UPMC Licence L3 de mathématiques 14-15
D. Bertrand *LM 323 - Géométrie affine et euclidienne*

Examen du 21 Mai 2015
Durée: 2 heures

Les documents, calculettes, portables... ne sont pas autorisés.
Les 3 énoncés sont indépendants.
Les réponses devront être justifiées (sauf pour la question de cours **I**.1^o/*).*

I (11 pts sur 25)

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines, et $\mathcal{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. On note E, F, G, H les espaces vectoriels directeurs correspondants.

1^0/ (**Question de cours**)

i) On considère deux points $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\overrightarrow{AB}$ pour que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ soit non vide.

ii) On suppose que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide. Que vaut $\dim(\mathcal{H}) - \dim(F+G)$?

2^0/ Dans l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$, on considère les quatre formes linéaires $\ell_1, \ell_2, \ell'_1, \ell'_2$ sur $E = \mathbb{R}^4$ définies par

$$\ell_1(x,y,z,t) := x - z \qquad \ell'_1(x,y,z,t) := x - y - z + t$$
$$\ell_2(x,y,z,t) := y - t \qquad \ell'_2(x,y,z,t) := x + y - z - t$$

et les sous-ensembles $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ définis respectivement par les couples d'équations

$$(\mathcal{F}) \begin{cases} \ell_1(x,y,z,t) = 2 \\ \ell_2(x,y,z,t) = 1 \end{cases} \qquad (\mathcal{G}) \begin{cases} \ell'_1(x,y,z,t) = 0 \\ \ell'_2(x,y,z,t) = 8 \end{cases}$$

i) Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des plans affines, et qu'ils sont parallèles et distincts.

ii) Montrer que $\mathcal{H} :=< \mathcal{F}, \mathcal{G} >$ est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$.

3^0/ i) Donner une équation de $\mathcal{H}$.

ii) Montrer que le point $M = (0,0,0,2)$ appartient à $\mathcal{H}$, mais pas à $\mathcal{F}$. En déduire sans calculs que pour tout point P de $\mathcal{F}$, la droite (MP) rencontre $\mathcal{G}$ en un unique point P'.

4^0/ On note $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ l'application définie par $P \mapsto P' := g(P)$.

i) Pour $P = (x,y,z,t) \in \mathcal{F}$, calculer les coordonnées (x', y', z', t') de $g(P)$.

ii) Montrer que g est la restriction à $\mathcal{F}$ d'une homothétie $f_{\mathrm{O},\lambda}$ de $\mathcal{E}$, dont on déterminera le centre O et le rapport λ. .

TSVP

II (8 pts sur 25)

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, et $\mathcal{R}_0 = \{A_0, B_0, C_0\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$.

1^0/ Soient A le point symétrique de B_0 par rapport à C_0, B le symétrique de C_0 par rapport à A_0, C le symétrique de A_0 par rapport à B_0. Faire un dessin de cette configuration, et calculer les coordonnés barycentriques des points A, B et C dans le repère $\mathcal{R}_0$.

2^0/ i) Montrer que $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

ii) Calculer les coordonnés barycentriques du point A_0 dans le repère $\mathcal{R}$.

3^0/ i) Donner l'équation en coordonnées barycentriques dans $\mathcal{R}$ de la droite CA_0, et montrer qu'elle rencontre la droite (AB) en un point G, dont on donnera les coordonnées barycentriques dans $\mathcal{R}$.

ii) Soit B' le symétrique de C par rapport à B. Montrer que la droite (CG) rencontre la droite (AB') au milieu du segment $[AB']$.

III (6 pts sur 25)

On se place dans l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, dans lequel on considère les applications $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définies par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ x+2 \\ y+3 \end{pmatrix} \ , \ \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-3 \\ z+2 \end{pmatrix}.$$

1^0/ Montrer que f est un vissage, dont on déterminera l'angle, le vecteur de glissement et l'axe.

2^0/ Montrer que φ est une réflexion glissée, dont on déterminera le vecteur de glissement et une équation du plan de réflexion.

Corrigé

I.1/ i) $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}\in F+G$. - ii) Si $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$, alors on a : $\dim\mathcal{H}-dim(F+G)=1$. [Voir la Proposition 1.11 du poly.]

2/ i) Les formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes, donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension $4-2=2$, c-à -d. un plan affine [voir poly, Théorème 2.21]. De même, ℓ'_1 et ℓ'_2 sont linéairement indépendantes, donc $\mathcal{G}$ est un plan affine. Le ss-ev. directeur F (resp. G) est défini dans E par les équations $\ell_1=\ell_2=0$ (resp. $\ell'_1=\ell'_2=0$). Comme $\ell'_1=\ell_1-\ell_2, \ell'_2=\ell_1+\ell_2$, on a $F=G$, donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles. Notons pour la suite que les équations de $\mathcal{G}$ s'écrivent aussi $\ell_1-\ell_2=0, \ell_1+\ell_2=8$, donc $\mathcal{G}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, \ell_1(x,y,z,t)=4, \ell_2(x,y,z,t)=4\}$. Il en découle immédiatement que $\mathcal{F}\neq\mathcal{G}$. - ii) Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles et distinctes, $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$. D'après le 1/.ii), on a donc : $\dim\mathcal{H}=\dim(F+G)+1=\dim F+1=3=4-1$, et $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$.

3/ i) Puisque $\mathcal{H}$ est un hyperplan, il existe une forme linéaires non nulle ℓ sur $\mathbb{R}^4$ et un nombre réel c tel que $\mathcal{H}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, \ell(x,y,z,t)=c\}$. L'hyperplan vectoriel H est défini par $\ell=0$ et contient F, défini par $\ell_1=\ell_2=0$. Donc le rang du système d'équations linéaires $\{\ell_1=0,\ell_2=0,\ell=0\}$ est égal à celui de $\{\ell_1=0,\ell_2=0\}$, c-à d. à 2. Ainsi, $\ell=a\ell_1+b\ell_2$ est une combinaison linéaire de ℓ_1 et ℓ_2. De $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}$, on déduit que $a.2+b.1=c$, resp. $a.4+b.4=c$. Une solution (bien définie à un facteur près) est donnée par $a=3, b=-2, c=4$, d'où comme équation de $\mathcal{H}$: $3\ell_1-2\ell_2=4$, soit : $3x-2y-3z+2t=4$. - ii) Le point $M=(0,0,0,2)$, pour lequel $\ell_1=0, \ell_2=-2$, vérifie l'équation de $\mathcal{H}$, mais pas celles de $\mathcal{F}$. Plaçons-nous maintenant dans l'espace affine $\mathcal{H}$, de dimension 3. Ses sous-espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des hyperplans parallèles de $\mathcal{H}$. Pour $P\in\mathcal{F}$, la droite $\mathcal{D}=(MP)$ est dirigée par une droite vectorielle D n'appartenant pas à F, donc $H=F\oplus D$. Comme $G=F$, $\mathcal{G}\cap\mathcal{D}$ est donc non vide, et de dimension 0.

4/ i) Par construction, $\overrightarrow{MP}\neq 0$ et $\overrightarrow{MP'}$ sont colinéaires. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ (dépendant a priori de P) tel que $\overrightarrow{MP'}=\lambda\overrightarrow{MP}$. Alors, $x'=\lambda x, y'=\lambda y, z'=\lambda x, t'-2=\lambda(t-2)$. De $\ell_1(P)=2, \ell_1(P')=4$, on déduit que $\lambda=2$, qui ne dépend pas de P (et les contraintes $\ell_2(P)=1, \ell_2(P')=4$ sont alors automatiquement satisfaites). Ainsi, $x'=2x, y'=2y, z'=2z, t'=2t-2$. - ii) $\overrightarrow{MP'}=2\overrightarrow{MP}$, donc g est la restriction à $\mathcal{F}$ de l'homothétie $f_{M,2}$ de $\mathcal{E}$ de centre M et de rapport 2.

II.1/ $\overrightarrow{AB_0}=2\overrightarrow{AC_0}$ et $2-1=1$, donc $A=2C_0-B_0=(0,-1,2)$ dans $\mathcal{R}_0$. De même, $B=2A_0-C_0, C=2B_0-A_0$.

2/ i) $\det\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\2&-1&0\end{pmatrix}=7\neq 0$, donc les points A,B,C ne sont pas alignés et forment bien un repère affine du plan. - ii) Par associativité du barycentre, le milieu A_0 de $[BC_0]$ s'écrit: $A_0=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C_0=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B_0)=\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}A+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A_0)$, soit $A_0=\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}C+\frac{1}{8}A_0$. Par conséquent, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B}+\frac{1}{4}\overrightarrow{A_0A}+\frac{1}{8}\overrightarrow{A_0C}=\overrightarrow{0}$. En multipliant par $\frac{8}{7}$

pour que la somme des coordonnées vaille 1, on en déduit que $A_0 = \frac{4}{7}B+\frac{2}{7}A+\frac{1}{7}C = (\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})$ dans le repère $\mathcal{R}$.

3/ i) Une équation barycentrique $ax+by+cz = 0$ de (CA_0) dans $\mathcal{R}$ vérifie $0.a+0.b+1.c = 0$ et $\frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b + \frac{1}{7}c = 0$, d'où $c = 0, a = -2b$ et $(CA_0) : 2x - y = 0$ convient. Comme $z = 0$ est une équation barycentrique de (AB), ces droites se rencontrent au point $G = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.
- ii) (AB) est une médiane du triangle (non plat) (ACB'), et le point G est situé au 2/3 de cette médiane en partant de A. Donc G est le centre de gravité du triangle (ACB'), la droite (CG) en est aussi une médiane, et elle rencontre donc le segment $[AB']$ en son milieu. [On peut aussi faire le calcul : $B' = (0, 2, -1)$ dans $\mathcal{R}$, donc (AB') a pour équation $y + 2z = 0$, donc $(AB') \cap (CG) = M$ avec $M = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B'$.]

III.**1**/ f est une application affine, dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui appartient à SO_3. Donc $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle, d'axe $\overrightarrow{D} = Ker(\overrightarrow{f} - \mathbf{I}_3)$ engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$, et d'angle θ vérifiant $2\cos(\theta) + 1 = 0$, soit $\theta \equiv \pm 2\pi/3$ mod. 2π. Par conséquent, f est un vissage, d'axe D dirigé par $\overrightarrow{D}$ et d'angle θ. Le vecteur de glissement (éventuellement nul) $\overrightarrow{u} = (u, u, u) \in \overrightarrow{D}$ de f et un point $P = (x, y, z)$ de son axe D vérifient $f(P) = P + \overrightarrow{u}$, soit $z + 1 = x + u, x + 2 = y + u, y + 3 = z + u$, d'où $\overrightarrow{u} = (2, 2, 2)$ [et en fait $\theta \equiv 2\pi/3$ mod. 2π], et D est la droite $P + \overrightarrow{D}$, où l'on peut prendre $P = (0, 0, 1)$.

2/ ϕ est une application affine, dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{\phi}$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est orthogonale, de déterminant -1. Donc $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie indirecte. Elle admet pour ensemble de vecteurs fixes $Ker(\overrightarrow{\varphi} - \mathbf{I}_3)$, qui est le plan $\overrightarrow{\Pi}$ d'équation $x - y = 0$. Donc $\overrightarrow{\varphi}$ est la réflexion vectorielle par rapport à ce plan, et φ est une réflexion glissée. Son vecteur de glissement $\overrightarrow{u} = (u, u, v) \in \overrightarrow{\Pi}$ et un point $P = (x, y, z)$ de son plan de réflexion Π vérifient $\phi(P) = P + \overrightarrow{u}$, soit $y+1 = x+u, x-3 = y+u, z+2 = z+v$, d'où $\overrightarrow{u} = (-1, -1, 2)$, et Π est la plan $P + \overrightarrow{\Pi}$, où l'on peut prendre $P = (1, -1, 0)$. Ainsi, Π admet pour équation $x - y - 2 = 0$.