UPMC Licence L3 de mathématiques 13-14

LM 371 - Théorie des groupes

Examen final (17 Décembre 2013)

Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 4 énoncés sont indépendants.
Les réponses devront être justifiées.
Barême approximatif (sur 75 points) : I = 15 pts; II = 15 pts; III = 18 pts; IV = 27 pts.

I

On considère le groupe abélien $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})$.

1°/ Déterminer les composantes primaires de G.

2°/ Déterminer les facteurs invariants de G.

3°/ Calculer le nombre d'éléments de G d'ordre 3.

II

On se place dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_7$ des permutations d'un ensemble à 7 éléments.

1°/ On considère la permutation $\sigma = (1234)(567)$.
i) Calculer la signature et l'ordre de σ.
ii) Donner les décompositions de σ^{28} et de σ^{26} en produits de cycles disjoints.

2°/ On considère maintenant la permutation $\tau = (127)(735)(3546)$.
i) Donner la décomposition de τ en produit de cycles disjoints.
ii) Calculer l'ordre de τ.
iii) Donner les décompositions de τ^{28} et de τ^{26} en produits de cycles disjoints.

III

Soient G un groupe, et U une partie non vide de G. On pose : $H = \{g \in G, gU = U\}$.

1°/ Trouver un ensemble $\mathcal{P}$ dont U soit un élément, ainsi qu'une action de G sur $\mathcal{P}$, tels que H soit le stabilisateur $Stab_G(U)$ de U pour cette action de G sur $\mathcal{P}$.

2°/ On considère maintenant U comme un ensemble. Trouver une action de H sur U telle que pour tout élément u de U, le stabilisateur $Stab_H(u)$ de u dans H soit réduit à $\{e\}$.

3°/ On suppose que G est un groupe fini. Montrer que l'ordre $|H|$ de H divise le cardinal $card(U)$ de U.

T.S.V.P.

IV

1°/ Montrer que tout groupe abélien d'ordre $255 = 3 \times 5 \times 17$ est cyclique.

2°/ Soit H un groupe d'ordre 15. Montrer que H admet un seul 3-Sylow, et un seul 5-Sylow. En déduire que H est isomorphe au produit direct $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

On considère désormais un groupe G d'ordre 255, non nécessairement abélien. Pour $p = 3, 5, 17$, on note n_p le nombre de ses p-Sylows.

3°/ i) Calculer n_{17}.

ii) Calculer les valeurs possibles de n_3 et de n_5. Dans chaque cas, on trouvera, en dehors de la valeur 1, une seule autre valeur possible.

4°/ On suppose dans cette question que $n_5 \neq 1$.

i) En supposant de plus que $n_3 \neq 1$, compter le nombre d'éléments de G d'ordre 3 ou d'ordre 5. En déduire que $n_3 = 1$.

ii) Montrer que le groupe G contient un sous-groupe isomorphe au produit direct $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$.

iii) Montrer que le groupe G contient un sous-groupe isomorphe à un produit semi-direct $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Déduire du 2^o/ que le produit est direct, et que G contient un élément d'ordre 15.

iv) En comptant le nombre des éléments de G d'ordre 5 ou d'ordre divisant 51, montrer que G n'admet pas d'élément d'ordre 15. Ainsi, l'hypothèse $n_5 \neq 1$ conduit à une contradiction.

5°/ On a donc $n_5 = 1$.

i) Montrer que l'hypothèse $n_3 \neq 1$ conduit à une contradiction.

ii) Ainsi, $n_3 = n_5 = 1$. En déduire que G est un groupe abélien.

Esquisse de corrigé

I. 1^o/ Par le lemme chinois, $G : (\mathbb{Z}/4) \times (\mathbb{Z}/3) \times (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/7) \times (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/9)$, d'où les composantes primaires $G(2) = (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/4)$, $G(3) = (\mathbb{Z}/3) \times (\mathbb{Z}/9)$, $G(7) = \mathbb{Z}/7$.

2^o/ Facteurs invariants : $G = (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/6) \times (\mathbb{Z}/252)$ (avec $252 = 4.9.7 = 6 \times 42$).

3^o/ Les élts d'ordre 3 de G sont ceux de $G(3) = (\mathbb{Z}/3) \times (\mathbb{Z}/9)$, donc de la forme (a, b) avec $(a \equiv 1, 2; b \equiv 0, 3, 6)$, ou $(a \equiv 0, 1, 2; b \equiv 3, 6)$. Il y en a 9 - 1 = 8.

II. 1^o/ i) signature$(\sigma) = (-1)^{4-1}.(-1)^{3-1} = -1$. Comme les deux cycles commutent et sont d'ordre 4, resp. 3, ordre$(\sigma) = ppcm(4, 3) = 12$. ii) On en déduit que $\sigma^{24} = id$, et que $\sigma^{28} = \sigma^4 = (1234)^4(567)^{3+1} = (567)$. De même, $\sigma^{26} = \sigma^2 = (1234)^2.(567)^2 = (13)(24)(765)$.

2^o/ i) $\tau = (1273)(465)$ ii) ordre$(\tau) = 12$ iii) $\tau^{28} = (465)$ et $\tau^{26} = (17)(23)(564)$.

III. 1^o/ Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de G. L'application $G \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} : (g, V) \mapsto gV$ qui à tout $V \in \mathcal{P}$ associe la partie $gV = \{gv, v \in V\}$ de G, vérifie $\forall g, g' \in G, (gg')V = g(g'V)$ et $eV = V$. C'est donc une action de G sur $\mathcal{P}$, et $Stab_G(U) = \{g \in G, gU = U\} = H$.

2^o/ Puisque $hu \in U$ pour tout $(h, u) \in H \times U$, l'application $H \times U \to U : (h, u) \mapsto hu$ définit une action de H sur U, qui vérifie : $\forall u \in U, \quad Stab_H(u) = \{h \in H, hu = u\} = \{e\}$.

3^o/ Soit $\{u_1, .., u_n\}$ un système de représentants des orbites de cette action de H sur l'ensemble U. Alors, $card(U) = \Sigma_{i=1,...,n} \frac{|H|}{|Stab_H(u_i)|} = n|H|$, donc $|H|$ divise $card(U)$.

IV. 1^o/ Les composantes primaires d'un tel groupe sont $G(3) = \mathbb{Z}/3, G(5) = \mathbb{Z}/5, G(17) = \mathbb{Z}/17$, et il est isomorphe à leur produit direct, donc à $\mathbb{Z}/255\mathbb{Z}$ d'après le lemme chinois.

2^o/ Pour un tel H, $n_3 \equiv 1$ mod. 3 et $n_3|5$, donc $n_3 = 1$, $n_5 \equiv 1$ mod. 5 et $n_5|3$, donc $n_5 = 1$. Ainsi, H n'a qu'un 3-Sylow $S_3 \simeq \mathbb{Z}/3$ et un 5-Sylow $S_5 \simeq \mathbb{Z}/5$, qui sont donc tous deux distingués dans H. Puisque $S_3 \cap S_5 = \{e\}$, on en déduit que S_3S_5 est un sous-groupe de H isomorphe au produit direct $S_3 \times S_5$. Vu leurs ordres, on a donc $H \simeq (\mathbb{Z}/3) \times (\mathbb{Z}/5) \simeq \mathbb{Z}/15$.

3^o/ i) $n_{17} \equiv 1$ mod (17) et $n_{17}|15$, donc $n_{17} = 1$, et $S_{17} \triangleleft G$. ii) $n_3 \equiv 1$ mod 3 et $n_3|5.17$, donc $n_3 = 1$ ou 85. De même, $n_5 = 1$ ou $3.17 = 51$.

4^o/ i) Outre $n_5 = 51$, on suppose ici que $n_3 = 85$. Comme les 5-Sylows, cycliques d'ordre premier 5, ne se rencontrent qu'en $\{e\}$ s'ils sont distincts, G admet $51 \times (5-1)$ élts d'ordre 5. De même, G admet $85 \times (3 - 1)$ élts d'ordre 3. De $51.4 + 85.2 >> 254$, on déduit une contradiction. Donc $n_3 = 1$. ii) Ainsi, S_3 et S_{17} sont tous deux distingués dans G, et le même argument qu'en 2^o/ montre que G contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/3) \times (\mathbb{Z}/17) \simeq \mathbb{Z}/51$. iii) Soit $S_5 \simeq \mathbb{Z}/5$ un des 5-Sylows de G. Puisque $S_3 \triangleleft G$ et que $S_5 < G$, S_3S_5 est un sous-groupe de G, et puisque $S_3 \cap S_5 = \{e\}$, ce sous-groupe est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/3 \rtimes \mathbb{Z}/5$. Mais il est d'ordre 15, donc en fait, d'après le 2^o/, isomorphe au produit direct, donc à $\mathbb{Z}/15$ d'après le lemme chinois. iv) G admet 51.4 élts d'ordre 5, et les 51 élts d'ordre divisant 51 de $S_3S_{17} \simeq \mathbb{Z}/51$. Aucun de ces $51.4 + 51 = 255 = |G|$ élts n'est d'ordre 15. Ainsi, n_5 est forcément égal à 1.

5^o/ i) Outre $n_5 = 1$, on suppose ici que $n_3 = 85$, et on note S_3 un des 3-Sylows de G. Comme $S_5 \triangleleft G$, S_5S_3 est un sous-groupe de G, et il admet un élt d'ordre 15 d'après 2^o/. Or G contient $|S_5 \times S_{17}| = 85$ éléments d'ordre divisant 85, et $85 \times (3 - 1)$ élts d'ordre 3. De $85 + 85.2 = |G|$, on déduit une contradiction. ii) Ainsi, $G \simeq S_3 \times S_5 \times S_{17}$ est abélien.