UPMC Licence L3 de mathématiques 13-14

D. Bertrand *LM 323 - Géométrie affine et euclidienne*

Examen du 14 Mai 2014

Durée: 2 heures

Les documents, calculettes, portables... ne sont pas autorisés.
Les 3 énoncés sont indépendants.
Les réponses devront être justifiées (sauf pour la question de cours).

I (9 pts sur 25)

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine sur un corps K, et $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. On désigne par $(x, y, z), x + y + z = 1$, les coordonnées barycentriques relatives à $\mathcal{R}$.

1^0/ (**Question de cours**) On considère trois droites de $\mathcal{E}$, d'équations en coordonnées barycentriques $(\mathcal{D}) : ax + by + cz = 0, (\mathcal{D}') : a'x + b'y + c'z = 0, (\mathcal{D}'') : a''x + b''y + c''z = 0$. Donner sans démonstration

i) une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ soient parallèles;

ii) une condition nécessaire pour que $(\mathcal{D}), (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ soient concourantes. Montrer par un exemple que cette condition n'est pas suffisante.

2^0/ Dans cette question et la suivante, on suppose que $K = \mathbb{R}$. Sur les côtés du triangle ABC, on place trois points A', B' et C' de façon que

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

i) Calculer les coordonnées barycentriques des points A', B', C'.

ii) Donner une équation de la droite (AA') en coordonnées barycentriques. Même question pour la droite (BB').

3^0/ i) Montrer que les droites (BB') et (AA') se rencontrent en un point M, dont on calculera les coordonnées barycentriques.

ii) Soit N le point de (AA') tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$. Calculer ses coordonnées barycentriques, et montrer que les points C, N et C' sont alignés.

iii) Montrer que les droites (AB) et (CM) se rencontrent en un point C'', et donner la valeur de $\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{AB}}$.

4^0/ On suppose maintenant que K est un corps de caractéristique p finie, avec $p \neq 3$. Pour quelle valeur p_1 du nombre premier p les droites (BB') et (AA') sont-elles parallèles ? Même question, en supposant $p \neq p_1$, pour les droites (AB) et (CM).

T. S. V. P.

II (8 pts sur 25)

Soient a et b deux nombres réels. On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^4$ les sous-ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ définis respectivement par les systèmes d'équations

$$(\mathcal{F})\ \left\{\begin{array}{r} x+2y+z+3t=4 \\ -2x+y-3z-5t=3b \end{array}\right. \qquad (\mathcal{G})\ \left\{\begin{array}{r} -x+y=1 \\ 2x-y+z+at=-b \end{array}\right.$$

1°/ Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces affines, et calculer leur dimension.

2°/ Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas parallèles.

3°/ On suppose que $a \neq 2$. Montrer que l'intersection de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est réduite à un point.

4°/ On suppose désormais que $a = 2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ lorsque cette intersection est non vide.

5°/ Toujours avec $a = 2$, montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide si et seulement si $b = 1$.

6°/ On suppose que $a = 2$ et $b = 1$.
i) Trouver un élément non nul $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel directeur de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
ii) Trouver un point P de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ situé sur l'hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $t = 0$.

III (8 pts sur 25)

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, muni de son repère cartésien usuel $\{\overrightarrow{0}; \mathcal{B}\}$, où $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ est la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ représentée par $X \mapsto f(X) = AX + B$, où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1^0/ Montrer que A est la matrice d'une rotation de l'espace vectoriel E.

2^0/ Déterminer l'axe Δ de cette rotation.

3^0/ Calculer son angle θ.

4^0/ Montrer que f est un vissage de $\mathcal{E}$ et calculer son vecteur de glissement $\overrightarrow{u}$.

5^0/ Soit $\mathcal{D}$ l'axe du vissage f. Trouver un point P de $\mathcal{D}$, et décrire $\mathcal{D}$.

6°/ Soient Π le plan de E orthogonal à $\overrightarrow{u}$, et $\{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}''\}$ une base orthonormée de Π. Écrire la représentation de f dans le repère cartésien $\{P; \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}''\}\}$ de $\mathcal{E}$. .

Corrigé

I 1^o/ i) $\mathcal{D}//\mathcal{D}' \Leftrightarrow det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0$. - ii) $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'\cap\mathcal{D}'' \neq \emptyset \Rightarrow det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0$. Mais trois droites parallèles et deux à deux distinctes vérifient cette condition, sans être concourantes. [Cf poly, 3.15.4.(4) et (5).]

2^o/ i) $A' = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $B' = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$, $C' = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$. - ii) La condition d'alignement des points $A \neq A'$ et $M = (x, y, z)$ est $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$ (poly, 3.15.5), donc $(AA') : 2y - z = 0$. De même, $(BB') : -x + 2z = 0$.

3^o/ i) $det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 7 \neq 0$, donc (AA') et (BB') ne sont pas parallèles, et se rencontrent en un point $M = (x, y, z)$ avec $2y - z = 0, -x + 2z = 0, x + y + z = 1$, soit $M = (\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7})$. - ii) $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$, donc $N = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$. Les points C, C', N sont alignés puisque $det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = 0$. [Autre méthode : l'équation de (CC') est $2x - y = 0$, que vérifie bien N.] - iii) L'équation de la droite (CM) est $x - 4y = 0$, celle de (AB) est $z = 0$ et $det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, donc elles ne sont pas parallèles, et se rencontrent en un point $C'' = (x, y, 0)$ avec $x - 4y = 0, x + y = 1$, soit $C'' = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0)$, d'où : $\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{5}$.

4^o/ Le critère du 1/i), joint au calcul du 3/i), montre $(AA')//(BB')$ si et seulement si $7 = 0$, c-à-d. si et slt si K est un corps de caractéristique $p_1 = 7$. Pour $p \neq 3, 7$, le point M est bien défini, et le calcul du 3/iii) montre que $(AB)//(CM)$ si et slt si $p = 5$.

II. 1^o/ Soient ℓ_1, ℓ_2 (resp. λ_1, λ_2) les formes linéaires affines définisssant $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) et $\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}$ (resp. $\overrightarrow{\lambda_1}, \overrightarrow{\lambda_2}$) leurs parties linéaires, d'où une matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ représentant une application linéaire $\overrightarrow{f_a} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Dans les deux premières (resp. dernières) lignes de M_a, on trouve un mineur 2×2 non nul, donc $\{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}\}$ (resp. $\{\overrightarrow{\lambda_1}, \overrightarrow{\lambda_2}\}$) sont linéairement indépendantes. Chacun de ces couples définit ainsi une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont non vides, et de dimension $dim\mathcal{F} = dim\mathcal{G} = 4 - 2 = 2$.

2^o/ Si $\mathcal{F}//\mathcal{G}$, leurs espaces vectoriels directeurs seraient égaux, et le rang de la matrice M_a vaudrait 2. Or son mineur Nord-Est d'ordre 3 est non nul, donc $rg(M_a) \geq 3$.

3^o/ En remplaçant la colonne C_2 par $C_2 + C_1$, on voit que le déterminant de la matrice M_a

vaut $8(a-2)$. Elle est donc de rang 4 si (et seulement si) $a \neq 2$. Dans ce cas l'application linéaire $\overrightarrow{f_a}$ est bijective, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un point.

4^o/ Désormais, $a = 2$, et on pose $M = M_2$, $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_2}$. D'après 2/ et 3/, la matrice M est de rang 3. Donc si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4-3=1$, c-à-d. une droite affine.

5^o/ Puisque M est de rang 3, l'image de $\overrightarrow{f}$ est un hyperplan H de $\mathbb{R}^4$, et il s'agit de déterminer quand le point $B = {}^t(4, 3b, 1, -b)$ appartient à H. Cet hyperplan admet une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$, donné par l'unique relation linéaire (à multiplication par un scalaire près) $\alpha\overrightarrow{\ell_1} + \beta\overrightarrow{\ell_2} + \gamma\overrightarrow{\lambda_1} + \delta\overrightarrow{\lambda_2} = 0$ reliant ces quatre formes linéaires. Autrement dit, $\overrightarrow{\Lambda} = {}^t(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ engendre le noyau de l'application linéaire définie par la transposée de la matrice M. L'équation ${}^tM.\overrightarrow{\Lambda} = 0$ admet pour solution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, -1, -5, -4)$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Leftrightarrow B \in H \Leftrightarrow 4 - 3b - 5 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

6^o/ Pour $a = 2, b = 1$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, et dirigé par le noyau de $\overrightarrow{f}$, qui est une droite $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$. L'équation $M\overrightarrow{v} = 0$ admet comme solution $\overrightarrow{v} = {}^t(1, 1, 3, -2)$. Comme $\overrightarrow{v} \notin \{\mathcal{H} : t = 0\}$, la droite $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{H}$ en un point unique $P = {}^t(1, 2, -1, 0)$.

III. 1^o/ Les 3 vecteurs colonnes de A sont deux à deux orthogonaux, et de norme 1, donc $A \in O_3(\mathbb{R})$. De plus son déterminant (calculé par exemple par la règle de Sarrus) est > 0, donc égal à 1. Ainsi, $A \in SO_3(\mathbb{R})$ est la matrice d'une rotation $\overrightarrow{f}$ de $E = \mathbb{R}^3$.

2^o/ Son axe Δ est le noyau de $A - \mathbf{I}_3$, d'où $\Delta = \mathbb{R}\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v} = {}^t(1, \sqrt{2}, 1)$.

3^o/ Si θ désigne cet angle, défini a priori seulement au signe près (et modulo 2π), il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $\overrightarrow{f}$ est représentée par la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres valent $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$. De $det(A - \lambda\mathbf{I}_3) = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$, on déduit donc que $\theta = \pm\pi = \pi$ (modulo 2π). Autre méthode : la trace de A (somme des éléments diagonaux) est égale à celle de A', donc $-1 = 1 - 2\cos\theta$, et $\cos\theta = -1$. [3e méthode : on remarque qu'ici, A est une matrice symétrique, donc ses valeurs propres sont toutes réelles (et pas toutes égales à 1), donc $e^{i\theta} = -1$.]

4^o/ Puisque $\overrightarrow{f}$ est une rotation (plus précisément, un demi-tour), f est un vissage, de vecteur de glissement $\overrightarrow{u} \in \Delta$ éventuellement nul. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur Δ. Pour $M = O$, $\overrightarrow{Of(O)} = B$, donc α vérifie $(\overrightarrow{v} | B - \alpha\overrightarrow{v}) = 0$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\overrightarrow{u} = {}^t(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

5^o/ $P = X \in \mathcal{D} \Leftrightarrow P$ est un point fixe de $t_{-\overrightarrow{u}} \circ f \Leftrightarrow (A - \mathbf{I}_3)(X) = -B + \overrightarrow{u}$, qui admet parmi ses solutions $P = {}^t(1, 0, 0)$. L'axe $\mathcal{D}$ de f est alors la droite affine $P + \Delta$.

6^o/ Puisque le plan Π est orthogonal à Δ, on peut choisir $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}''\}$ comme base orthonormée $\mathcal{B}'$ au 3/. La matrice représentative de $\overrightarrow{f}$ dans cette base est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{u}$ est représenté dans $\mathcal{B}'$ par $B' = {}^t(1, 0, 0)$. Donc f est représentée dans le repère cartésien $\{P; \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}''\}\}$ par $X' \mapsto f(X') = A'X' + B'$.