a,b}$ sur J sera de la forme $y_0 + \varphi$ où φ est une solution de $(\mathcal{E}_a)$ Autrement dit,

$$y(x) = y_0(x) + Ke^{A(x)},$$

où K est une constante réelle arbitraire, et $A(x)$ une primitive de $a(x)$. On énonce ce principe en disant que *la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre.*

Reste donc à trouver une solution particulière y_0 de $(\mathcal{E}_{A,b})$. Il y pour cela deux méthodes.

1 . Quelques cas particuliers (pour $a(x)$ constant)

Quand $a(x) = r$ est une constante (de sorte que la solution générale de $(\mathcal{E}_a)$ est Ke^{rx}), et que b est assez simple, on peut parfois trouver une solution y_0 proche de la forme de b. Par exemple,

- si $b(x)$ est un polynôme $P_n(x)$ de degré n, on cherchera y_0 sous la forme d'un polynôme $Q_n(x)$ de même degré n ;

- si $b(x) = \lambda e^{sx}$, avec $s \neq r$, on cherchera y_0 sous la forme μe^{sx} ; de même, si $b(x) = P_n(x)e^{sx}$, on tentera $y_0 = Q_n(x)e^{sx}$.

- si $b(x) = \lambda e^{rx}$, on cherchera y_0 sous la forme $\mu x e^{rx}$; de même, si $b(x) = P_n(x)e^{rx}$, on tentera $y_0 = Q_{n+1}(x)e^{rx}$.

- si $b(x)$ est une combinaison linéaire de $\cos(sx)$ et de $\sin(sx)$, on cherchera y_0 sous la même forme.

- enfin, on notera que si y_1 (resp. y_2) est une solution particulière de $(\mathcal{E}_{a,b_1})$ (resp. $(\mathcal{E}_{a,b_2})$, alors, $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_{a,b_1+b_2})$.

2 . La méthode de variation de la constante (pour $a(x)$ quelconque)

Cette méthode consiste à rechercher une solution particulière de $\mathcal{E}_{a,b}$ sous la forme

$$y_0(x) = K(x)e^{A(x)},$$

c'est-à-dire à remplacer la constante K apparaissant dans la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_a)$ par une fonction $K(x)$, supposée dérivable sur I. De $y_0'(x) = a(x)y_0(x)+b(x)$, on tire :

$$(a(x)K(x) + K'(x))e^{A(x)} = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x)$$

d'où une équation différentielle sur K ne faisant apparaître que K' :

$$K'(x) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Toute primitive $K_0(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt$ fournit donc une solution particulière $y_0(x) = K_0(x)e^{A(x)}$ de $\mathcal{E}_{a,b}$.

Exemple : trouver les solutions de $y' = \frac{1}{x}y + 1$ sur $I =]0, +\infty[$

Ici, $A(x) = \ell n(x)$, donc l'équation homogène associée $y' = \frac{1}{x}y$ a pour solution générale $\varphi(x) = Ke^{\ell n(x)} = Kx$ sur I. Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, recherchée sous la forme $y_0(x) = K(x)x$, vérifie $y_0' = K'(x)x + K(x) = K(x) + 1$, d'où

$$K'(x) = \frac{1}{x}, \quad K(x) = \ell n(x) + C.$$

La solution générale de l'équation sur $]0, +\infty[$ est donc

$$y(x) = x\ \ell n(x) + Cx, \quad x > 0\ ,\ C \in \mathbb{R}.$$

[*NB : le paragraphe §4.2 qui suit ne fait pas partie du programme de l'examen.*]

4.2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Les équations linéaires homogènes du deuxième ordre sont de la forme

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0\ ,\ (\mathcal{E})$$

où $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle donné I de $\mathbb{R}$.

Comme pour celles du premier ordre, on vérifie aisément que les solutions de $\mathcal{E}$ sur I forment un espace vectoriel. L'énoncé suivant montre que cet espace vectoriel est de dimension ≤ 2.

Théorème 27 *Soit u et v deux solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. Alors toute solution y de $(\mathcal{E})$ sur I s'écrit $y = \alpha u + \beta v$ où α, $\beta \in \mathbb{R}$.*

Preuve : sur un sous-intervalle J de I où v ne s'annule pas, la fonction $\frac{u}{v}$ n'est par hypothèse pas constante. En prenant sa dérivée, on en déduit que la fonction $w = uv' - u'v$ n'est pas identiquement nulle sur J. Or

$$w' = (uv'' + u'v' - u'v' - u''v) = u(-bv' - cv) + (bu' + cu)v = -b(x)w.$$

Ainsi, w est une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. D'après le §4.1.1, elle ne s'annule donc en aucun point de l'intervalle I.

Soit maintenant y une autre solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur I. Il existe alors deux fonctions $A(x), B(x)$, définies et dérivables sur I, telles que

$$y = Au + Bv, \quad y' = Au' + Bv' \qquad (*)$$

Elles sont en effet données (formules de Cramer) par $A = \frac{v'y - vy'}{w}$, $B = \frac{-u'y + uy'}{w}$. En dérivant les relations $(*)$, on obtient :

$$y' = A'u + B'v + Au' + Bv', \quad y'' = A'u' + B'v' + Au'' + Bv'' = A'u' + B'v' - A(bu' + cu) - B(bv' + cv)$$

Or l'équation $(\mathcal{E})$, jointe aux relations $(*)$, donne :

$$y'' = -by' - cy = -Abu' - Bbv' - Acu - Bcv,$$

d'où finalement :

$$A'u + B'v = 0 \quad , \quad A'u' + B'v' = 0.$$

Comme $w \neq 0$, on en déduit que A' et B' sont identiquement nulles. Les fonctions $A(x) = \alpha$ et $B(x) = \beta$ sont donc constantes sur I, et $y = \alpha u + \beta v$ est une combinaison linéaire à coefficients constants de u et v. ■

Par les mêmes techniques que celles qui établissent le théorème des fonctions implicites, on démontre que l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{E})$ est toujours de dimension 2. Nous allons le vérifier dans le cas particulier où ses coefficients $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions constantes, en *construisant* dans ce cas deux solutions linéairement indépendantes explicites (et définies sur $I = \mathbb{R}$ tout entier). Pour plus de symétrie, on réécrit l'équation sous la forme

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad , (E)$$

où $a \neq 0, b, c$ sont trois *nombres réels*.

Expression des solutions de (E).

On associe à l'équation différentielle (E) l'équation du second degré :

$$ar^2 + br + c = 0 \quad , (R)$$

qu'on appelle son équation caractéristique.

$*$ Si l'équation (R) admet deux racines réelles distinctes r et s, les solutions de (E) s'écrivent

$$y(x) = \alpha e^{rx} + \beta e^{sx} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}).$$

D'après le théorème 27, il suffit de vérifier que les fonctions $u(x) = e^{rx}, v(x) = e^{sx}$, qui sont bien linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$, sont solutions de (E). Or $u'(x) = re^{rx}$, $u''(x) = r^2e^{rx}$, donc $au'' + bu' + cu = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$, et de même pour v.

$*$ Si l'équation (R) admet deux racines complexes non réelles, ces racines sont conjuguées et s'écrivent $r \pm is$. Les solutions de (E) sont dans ce cas :

$$y = e^{rx}(\alpha \cos(sx) + \beta \sin(sx)) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}).$$

Il suffit de nouveau de vérifier que les fonctions, linéairement indépendantes, $e^{rx}\cos(sx)$ et $e^{rx}\sin(sx)$ sont des solutions de (E), ce qui résulte d'un calcul similaire. On peut d'ailleurs aussi écrire les solutions sous la forme $y = Ae^{rx}\cos(sx + \theta)$, où A et θ sont des constantes arbitraires.

$*$ Si l'équation (2) admet une racine double r (nécessairement réelle), les solutions sont :

$$y = (\alpha x + \beta)e^{rx} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}).$$

Vu ce qui précède, il reste à vérifier que $v(x) = xe^{rx}$ est solution de (E). Simple calcul, en notant que puisque r est une racine double, $2ar + b = 0$.

Un mot, enfin, sur les *équations à second membre*

$$ay'' + by' + cy = d(x) \quad , (\tilde{E})$$

d'équation homogène associée (E), où $d(x)$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. Ici encore, la solution générale y de $(\tilde{E})$ est la somme d'une solution particulière y_0 et de la solution générale $\alpha u + \beta v$ de l'équation (E). À l'instar de la première méthode décrite au §4.1.2, c'est sous une forme semblable au second membre $d(x)$ qu'on recherchera y_0.