UPMC Licence L3 de mathématiques 14-15

LM 371 - Théorie des groupes

Examen du 11 Juin 2015

Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 3 énoncés sont indépendants.
Les réponses devront être justifiées.

I

On considère le groupe abélien $G = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/50\mathbb{Z})$.

1^0/ Déterminer les facteurs invariants et les diviseurs élémentaires du groupe G.

2^0/ i) Déterminer le nombre d'éléments de G d'ordre 4.
ii) Donner la liste de ces éléments. On les écrira sous la forme $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, où $\overline{a} \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\overline{b} \in \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$.

3^0/ i) Calculer l'ordre du groupe $Aut(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$.
ii) Donner l'ordre de chacun des éléments de ce groupe.

4^0/ Construire un produit semi-direct, non direct, de la forme $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \rtimes_\tau G$.

II

Soit G un groupe d'ordre 24.

1^0/ Soit P un 2-Sylow de G. Calculer le cardinal de G/P, et construire un homomorphisme ϕ de G vers le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ tel que le noyau de ϕ soit contenu dans P.

2^0/ En déduire que G admet un sous-groupe normal K d'ordre 4 ou 8 .

3^0/ On considère désormais le groupe symétrique $G = \mathcal{S}_4$.
i) Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme non trivial de $\mathcal{S}_4$ vers le sous-groupe $\boldsymbol{\mu}_3 := \{e^{2i\pi k/3}, k = 0, 1, 2\}$ de $\mathbb{C}^*$. (On rappelle que toute permutation est un produit de transpositions.)
ii) En déduire que $\mathcal{S}_4$ contient un sous-groupe normal K d'ordre 4.

4^0/ Déterminer tous les conjugués de l'élément $(12)(34)$ de $\mathcal{S}_4$, et donner un exemple d'un sous-groupe normal K de $\mathcal{S}_4$ d'ordre 4.

5^0/ Donner un exemple d'un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ d'ordre 4 qui ne soit pas normal.

TSVP

III

Soit G un groupe d'ordre $399 = 3 \times 7 \times 19$. On se propose de montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct (ou direct) de la forme $(\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

1°/ i) Montrer que tout groupe H d'ordre $133 = 7 \times 19$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$.

ii) Donner le nombre d'éléments de H d'ordre 133.

iii) Combien H admet-il de sous-groupes d'ordre 7 ?

2°/ Soient P un 19-Sylow de G, et Q un 7-Sylow de G.

i) Montrer que P est normal dans G, et que PQ est un sous-groupe de G, dont on précisera l'ordre.

ii) Montrer que Q est normal dans G. (On pourra raisonner par l'absurde, et étudier le nombre d'éléments de G d'ordre 133.)

iii) Montrer que PQ est normal dans G, et conclure.

Esquisse de corrigé

.

I.1$^{\mathbf{o}}$/ $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})$
2$^{\mathbf{o}}$/ i) Les éléments d'ordre 4 sont ceux de la partie 2-primaire $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ où ils s'écrivent sous la forme (a_1, a_2, a_3) avec $a_1 = \overline{0}, \overline{1}, a_2 = \overline{0}, \overline{1}, a_3 = \overline{1}, \overline{3}$. Il y en a 8. -ii) Dans la décomposition initiale de G, ils s'écrivent $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, avec $a \equiv 0, 5$ mod. 10, $b \equiv 5, 15$ mod. 20, $c \equiv 0, 25$ mod. 50.

3$^{\mathbf{o}}$/ L'application $f \mapsto f(\overline{1})$ établit un isomorphisme de $Aut(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ des classes modulo 10 d'entiers premiers à 10. Il y a $\phi(10) = \phi(2)\phi(5) = 4$ telles classes : $\overline{1}$ (d'ordre 1), $\alpha = \overline{3}$ (d'ordre 4), $\overline{9} = \overline{-1}$ (d'ordre 2) et $\overline{27}$ (d'ordre 4). Le groupe $Aut(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ est donc cyclique, engendré par l'automorphisme f_α tel que $f_\alpha(\overline{1}) = \alpha$.

4$^{\mathbf{o}}$/ Il revient au même de construire un homomorphisme non trivial $\tau : G \to Aut(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$. Par exemple, $\tau : (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \mapsto (f_\alpha)^b$ (qui est bien défini puisque $(f_\alpha)^4 = id$) convient.

II.1$^{\mathbf{o}}$/ $X = G/P$ a $24/8 = 3$ éléments, et G agit sur X par $(g, xP) \mapsto gxP$, d'où un morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}_X = \mathcal{S}_3$. Pour $g \in Ker(\phi)$, on a $gP = P$, donc $Ker(\phi) \subset P$.

2$^{\mathbf{o}}$/ L'ordre du sous-groupe normal $K := Ker(\phi)$ de G divise $|P| = 8$, et celui de $G/K \hookrightarrow \mathcal{S}_3$ divise 3!, donc $|G|/6 = 4$ divise $|K|$, et $|K| = 4$ ou 8.

3$^{\mathbf{o}}$/ i) Un tel homomorphisme χ prend les valeurs ± 1 sur les transpositions (d'ordre 2), donc sur toute permutation. Donc 1 est le seul point de $Im(\chi) < \mathbb{C}^*$ d'ordre divisant 3. -ii) Le sous-groupe K du 2/ ne peut donc pas être d'indice 3, c-à-d. d'ordre 8 , et $|K| = 4$.

4$^{\mathbf{o}}$/ La classe de conjugaison de cette permutation est formée de toutes celles du même type. Il y en a 3 : $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$. Chacune est d'ordre 2, et commute avec les autres. Jointes à id, elles forment donc un sous-groupe K de G d'ordre 4 (isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$), qui est stable par conjugaison donc normal dans G.

5$^{\mathbf{o}}$/ Le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ engendré par (1234) est d'ordre 4 , mais pas normal : $(12)(1234)(21) = (2134) \neq (1234), (13)(24), (4321)$.

III.1$^{\mathbf{o}}$/ i) Dans H, $n_7 | 19$ et $\equiv 1$ mod.7, donc $n_7 = 1$, et $n_{19} | 7$ et $\equiv 1$ mod. 19, donc $n_{19} = 1$. Donc un seul 7-Sylow H_7, un seul 19-Sylow H_{19}, normaux dans H, donc $H \simeq H_7 \times H_{19} \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$. ii) Il y a $\phi(133) = (7-1) \times (19-1) = 108$ élts d'ordre 133. - iii) $n_7 = 1$. Plus simplement, le groupe cyclique H admet un seul sous-groupe d'ordre 7.

2$^{\mathbf{o}}$/ i) Dans G, $n_{19} | 3 \times 7$ et $\equiv 1$ mod. 19, donc $n_{19} = 1$ et P est normal dans G. Donc PQ est un sous-groupe de G, et puisque $P \cap Q = \{e\}$, il est d'ordre 19×7. ii) Supposons Q non normal dans G, donc $n_7 \neq 1$. De $n_7 | 3 \times 19$ et $\equiv 1$ mod 7, on déduit qu'il y a $n_7 = 57$ 7-Sylows $Q_i (i =, ..., 57)$ dans G. Pour chacun d'eux, $H_i := PQ_i$ est d'ordre 133, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$, avec 108 éléments d'ordre 133. De plus, pour $i \neq j$, $H_i \neq H_j$, sinon le groupe cyclique H_i admettrait deux sous-groupes cycliques Q_i, Q_j d'ordre 7 distincts. Donc aucun des 108 générateurs de H_i n'est égal à un des 108 générateurs de H_j, et G admet au moins 57×108 éléments d'ordre 133. Mais G n'a que 399 éléments, contradiction. - iii) De P et Q distingués dans G, on déduit que $H := PQ$ l'est aussi. De plus, G admet un élément d'ordre 3, qui engendre un sous-groupe $R \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de G avec $H \cap R = \{e\}$. Par conséquent, $G = H \rtimes_\tau R$, où τ désigne l'action de R sur H par conjugaison.