Université de Paris VI 2ème semestre 2007-2008

Master de Mathématiques

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

(M 24)

Daniel BERTRAND

.

Plan

Prérequis: notions de base d'algèbre linéaire et de calcul différentiel.

Références

J. Dieudonné: *Éléments d'analyse*; vol. III et IV, Gauthiers-Villars, 1971.

J. Faraut: *Analyse sur les groupes de Lie*; Calvage et Mounet, Paris, 2006.

J-P. Serre : *Lie algebras and Lie groups*; Springer L.N. 1500, 1992.

Le cours est également proposé en télé-enseignement.

Université de Paris VI
D. Bertrand

Master M1 2007-2008
Groupes et algèbres de Lie

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES TOPOLOGIQUES

§1. Notions de base.

Un *groupe topologique* est la donnée d'un groupe G, dont l'espace sous-jacent est muni d'une topologie vérifiant les axiomes suivants :

i) la loi de groupe $(x, y) \mapsto xy$ de G est une application continue de $G \times G$ (muni de la topologie produit) dans G. En particulier, pour tout $x \in G$, les translations $\gamma(x) := \gamma_x : y \mapsto xy$ et $\delta(x) = \delta_x : y \mapsto yx$ sont des applications continues de G dans G.

ii) la loi d'inversion $\iota : x \mapsto x^{-1}$ est une application continue de G dans G.

Un *(homo)morphisme* $f : G \to G'$ de groupes topologiques est un homomorphisme de groupes abstraits ($f(xy) = f(x)f(y)$) qui est continu. Un homomorphisme (au sens des groupes abstraits) est continu dès qu'il l'est en l'élément neutre e de G. Un isomorphisme de groupes topologiques est un isomorphisme de groupes abstraits qui est aussi un homéomorphisme (= bicontinu).

Un groupe topologique G est séparé si (et seulement si) le point $\{e\}$ est fermé. En effet, tout point $xy^{-1} \neq e$ l'est alors aussi, d'où un voisinage $\mathcal{V}$ de e ne contenant pas xy^{-1}. Mais par (i), il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de e tel que $\mathcal{U}.\mathcal{U}$ soit inclus dans $\mathcal{V}$, et $x\mathcal{U} \cap y\mathcal{U}^{-1} = \emptyset$. (Notation: si A et B sont deux parties de G, $A.B = AB$ désigne l'ensemble des éléments de la forme ab, où $a \in A, b \in B$.)

Soit H un sous-groupe de G. Muni de la topologie induite, c'est un groupe topologique. Si H est ouvert dans G, il est automatiquement fermé (car son complémentaire est réunion des classes à gauche $xH, x \in G, x \notin H$), mais pas inversément. Si H est fermé dans G, son *normalisateur* $N(H) := \{x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} \in H\}$ est un sous-groupe fermé de G; idem pour son *centralisateur* $Z(H) := \{x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} = h\}$, donc pour le *centre* $Z(G)$ de G.

La composante connexe G^0 de e (aussi appelée *composante neutre* de G) est un sous-groupe *normal* (= distingué : $N(G^0) = G$). En effet, pour tout x dans G^0, $x^{-1}G^0$ est connexe et contient e, donc est contenu dans G^0, qui est donc un sous-groupe; de même, $x^{-1}G^0x$ est contenu dans G^0.

Lemme 1 : *soient G un groupe topologique, et $\mathcal{V}$ un voisinage connexe de e. Alors, G^0 est la réunion des $\mathcal{V}^n := \{x_1x_2...x_n, x_i \in \mathcal{V}\}$, où n parcourt $\mathbf{N}$.*

Démonstration : en effet, cette réunion $\mathcal{U}$ d'ensembles connexes d'intersection non vide est connexe, donc contenue dans G^0. Posons alors $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{-1}$; c'est un voisinage symétrique de e, donc la réunion des $\mathcal{W}^n, n \in \mathbf{N}$, est un sous-groupe ouvert H de G, donc $H^0 \supset G^0$. Noter alors que $\mathcal{U} \supset H$.

Soit H un sous-groupe distingué du groupe topologique G. On munit le groupe quotient G/H de la topologie la plus fine rendant la projection canonique $\pi : G \to G/H$ continue. Alors, l'application π est ouverte (π(ouvert) = ouvert), G/H est un groupe topologique, et π est un morphisme de groupes topologiques. En particulier, G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes topologiques séparés. Alors, $Ker(f) := f^{-1}(e')$ est un sous-groupe distingué fermé de G, $Im(f) := f(G)$ est un sous-groupe (en général pas fermé) de G', et l'application canonique de $G/Ker(f)$ dans $Im(f)$ induite par f est un isomorphisme de groupes abstraits continu, mais en général pas bicontinu (exemple: enroulement irrationnel d'une ficelle sur un tore); il l'est si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de e, $f(\mathcal{V})$ est un voisinage de e' dans $Im(f)$.

Lemme 2 : *Soit G un groupe topologique connexe, de centre $Z = Z(G)$.*

i) Tout sous-groupe distingué et discret N de G est contenu dans Z.

ii) si Z est discret, le centre de G/Z est réduit à son élément neutre.

Démonstration : i) Pour tout élément n de N, l'application $\phi : g \mapsto gng^{-1}n^{-1}$ de G dans G est continue. Elle envoie G dans N (puisque N est distingué), donc $\phi(G)$ est discret dans G. Mais $\phi(G)$ est connexe et contient $e = \phi(n^{-1})$. Donc $\phi(G)$ est réduit à $\{e\}$, et n commute à tous les éléments de G.

ii) Soit x un relevé dans G d'un élément du centre de G/Z. Alors, l'application $\psi : g \mapsto gxg^{-1}x^{-1}$ envoie G dans Z, donc est réduit à $\{e\}$, et $x \in Z$.

Soient G er G' deux groupes topologiques. On appelle *homomorphisme local* de G vers G' toute application continue h, d'un voisinage $\mathcal{V}$ de e dans G, vers G', telle que $h(xy) = h(x)h(y)$ dès que x, y et xy sont dans $\mathcal{V}$. Un isomorphisme local est un homomorphisme local qui est un homéomorphisme de $\mathcal{V}$ sur un voisinage $\mathcal{V}'$ de e' dans G'. Alors, $f^{-1} : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$ est aussi un homomorphisme local et on dit que G et G' sont localement isomorphes.

Noter qu'en général, un homomorphisme local ne se prolonge pas en un homomorphisme de groupes (exemple: $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}$).

[La fin de ce §1, et les références à la simple connexité au §2, sont hors programme.]

Quand G est un groupe de Lie connexe ou, plus généralement, un groupe topologique connexe localement homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, on peut mesurer l'obstruction au problème du prolongement de tous les homomorphismes locaux de source G grâce au groupe fondamental $\pi_1(G)$ de G (= groupe des classes d'homotopie de lacets sur G de base e; cf. cours de topologie algébrique). On dit que G est *simplement connexe* si $\pi_1(G) = \{0\}$; c'est en particulier le cas si G est contractile. On montre alors:

Théorème : *Soient G un groupe de Lie connexe et* simplement connexe, *et G' un groupe topologique. Tout homomorphisme local de G vers G' se prolonge de façon unique en un homomorphisme (automatiquement continu) de G vers G'.*

De plus, pour tout groupe de Lie connexe G, il existe un couple $(\tilde{G}, \tilde{\pi})$ unique à isomorphisme près, formé d'un groupe de Lie $\tilde{G}$ connexe et simplement connexe et d'un morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{G} \to G$ de groupes topologiques qui soit un isomorphisme local. On dit que $(\tilde{G}, \tilde{\pi})$ est le revêtement universel de G. Le sous-groupe $Ker(\tilde{\pi})$ de $\tilde{G}$, qui est discret (donc contenu dans le centre de G, d'après le lemme 2), est isomorphe à $\pi_1(G)$, qui est donc toujours un groupe abélien, et les groupes de Lie $\tilde{G}/\pi_1(G)$ et G sont isomorphes.

§2 Sous-groupes topologiques de $GL_n(\mathbf{R})$

a) Groupe linéaire général.

Soit V un espace de Banach (= espace vectoriel normé complet) sur le corps $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Le groupe $G = GL^{top}(V/K)$ des automorphismes K-linéaires bicontinus de V, muni de la topologie induite par la norme usuelle ($||g|| := sup\{||g(v)||, v \in V, ||v|| = 1\}$), est un groupe topologique. (Exercice: vérifier la condition (ii).)

Quand V est de dimension finie n, la condition de bicontinuité est automatique, et ce groupe G, noté $GL(V/K)$ (ou abusivement $GL(V)$), s'identifie au groupe linéaire $GL_n(K)$ des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans K. Les formules de Cramer fournissent alors une vérification aisée de (ii). Une partie fermée Γ de G est compacte si et seulement s'il existe un réel $c > 0$ tel que $\forall g \in \Gamma, ||\gamma|| \leq c$ et $det(\gamma) > 1/c$.

Un espace de Banach V sur $\mathbf{C}$ fournit naturellement un espace de Banach $\tilde{V}$ sur $\mathbf{R}$, muni d'un automorphisme J de carré $-id_{\tilde{V}}$, ce qui permet d'identifier $GL^{top}(V/\mathbf{C})$ au sous-groupe fermé $\{g \in GL^{top}(\tilde{V}/\mathbf{R}), gJ = Jg\}$ de $GL^{top}(\tilde{V}/\mathbf{R})$, et en particulier, $GL_n(\mathbf{C})$ à un sous-groupe fermé de $GL_{2n}(\mathbf{R})$.

Définition : *dans ce cours, on appellera groupe de Lie (linéaire) tout sous-groupe fermé d'un groupe linéaire $GL_n(\mathbf{R})$.* On renvoie aux ouvrages de la bibliographie pour la définition générale des groupes de Lie, et aux points b) et e) ci-dessous (revêtement universel de $SL_2(\mathbf{R})$, groupe de Heisenberg) pour des exemples de groupes de Lie de petite dimension qui n'entrent pas dans ce cadre.

Exercice : i) Pour $V = \mathbf{R}^n$, le sous-groupe $GL^+(V) = GL_n^+(\mathbf{R}) = \{g \in GL(V), det(g) > 0\}$ des automorphismes préservant l'orientation est la composante neutre de $GL(V)$.

ii) En revanche, pour $K = \mathbf{C}$, $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe.

Ces résultats découlent des exercices qui suivent, et de la "décomposition polaire" d'un automorphisme en produit d'une isométrie par une matrice symétrique (ou hermitienne) définie positive. Voir feuilles de TD. [On montre par ailleurs que pour tout $n \geq 1$ (resp. 2), $GL_n(\mathbf{C})$ (resp. $GL_n^+(\mathbf{R})$) n'est pas simplement connexe.]

b) Groupe linéaire spécial.

Pour $V = K^n$, le déterminant est un homomorphisme de groupes topologiques de $GL(V)$ dans $K^* := GL_1(K)$. Son noyau $SL(V) = SL_n(K)$ s'appelle le groupe spécial linéaire. Il est fermé, non compact (sauf $SL_1(K) = \{1\}$).

Pour $n \geq 2$, le groupe $SL_n(\mathbf{R})$ est connexe [mais pas simplement connexe; ainsi, $SL_2(\mathbf{R})$ a un π_1 isomorphe à $\mathbf{Z}$, et il n'existe aucun homomorphisme continu injectif de son revêtement universel dans un groupe linéaire $GL_n(\mathbf{R})$. En revanche, les groupes $SL_n(\mathbf{C})$ sont connexes et simplement connexes.]

Exercice : le centre de $GL_n(K)$ est formé des homothéties (= matrices scalaires $\lambda \mathbf{I}_n, \lambda \in K^*$); le centre de $SL_n(K)$ aussi, donc il est isomorphe au groupe $\mu_n(K)$ des racines n-ièmes de l'unité dans K^* (d'ordre n si $K = \mathbf{C}$, d'ordre 1 ou 2 si $K = \mathbf{R}$).
Les groupes $PGL_n(K) := GL_n(K)/(K^*\mathbf{I}_n), PSL_n(K) := SL_n(K)/(\mu_n(K)\mathbf{I}_n)$ interviennent naturellement en géométrie projective.

c) Groupes unitaire et orthogonal.

Soit V un espace de Hilbert sur $K = \mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$), c'est-à-dire un Banach dont la norme provient d'un produit scalaire. Le *groupe unitaire* $U(V)$ (resp. *orthogonal* $O(V)$) est le groupe des isométries de V, c'est-à-dire des automorphismes K-linéaires g de V tels que $||g(v)|| = ||v||$ pour tout $v \in V$, ou encore tels que $g.g^* = g^*.g = id_V$, où g^* désigne l'adjoint de g pour le produit scalaire. C'est un sous-groupe fermé de $GL^{top}(V/K)$.

Pour $V = \mathbf{C}^n$ (resp. $\mathbf{R}^n$), ce groupe $U(V) := U(n) = \{P \in GL_n(\mathbf{C}), {}^t\overline{P}.P = \mathbf{I}_n\}$ (resp. $O(V) := O_n(\mathbf{R}) = O(n) = \{P \in GL_n(\mathbf{R})), {}^tP.P = \mathbf{I}_n\}$) est compact, puisque ses éléments vérifient $||g|| = 1, |det(g)| = 1$. Son intersection avec $SL(V)$ est notée $SU(V) = SU(n)$ (resp. $SO(V) = SO_n(\mathbf{R}) = SO(n) =$ groupe de *rotations* de $\mathbf{R}^n$).

Exercice : i) Déterminer les centres de $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$.
ii) $U(n)$ est connexe, mais pas $O(n)$, dont la composante neutre est $SO(n)$.

[Par ailleurs, $SU(n)$ est simplement connexe, mais $\pi_1(U(n)) \simeq \mathbf{Z}$; par exemple, le revêtement universel de $U(1) \simeq SO(2) \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est $\mathbf{R}$. Pour $n \geq 3$, $\pi_1(SO(n))$ est un groupe C_2 d'ordre 2. Le revêtement universel $Spin(n)$ de $SO(n) \simeq Spin(n)/C_2$ est appelé groupe spinoriel.]

d) Groupe symplectique.

Soit $J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre $2n$ représentant la forme bilinéaire alternée : $(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \Sigma_{i=1,..,n} x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i$ sur l'espace vectoriel $V = K^{2n}$. Le groupe symplectique est le groupe $Sp_{2n}(K) = \{P \in GL_{2n}(k), {}^t PJP = J\}$. Ainsi, $Sp_2(K) = SL_2(K)$. Plus généralement, on démontre que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1, de sorte que pour tout n, $Sp_{2n}(K)$ est un sous-groupe fermé, non compact, de $SL_{2n}(K)$.

Exercice : Montrer que la partie réelle (resp. imaginaire) d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel $V/\mathbf{C}$ est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire symétrique (resp. alternée) sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel sous-jacent $\tilde{V}$. En déduire que dans $GL_n(\mathbf{C}) \simeq \{P \in GL_{2n}(\mathbf{R}), P^{-1} J_2 P = J_2\} \subset GL_{2n}(\mathbf{R})$, on a $U(n) = O(2n) \cap Sp_{2n}(\mathbf{R})$.

Soient $\mathbf{H}$ le corps des *quaternions* de Hamilton, σ l'anti-involution de $\mathbf{H}$ définie par $\sigma(x + yi + zj + tk) = x - yi - zj - tk$, de sorte que $||u|| := \sqrt{\sigma(u).u}$ définit une structure euclidienne sur $\mathbf{H} \simeq \mathbf{R}^4$, et U le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{H}^*$ formé par les quaternions de norme 1. On peut voir $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j \simeq \mathbf{C}^2$ comme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2 , et $||.||$ comme un produit hermitien. Alors, l'application $\rho : U \to GL_2(\mathbf{C})$ qui attache à $u \in U$ l'automorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathbf{H}$: $h \to \rho(u)(h) := hu^{-1}$ est un homomorphisme de groupes injectif. Comme $||hu|| = ||h||.||u|| = ||h||$ pour tout $h \in \mathbf{H}$, son image est contenue dans le groupe unitaire $U(2)$. En fait, pour $u^{-1} = \alpha + \beta j \in \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j$ de norme $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$, la matrice représentative de $\rho(u)$ dans la base $\{1, j\}$ de $\mathbf{H}$ est donnée par $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1}$, de sorte que ρ établit un isomorphisme de U sur $U(2)$.

L'espace $\mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$ des quaternions purs, muni de $||.||$, s'identifie à l'espace euclidien usuel $\mathbf{R}^3$. Pour tout $u \in U$, l'application $Int(u) : h \mapsto uhu^{-1}$ de $\mathbf{H}$ induit une isométrie de $\mathbf{R}^3$, d'où un homomorphisme de groupe $\pi : U \to SO_3(\mathbf{R})$, appliquant u sur $\pi(u) = (Int(u))|_{\mathbf{R}^3}$, de noyau $U \cap Z(\mathbf{H}^*) = \{\pm 1\}$. On montrera plus tard que π est surjective, de sorte que $SO_3(\mathbf{R}) \simeq SU(2)/\{\pm \mathbf{1}_2\}$. [En d'autre termes, le groupe simplement connexe $SU(2)$ est le revêtement universel $Spin(3)$ de $SO(3)$.]

Dans le même ordre d'idée, considérons $\mathbf{H}^n$ comme un espace vectoriel à droite sur $\mathbf{H}$, et soit $GL_n(\mathbf{H})$ le groupe des automorphismes $\mathbf{H}$-linéaires de $\mathbf{H}^n$. Avec l'identification $\mathbf{H}^n = \mathbf{C}^n + j\mathbf{C}^n$, on a $GL_n(\mathbf{H}) = \{P \in GL_{2n}(\mathbf{C}), PJ_{2n} = J_{2n}\overline{P}\}$. Son sous-groupe $U_n(\mathbf{H}) = U(2n) \cap Sp_{2n}(\mathbf{C})$ coïncide avec à $U \simeq SU(2)$ pour $n = 1$, mais c'est en général un nouveau groupe (compact, connexe et simplement connexe).

Plus généralement, étant donné une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire b sur un K-espace vectoriel V, on pose $GL(V,b) = \{g \in GL(V/K), \forall v, w \in V, b(gv, gw) = b(v,w)\}$. Quand b est une forme bilinéaire symétrique de signature $(p, q = n-p)$ sur $\mathbf{R}^n$, on note ce groupe $O(p,q)$; il est non compact dès que $pq \neq 0$. Pour la forme $xx' + yy' + zz' - tt'$ sur l'espace-temps $\mathbf{R}^4$, on obtient ainsi le *groupe de Lorentz* $O(3,1)$. [Le groupe spécial correspondant $SO(3,1)$ admet $SL_2(\mathbf{C})$ pour revêtement universel.]

e) Groupes triangulaires.

Pour $V = K^n$, le groupe $B_n(K)$ formé par les matrices triangulaires supérieures de $GL_n(K)$ s'appelle le groupe triangulaire supérieur. Il contient comme sous-groupe fermé normal le groupe triangulaire supérieur strict $B_n^{(1)}(K)$ des matrices triangulaires unipotentes (dont tous les termes diagonaux valent 1.) L'isomorphisme $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ permet d'identifier le groupe additif K au groupe matriciel $B_2^{(1)}(K)$.

Exercice : Déterminer les composantes neutres de ces groupes, ainsi que leurs centres.

Soit H le quotient de $B_3^{(1)}(\mathbf{R})$ par le sous-groupe discret, isomorphe à $\mathbf{Z}$, engendré par l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de son centre. H est le *groupe de Heisenberg* de dimension 3. Il ne peut se plonger dans aucun groupe linéaire $GL_n(\mathbf{R})$.

f) Tores.

Le cercle unité S^1 s'identifie au groupe topologique $U(1) = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$, qui est isomorphe au groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Sa puissance n-ième $(S^1)^n := T^n \simeq \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ s'appelle le tore de dimension n. C'est un groupe abélien connexe compact [de revêtement universel $\mathbf{R}^n$, avec $\pi_1(T^n) \simeq \mathbf{Z}^n$.]

On prendra garde, pour $n > 1$, à ne pas confondre T^n avec la sphère S^n (= bord de la boule unité de $\mathbf{R}^{n+1}$), ni S^n avec l'espace projectif $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$. On a néanmoins les homéomorphismes: $S^1 \simeq SO(2) \simeq \mathbf{P}_1(\mathbf{R}), S^2 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbf{C}), S^3 \simeq SU(2), S^4 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbf{H})$.

Université de Paris VI Master M1 2007-2008
D. Bertrand *Groupes et algèbres de Lie*

CHAPITRE II

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES COMPACTS

§1. Introduction à l'analyse harmonique

a) Développements de Fourier.

À toute fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ admettant 1 pour période, on peut attacher son "développement de Fourier" $\Sigma_{r\in\mathbf{Z}} a_r(f)e^{2i\pi rt}$, avec $a_r(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi rt}dt$ pour tout $r \in \mathbf{Z}$. Plus généralement, si f est de carré sommable sur $[0,1]$ ($f \in L^2([0,1], \mathbf{C}, dx)$), cette série est encore bien définie, et converge vers f en moyenne quadratique (c'est-à-dire pour la norme L^2). De telles fonctions f s'identifient à des fonctions sur le groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq S^1$, et on va ici étendre la théorie de Fourier à tout groupe topologique compact G.

On doit pour cela réinterpreter les différents termes ou concepts sous-jacents aux développements de Fourier usuels.

i) L'expression dt dans les intégrales fournit une mesure μ sur S^1 invariante par translation, normalisée de sorte que $\int_{S^1} d\mu = 1$. Dans le cas général, ce rôle sera joué par la *mesure de Haar* μ sur G, voir §2.a. On dispose ainsi de l'espace $L^2(G, \mathbf{C}, \mu)$ des fonctions de carré sommable sur G, à valeurs complexes. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f, f') = \int_G f(g)\overline{f'(g)}d\mu(g)$, norme $||.|| := ||.||_2$.

ii) Les fonctions élémentaires $t \to e^{2i\pi rt}$ ($r \in \mathbf{Z}$), lues sur S^1, s'écrivent $\chi_r : S^1 \to \mathbf{C}^* : g \mapsto \chi_r(g) = g^r$. On a vu (feuilles de TD) que les $\chi_r, r \in \mathbf{Z}$, forment l'ensemble de tous les homomorphismes de groupes topologiques de S^1 dans $\mathbf{C}^* = GL_1(\mathbf{C})$. Dans le cas général, cela conduit à considérer l'ensemble $\hat{G}$ de toutes les classes d'isomorphismes de *représentations* linéaires irréductibles du groupe G, voir §1.b ci-dessous. Pour G compact, on verra qu'elles sont de degré fini; un élément de $\hat{G}$ est alors représenté par un homomorphisme continu $\rho : G \to GL_n(\mathbf{C}), n \in \mathbf{N}$, et on peut lui associer son caractère $\chi_\rho : G \to \mathbf{C} : g \mapsto \chi_\rho(g) := Tr(\rho(g))$, où Tr désigne la trace d'un matrice. C'est une fonction continue sur le compact G, donc L^2. Le caractère χ_ρ (qui, si $n > 1$, ne peut être vu comme un homomorphisme de groupe) ne dépend que de la classe de ρ dans $\hat{G}$, et caractérise cette classe; autrement dit, deux représentations irréductibles ρ, ρ' de G

non isomorphes ont des caractères distincts (on a $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = \delta_{\rho,\rho'}$ pour tout ρ, ρ', cf. §3, Lemme 3).

iii) On dit que $f : G \to \mathbf{C}$ est une fonction *centrale* si $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout h, g dans G. Par exemple, les caractères χ_ρ sont des fonctions centrales (puisque $Tr(ABA^{-1}) = Tr(A)$ pour tout $A, B \in GL_n(\mathbf{C})$).

Dans ces conditions, on peut énoncer:

Théorème 1 : *Soient G un groupe compact, μ sa mesure de Haar, normalisée par $\mu(G) = 1$, et $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G. Alors, toute fonction centrale $f \in L^2(G, \mathbf{C}, \mu)$ est limite au sens L^2 de sa série de Fourier $f = \Sigma_{\rho \in \hat{G}} a_\rho(f) \chi_\rho$, où $a_\rho(f) = \int_G f(g)\overline{\chi_\rho(g)} d\mu(g)$.*

En d'autres termes, les $\{\chi_\rho, \rho \in \hat{G}\}$ forment une base hilbertienne de l'espace des fonctions L^2 centrales. Si f est continue, on peut de plus, comme dans le cas classique, donner des critères sur la famille $\{a_\rho(f)\}$ pour que la convergence soit uniforme sur G. Voir le livre de J. Faraut.

b) Vocabulaire des représentations

Soient G un groupe topologique. Une *représentation* (sous-entendu: linéaire et complexe) de degré fini de G est la donnée d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel $V = V_\rho$ de dimension finie, et d'un homomorphisme de groupes continu $\rho = \rho_V : G \to GL(V/\mathbf{C})$ ou, de façon équivalente, $\rho : G \to GL_n(\mathbf{C})$, où $n = dim(V) := n(\rho)$ s'appelle le degré de ρ. Plus généralement, une représentation de G est la donnée d'un espace de Banach V sur $\mathbf{C}$, et d'un homomorphisme de groupes $\rho = \rho_V : G \to GL^{top}(V/\mathbf{C})$ (cf. I, §2.a) tel que pour tout $v \in V$, l'application $g \mapsto \rho(g)(v)$ de G dans V soit continue (si V est de dimension finie, ρ est alors automatiquement continue, mais pas en général). Si V est un espace de Hilbert on dit que ρ est *unitaire* si $\rho(G)$ est inclu dans $U(V)$. Sous-entendant ρ, on dit souvent que V est une représentation de G, et on écrit l'action de G que ρ induit sur V sous la forme $\rho(g)(v) = \rho(g)v = g.v = gv$.

Par exemple, supposons G localement compact, et soit μ une mesure de Haar sur G (voir §2.a). Soit H l'espace de Hilbert $L^2(G, \mathbf{C}, \mu)$, muni de son produit scalaire usuel. L'homomorphisme R de G dans $GL^{top}(H/\mathbf{C})$ qui attache à tout élément g de G l'automorphisme continu $R(g)$ de H défini par

$$H \ni f \mapsto R(g)(f) = f' \in H \ , \quad \text{avec } f' : G \ni x \mapsto f'(x) := f(g^{-1}x) \in \mathbf{C}$$

est une représentation unitaire de G, appelée la représentation régulière (à gauche) de G. Ce n'est en général pas une application continue (pour $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, il existe une suite de fonctions $f_n(x)$ telles que $||f_n(x)||_2 = 1$ et $||f_n(x) - f_n(x - \frac{1}{n})||_2 \geq 1$ pour tout n.)

On dit qu'un vecteur v de V est un *invariant* de la représentation si $gv = v$ pour tout g dans G; notation: $v \in V^G$. Une $\mathbf{C}$-ss-ev W de V stable (on dit aussi : invariant, mais il ne l'est en général pas point par point) sous G, i.e. tel que gv appartient à W pour tout $(g, v) \in G \times W$, s'appelle une *sous-représentation* de ρ. On dit que ρ est *irréductible* s'il n'existe aucun sous-espace *fermé* W de V stable sous G et distinct de $\{0\}$ et de V. Si V et W sont deux représentations (resp. unitaires) de G, leur somme directe (resp. orthogonale) est la représentation $V \oplus W$ définie par $g.(v \oplus w) = gv \oplus gw$. Si une représentation V est somme directe de deux sous-représentations propres, on dit qu'elle est *décomposable.* Noter qu'une représentation indécomposable n'est pas forcément irréductible (voir chap. I, 2.e). Néanmoins:

Lemme 1 : *Soit G un groupe compact, et ρ une représentation de G sur un espace de Hilbert V (par exemple sur un espace de dimension finie). Alors,*

i) il existe un produit scalaire b sur V tel que $b(gv, gv) = b(v, v)$ pour tout $g \in G, v \in V$, autrement dit tel que ρ soit une représentation unitaire pour ce produit scalaire.

ii) Si W est un sous-espace fermé de V stable sous G, son orthogonal $W^\perp$ relativement à b l'est aussi, et la représentation V est somme directe de W et de $W^\perp$.

Démonstration : i) si $(,)$ est le produit scalaire initial sur V, alors, la forme sesquilinéaire

$$b(v, w) := \int_G (gv, gw) d\mu(g)$$

répond à la question. (Exercice: déduire du lemme de Schur infra que si ρ est irréductible de degré fini, b est unique (à multiplication par un réel positif près).

ii) C'est clair par G-invariance de b.

Un *morphisme* entre deux représentations V et W de G est un homomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire continu $\phi : V \to W$ tel que $\phi(g.v) = g.\phi(v)$ pour tout $(g, v) \in G \times V$. On dit aussi que ϕ est G-linéaire, ou que c'est un G-morphisme, ou encore que ϕ entrelace V et W. Les représentations V et W sont dites *équivalentes* (ou isomorphes, ou, quand $V = W$, *conjuguées*) s'il existe un G-isomorphisme bi-continu de l'une vers l'autre (son inverse est encore un G-morphisme). On peut montrer que si V et W sont des Hilbert et que les représentations données sont unitaires, alors, l'existence d'un G-isomorphisme entraîne celle d'un G-isomorphisme isométrique de V vers W.

Lemme 2 (Lemme de Schur) : : *Soient V et W deux représentations complexes* irréductibles *de degré fini d'un groupe quelconque G , et ϕ un G-morphisme non identiquement nul de V vers W . Alors,*

i) ϕ est un isomorphisme;

ii) si $V = W$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $\phi = \lambda.id_V$.

Démonstration: Le noyau (resp. l'image) de ϕ est un sous-espaces invariant de V (resp. W). L'irréductibilité de ces représentations entraîne la première assertion. Sous les hypothèses de la seconde, ϕ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ (qui est algébriquement clos), et il suffit d'appliquer la première assertion au G-morphisme $\phi - \lambda id_V$.

Soient W et V deux représentations de G, et a un entier ≥ 0. On dit que V apparaît dans W avec la multiplicité a si W admet une sous-représentation isomorphe à la somme directe $V^{\oplus a} := V \oplus ... \oplus V$ de a copies de V, et que a est le plus grand entier vérifiant cette propriété. Par exemple, on déduit des lemmes 1 et 2 que toute représentation de degré fini d'un groupe compact G est isomorphe à une somme directe $V_1^{\oplus a_1} \oplus .... \oplus V_s^{\oplus a_s}$ de copies de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes, où les classes d'isomorphismes des V_i et les multiplicités a_i ne dépendent que de V.

On peut alors préciser le théorème 1 de la façon suivante.

Théorème 2 (Peter-Weyl): *soit G un groupe compact. Alors, toutes les représentations irréductibles de G sont de degré fini, et chacune apparaît dans la représentation régulière de G avec une multiplicité égale à son degré. De plus, la représentation régulière de G est isomorphe à la somme (topologique) orthogonale des $V_\rho^{\oplus n(\rho)}$, où ρ parcourt $\hat{G}$.*

En d'autres termes, à toute classe d'isomorphisme ρ dans $\hat{G}$, représentée par un espace vectoriel V_ρ, de dimension $n(\rho)$, on peut attacher une sous-représentation M_ρ de la représentation régulière $(L^2(G, \mathbf{C}, \mu), R)$ de G telle que M_ρ soit isomorphe à $V_\rho^{\oplus n(\rho)}$, que M_ρ soit orthogonale à $M_{\rho'}$ pour deux classes d'isomorphisme disctinctes ρ, ρ', et que

$$L^2(G, \mathbf{C}, \mu) = \overline{\oplus_{\rho \in \hat{G}} M_\rho}.$$

Quelques points de terminologie supplémentaires nous seront utiles. Soient (V, ρ) une représentation de G, et V^* son dual topologique (espace des formes linéaires continues sur V, avec sa norme naturelle, qui en fait un Banach). On munit V^* d'une structure de représentation de G en posant, pour toute forme linéaire continue ℓ sur V et tout g dans G: $\rho^*(g)(\ell) = \ell \circ \rho(g^{-1})$ (en abrégé : $g.\ell = \ell g^{-1}$), de sorte que pour tout $(g, \ell, v) \in G \times V^* \times V$, on a: $(g.\ell)(v) = \ell(\rho(g^{-1})(v))$; autrement dit, $\rho^*(g) \in End_K(V^*)$ est la transposée de $\rho(g^{-1}) \in End_K(V)$. On dit que ρ^* est la représentation duale, ou *contragrédiente*, de ρ. Soient maintenant V et W deux représentations de G. L'espace $Hom(V, W)$ des homomorphismes $\mathbf{C}$-linéaires continus de V dans W est naturellement muni d'une structure de représentation de G: poser, pour tout g dans G et tout K-homom. ϕ de V dans

W: $g.\phi = g\phi g^{-1}$. Un G-morphisme s'identifie ainsi à un invariant de la représentation $Hom(V, W)$. De même, G agit sur le ($\mathbf{R}$-)espace $Herm(V)$ des formes hermitiennes b sur V par la relation $(g.b)(v, v') := b(g^{-1}v, g^{-1}v')$, et les produits scalaires pour lesquels V est une représentation unitaire sont les invariants définis positifs de cette représentation.

§2. Les outils de la preuve.

a) Mesures de Haar.

Soient G un groupe localement compact, dont on suppose que la topologie provient d'une distance, et μ une mesure positive sur G (c'est-à-dire une forme linéaire sur l'espace $V = C_{comp}(G, \mathbf{R})$ des fonctions continues à support compact, prenant des valeurs ≥ 0 sur les fonctions ≥ 0; une telle forme linéaire est automatiquement continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact). Pour x dans G, les translations $\gamma(g) : x \mapsto gx$ et $\delta(g) : x \mapsto xg$ fournissent des représentations "régulières" de G sur V, attachant à $f \in V$ les fonctions sur G:

$$(R_\gamma(g))(f)(x) := f(g^{-1}x) \ ; \ (R_\delta(g))(f)(x) := f(xg).$$

[Exercice : l'isomorphisme $\phi : f \mapsto \{\phi(f) : x \mapsto f(x^{-1})$ entrelace les représentations R_γ et R_δ.] Leurs contragrédientes attachent à μ et à $g \in G$ les formes linéaires sur V

$$R^*_\gamma(g)(\mu) : f \mapsto \mu(R_\gamma(g^{-1})(f) = \textstyle\int_G f(gx)d\mu(x) \ ; \ R^*_\delta(g)(\mu) : f \mapsto \mu(R_\delta(g^{-1})(f) = \int_G f(xg^{-1})d\mu(x),$$

qui sont en fait des mesures. Comme $\gamma(g)$ et $\delta(g^{-1})$ sont des homéomorphismes de G sur G, on peut aussi considérer les mesures images de μ par ces changements de variables:

$$\gamma(g)_*\mu : f \mapsto \mu(f \circ \gamma(g)) = \int_G f(gx)d\mu(x) \ ; \ \delta(g^{-1})_*\mu : f \mapsto \mu(f \circ \delta(g^{-1}) = \int_G f(xg^{-1})d\mu(x),$$

ce qui montre à nouveau que $R^*_\gamma(g)(\mu) = \gamma(g)_*\mu$, $R^*_\delta(g)(\mu) = \delta(g^{-1})_*\mu$ sont des mesures sur G. On dit que μ est invariante à gauche (resp. à droite) si c'est un invariant de la représentation R^*_γ (resp. R^*_δ)), autrement dit si, pour tout ensemble mesurable B de G, et tout élément g de G,

$$(\gamma(g)_*\mu)(B) := \mu(g^{-1}B) = \mu(B) \ (resp. \ (\delta(g^{-1})_*\mu)(B) := \mu(Bg) = \mu(B).$$

Soit $\mu^\iota = \iota_*\mu$ la mesure image de μ par l'homéomorphisme $\iota : x \mapsto x^{-1}$ de G sur G. Alors, $(\gamma(g)_*\mu)^\iota = \delta(g^{-1})_*\mu^\iota$, et μ^ι est invariante à gauche si et seulement si μ est invariante à droite.

L'énoncé suivant, que nous admettrons, résulte dans le cas des groupes de Lie de l'existence de sections invariantes du fibré des formes différentielles de degré maximal sur G (voir cours de géométrie différentielle).

Théorème 3: *soit G un groupe localement compact.*

i) Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des mesures invariantes à gauche sur G est de dimension 1, et est engendré par une mesure positive μ. Une telle mesure s'appelle une mesure de Haar sur G.

ii) Il existe un homomorphisme continu $\Delta : G \to (\mathbf{R}^*)^+$, appelé module de G, tel que $\delta(g^{-1})_*\mu = \Delta(g)\mu$ pour tout $g \in G$. On a : $\mu^\iota = \Delta^{-1}\mu$.

On dit que G est unimodulaire si $\Delta = 1$, c'est-à-dire si ses mesures de Haar (à gauche) sont également invariantes à droite. C'est évidemment le cas des groupes commutatifs, mais aussi celui des groupes compacts (l'image de Δ étant alors un groupe compact), des groupes discrets, de $GL_n(\mathbf{R})$, ... Voici des exemples de mesures de Haar sur ces groupes unimodulaires:

- pour le groupe additif $G = \mathbf{R}^n$, la mesure de Lebesgue $dx_1...dx_n$;
- pour le groupe multiplicatif $(\mathbf{R}^*)^n$, la mesure $\mu = \frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2}...\frac{dx_n}{x_n}$
- pour $G = GL_n(\mathbf{R}) \ni x = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, la mesure $\mu = det(x)^{-1}dx_{11}dx_{12}...dx_{nn}$
- pour G fini, $\mu = |G|^{-1}\Sigma_{x\in G}\delta_x$, où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x;
- pour $G = SO_2(\mathbf{R})$, $\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$. Plus généralement, pour un groupe compact, l'unique mesure de Haar μ sur G telle que $\mu(G) = 1$ s'appelle la mesure de Haar de G.

b) La théorie spectrale.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{C}$ de produit scalaire $(,)$, de norme associée $||.||$. Comme H est isomorphe à son dual topologique, tout opérateur $A \in End(H/\mathbf{C})$ continu, c'est-à-dire de norme $||A|| = sup_{v\in H,||v||=1}||Av||$ finie, admet un adjoint A^*: A^* est défini par les relations $(Av, w) = (v, A^*w)$ pour tout $v, w \in H$, est continu et de norme $||A^*|| = ||A||$. On dit que A est autoadjoint si $A^* = A$. Comme en dimension finie, on vérifie que pour A autoadjoint,

$$||A|| = sup_{v\in V,||v||=1}|(Av, v)|,$$

que les valeurs propres de A sont réelles, et que deux sous-espaces propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

De l'existence d'une base topologique orthonormée de H, on déduit que la boule unité de H est compacte si et seulement si H est de dimension finie. On dit qu'un opérateur A est *compact* si l'image par A de la boule unité de H est relativement compacte. On montre (voir cours d'Analyse fonctionnelle) qu'une limite uniforme d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.

Théorème 4 : *Soit A un opérateur autoadjoint compact non nul sur un espace de Hilbert H. Alors, A admet au moins une valeur propre non nulle, et pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, le sous-espace propre $H(\lambda) := Ker(A - \lambda id_H)$ est de dimension finie.*

Démonstration : posons $\lambda = ||A|| \neq 0$. Quitte à remplacer A par $-A$, on peut construire une suite v_n de points de H de norme 1 tels que (Av_n, v_n) tende vers λ et que Av_n admette une limite, disons w. Alors, $||w|| \leq |A||$, et $||Av_n - \lambda v_n||^2 = ||Av_n||^2 - 2\lambda(Av_n, v_n) + \lambda^2$ tend vers $||w||^2 - \lambda^2 \leq 0$, donc vers 0. Ainsi, v_n tend vers w/λ, qui est vecteur propre de A. La boule unité de $H(\lambda)$ est égale à son image par $\frac{1}{\lambda}A$, donc est compacte; la seconde assertion en résulte.

§3. Le théorème de Peter-Weyl.

Soient μ la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact G, et $(,)$ le produit scalaire usuel sur l'espace de Hilbert $H = L^2(G, \mathbf{C}, \mu)$. Comme G est compact, toute fonction complexe continue sur G (et en particulier la fonction constante 1_G) appartient à H.

a) 1er pas : étude des représentations de degré fini.

Soit (V, ρ) une représentation complexe de G, de degré $n(\rho) = dimV$ fini. On appelle *caractère* de ρ la fonction

$$\chi_\rho = \chi_V : G \to \mathbf{C} : g \mapsto \chi_V(g) = Tr(\rho(g))$$

qui associe à tout élément g de G la trace de l'automorphisme $\rho(g)$ de V, i.e. la somme de ses valeurs propres. Comme ρ peut être rendue unitaire, les valeurs propres de $\rho(g)$ sont des racines de l'unité, et $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$. En l'élément neutre de G, $\chi_V(e) = \dim(V)$. Pour tout (g, h) dans G, $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$, donc χ_V est bien une fonction centrale sur G. On voit de même que deux représentations isomorphes ont le même caractère.

On vérifie aisément que si V et W deux représentations de degré fini de G, alors :

- le caractère de la représentation $V \oplus W$ est donné par: $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$.

- le caractère de la représentation contragrédiente V^* est : $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$;

- le caractère de la représentation $Hom(V, W)$ est : $\chi_{Hom(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g)$. En effet, pour tout $g \in G$, l'endomorphisme $\rho_V(g)$, qu'on peut supposer unitaire, est diagonalisable. Dans des bases de V et W formées de vecteurs propres, la matrice représentative de $\rho_{Hom(V,W)}(g)$ est donc la matrice diagonale $diag\big(\lambda_i^{-1}\mu_j; i = 1, ..., \dim V, j = 1, ..., dimW\big)$, où les λ_i, μ_j désignent les valeurs propres de $\rho_V(g), \rho_W(g)$, d'où la formule annoncée puisque l'inverse d'une racine de l'unité est sa complexe conjuguée.

Les caractères χ_V sont des fonctions continues sur G, donc appartiennent à H. Les *relations d'orthogonalité* suivantes sont fondamentales.

Lemme 3: *soient V et W deux représentations* irréductibles *de degré fini de G . Alors,*
i) si W n'est pas isomorphe à V : $(\chi_V, \chi_W) = 0$;
ii) si W est isomorphe à V : $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Démonstration: considérons le sous-espace V^G des vecteurs invariants de V. L'endomorphisme $p = \int_G \rho_V(g)d\mu(g)$ de V est un projecteur de V sur V^G. Sa trace vaut donc: $dim(V^G) = Tr(p) = \int_G Tr(\rho_V(g))d\mu(g)$, qui est le produit scalaire $(\chi_V, 1_G)$. Appliquons ce résultat à la représentation $Hom(V, W)$. D'après le lemme de Schur, $Hom(V, W)^G$ est de dimension 0 (resp. 1) si V et W ne sont pas (resp. sont) isomorphes. Ainsi $(\chi_{Hom(V,W)}, 1_G) = 0$ ou 1 suivant qu'on est dans le cas i) ou le cas ii), et la formule $\chi_{Hom(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$ permet de conclure.

b) 2e pas : toute représentation unitaire (V, ρ) de dimension infinie admet un sous-espace stable de dimension finie.

Pour le vérifier, construisons un opérateur autoadjoint compact non nul A sur V, invariant sous G, c'est-à-dire tel que $g.A := \rho(g)A\rho(g^{-1}) = A$ pour tout $g \in G$. Pour cela, soit π_v le projecteur orthogonal de V sur un vecteur v de norme 1: $\pi_v(w) := (w, v)v$. Alors, $A = \int_G g.\pi_v = \int_G g\pi_v g^{-1}d\mu(g)$:

$$w \mapsto A(w) = \int_G (g^{-1}w, v)gvd\mu(g) = \int_G (w, gv)gvd\mu(g)$$

[car $(,)$ est G-invariant] convient: puisque μ est une mesure de Haar, il est G-invariant, il est, comme π_v, autoadjoint, et on vérifie, en approchant l'application continue $g \mapsto g.\pi_v$ par des applications localement constantes, qu'il est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, donc compact.

Soit alors $W = Ker(A - \lambda id_V)$ un des sous-espaces propres, de dimension finie, fourni par le théorème 4. Comme les $\rho(g), g \in G$, commutent avec A, W est bien stable sous G.

c) 3e pas : coefficients matriciels

Considérons la représentation régulière $(H, R = R_\gamma)$, et soit (V, ρ) une représentation irréductible de degré fini n (et unitaire) de G. Choisissons une base orthonormée $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ de V et fixons un indice j. Comme $(v, g^{-1}xw) = (gv, xw)$ pour tout $v, w \in V, x, g \in G$, les n fonctions $c_{ij}^{(\rho)}(x) := c_{ij}(x) = (e_i, xe_j), i = 1, ..., n$ engendrent dans H une sous-représentation $V(j)$ isomorphe à V. On peut de plus montrer, comme au 1er pas, que $(c_{ij}, c_{i',j'}) = \frac{1}{n}\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$. Ainsi, la somme orthogonale $M(V) = V(1) \oplus ... \oplus V(n) \simeq V^{\oplus n}$ apparaît dans H. Par ailleurs, pour toute représentation irréductible W non isomorphe à V, et toute application $\mathbf{C}$-linéaire de ϕ de V dans W, l'application $\Phi = \int_G g.\phi d\mu(g)$ est un invariant de la représentation $Hom(V,W)$, donc est nulle par Schur. En choisissant $\phi = \phi_w : v \mapsto (v, e_i)w$ avec w dans W, on en déduit que $M(V)$ et $M(W)$ sont orthogonaux dans H. Ainsi, H contient la somme algébrique $H_0 = \oplus_{V\in\hat{G}} M(V) \simeq \oplus_{\rho\in\hat{G}} V_\rho^{\oplus n(\rho)}$.

d) 4e pas : H_0 est dense dans H

Pour le vérifier, montrons que son orthogonal $H_0^\perp$ est nul. C'est un espace de Hilbert stable sous G, donc dans le cas contraire, il contient d'après le 2e et le 1er pas une représentation irréductible $\mathcal{V}$, dont la classe d'isomorphisme apparaît déjà, d'après le 3e pas, dans une sous-représentation $M(V)$ de H_0. Pour f non nulle dans $\mathcal{V}$, la fonction $F(g) = \int_G f(gx)\overline{f(x)}d\mu(x) = (g^{-1}.f, f) = (f, g.f)$ appartient à $M(V)$. Montrons qu'elle lui est orthogonale, donc nulle. En effet, pour $u, v \in V$,

$$\int_G F(g)\overline{(u, gv)}d\mu(x) = \int_G \int_G f(gx)\overline{f(x)}.\overline{(u, gv)}d\mu(g)d\mu(x)$$

vaut, après changement de variable $gx = h$, $\int_G \overline{f(x)}\big(\int_G f(h)\overline{(u, hx^{-1}v)}d\mu(h)\big)d\mu(x)$, qui est nul puisque $x^{-1}v \in V$ et $f \in M(V)^\perp$. Mais alors, $0 = F(e) = \int_G |f(x)|^2 d\mu(x)$ et $f = 0$.

d) 5e pas : Le théorème de Peter-Weyl

Le 4e pas conclut la preuve du théorème 2. Mais les relations d'orthogonalité du 3e pas sur les $c_{i,j}^{(\rho)}$ en fournissent la forme plus précise suivante : les fonctions $\sqrt{n(\rho)}c_{i,j}^{(\rho)}, \rho \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq n(\rho)$, forment une base hilbertienne de $L^2(G, \mathbf{C}, \mu)$. En particulier, toute fonction complexe f de carré sommable sur G admet un développement en série

$$f = \Sigma_{\rho,i,j} a_{\rho,i,j}(f) c_{i,j}^{(\rho)}$$

convergeant en moyenne quadratique, dont les coefficients sont donnés par la formule $a_{\rho,i,j}(f) = n(\rho)\int_G f(g)\overline{c_{i,j}^{(\rho)}}(g)d\mu$.

e) 6e pas : Preuve du théorème 1

Vu les relations d'orthogonalité du Lemme 3, il suffit de vérifier que la seule fonction centrale f telle que $(f, \chi_V) = 0$ pour toute représentation irréductible (V, ρ), est la fonction nulle. Pour une telle V, posons $\phi_V = \int_G f(g)\rho_V(g)d\mu(g)$. Comme f est centrale et que μ est également invariante à droite, on voit que ϕ est un G-morphisme de V dans V, donc par

Schur, une homothétie. Mais sa trace vaut (f, χ_V^*), qui est nulle puisque V^* est également irréductible, donc $\phi_V = 0$. En particulier, les coefficients $a_{\rho,i,j}(f) = \int_G f(g)(ge_j, e_i)d\mu(g)$ sont tous nuls, et $f = 0$.

Conclusion

Le théorème de Peter-Weyl ramène l'étude des fonctions sur G à celle de ses représentations irréductibles, et incite donc à en dresser la "table" $\hat{G}$. Comme on le verra au chapitre 3, l'introduction des algèbres de Lie permet de *linéariser* ce problème. Elle nous permettra de plus d'augmenter la liste des groupes de Lie dont les représentations de degré fini vérifient un théorème de réductibilité complète analogue au Lemme 1 ci-dessus. Voir la conclusion du chapitre 4.

Université de Paris VI
D. Bertrand

Master M1 2007-2008
Groupes et algèbres de Lie

CHAPITRE III

DES GROUPES DE LIE AUX ALGÈBRES DE LIE

§1. Rappels matriciels

a) Exponentielle d'une matrice. (voir aussi feuilles de TD)

Soit $M_n(K)$ l'espace des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. C'est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$. Munissons K^n de son produit scalaire usuel, et soit $||.||$ la norme qu'il induit sur $M_n(K)$, identifié à $End(K^n)$. Pour tout X dans $M_n(K)$, la série

$$e^X := exp(X) = \Sigma_{k \geq 0} \, \frac{X^k}{k!}$$

est normale convergente, puisque $||X^k|| \leq ||X||^k$, et uniformément convergente sur tout compact de $M_n(K)$. L'application $X \mapsto exp(X)$ est donc K-analytique sur $M_n(K)$.

Si $XY = YX$, c'est-à -dire si X et Y commutent, $exp(X+Y) = exp(X)exp(Y)$, mais pas en général. Donc $exp(X)exp(-X) = \mathbf{I}_n$, et l'image de exp est contenue dans $GL_n(K)$. Puisque cette image est connexe, elle est même, pour $K = \mathbf{R}$, contenue dans $GL_n^+(\mathbf{R})$, ce qui découle aussi de la formule

$$det(exp(X)) = exp(Tr(X)) \qquad (1) \ ,$$

où Tr désigne la trace. Enfin, pour toute matrice inversible P:

$$P^{-1}exp(X)P = exp(P^{-1}XP) \qquad (2) \ .$$

Preuve de (1) : trigonaliser X, calculer les termes diagonaux, et revenir à X par (2). En préparation de la suite, voici une autre démonstration. L'application $\mathbf{R} \ni t \mapsto det(exp(tX)) \in K^*$ est composée de l'application différentiable $\mathbf{R} \ni t \mapsto exp(tX) \in M_n(K)$, dont la différentielle en 0 est l'application linéaire $\mathbf{R} \ni h \mapsto hX \in M_n(K)$, et de l'application multilinéaire Δ de $M_n(K) \simeq K^n \times ... \times K^n$ vers K : $Y = (Y_1, ..., Y_n) \mapsto det(Y_1, ..., Y_n)$, dont la différentielle en Y est l'application linéaire

$$d\Delta(Y)(H_1, ..., H_n) = \Sigma_{i=1,...,n}\Delta(Y_1, ..., Y_{i-1}, H_i, Y_{i+1}, ..., Y_n).$$

Donc F est différentiable en 0, et sa différentielle en 0 est l'application linéaire

$$d\Delta(\mathbf{I}_n) \circ df(0) : h \mapsto \Sigma_{i=1,\ldots,n} det(e_1, ..., e_{i-1}, hX_i, e_{i+1}, ..., e_n) = Tr(X)h,$$

où $exp(\mathbf{O}_n) = \mathbf{I}_n = (e_1, ..., e_n)$. Ainsi, f est un homomorphisme différentiable du groupe additif $\mathbf{R}$ vers le groupe multiplicatif K^*, vérifiant $df(0) = Tr(X)$. De $f(t+t') = f(t)f(t')$, on tire $df(t) = f(t)df(0)$, d'où $f(t) = exp(Tr(X)t)$, et (1) s'ensuit pour $t = 1$.

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. La formule (2) permet de définir l'exponentielle $exp(u) \in GL(V)$ de tout endomorphisme K-linéaire $u \in End(V)$ de V. Grâce à la décomposition de Jordan (voir l'alinéa b) ci-dessous), elle montre également que pout $K = \mathbf{C}$, $exp(M_n(\mathbf{C})) = GL_n(\mathbf{C})$. En revanche, dès que $n \geq 2$, $exp : M_n(\mathbf{R}) \to GL_n^+(\mathbf{R})$ n'est pas surjective; sur $\mathbf{R}$ comme sur $\mathbf{C}$, exp n'est pas injective.

Proposition 1 : *L'application $exp : M_n(K) \to GL_n(K)$ est un difféomorphisme local d'un voisinage de $\mathbf{O}_n$ sur un voisinage $\mathbf{I}_n$.*

Démonstration : $exp(X) = \mathbf{I}_n + X + ||X||\epsilon(X)$ avec $\epsilon(X) \to \mathbf{O}_n$ quand $\mathbf{X} \to \mathbf{O}_n$, donc $d(exp)(\mathbf{O}_n)$ est l'application linéaire identité sur $M_n(K)$, qui est inversible. On conclut par le théorème des fonctions implicites.

L'application inverse locale de exp est définie au voisinage de $\mathbf{I}_n$ par la série logarithmique

$$Log(Y) = \Sigma_{k\leq 1}(-1)^k \frac{(Y - \mathbf{I}_n)^k}{k},$$

qui converge normalement pour $||Y - \mathbf{I}_n|| < 1$, où elle vérifie $exp(Log(Y)) = Y$. Pour $||X|| < \ell n(2)$ (donc $||exp(X) - \mathbf{I}_n|| \leq exp(||X||) - 1 < 1$, on a $Log(exp(X)) = X$. Lorsqu'une matrice (ou un endomorphisme) X vérifie $exp(X) = Y$, on dira que X est un logarithme de Y.

Si Y est une matrice unipotente (voir infra) de norme quelconque, la série $Log(Y)$ se réduit à un polynôme (de degré $\leq n-1$ en Y), qui est bien un logarithme de Y. De façon générale, voici un algorithme donnant un logarithme x d'un K-automorphisme g de V:

i) écrire la décomposition de Jordan $g = g_s g_u$ de g (voir Proposition 2)

ii) choisir des logarithmes complexes des valeurs propres de g_s, et donner un logarithme x_s de g_s en exprimant g_s comme un polynôme en g;

iii) choisir $x_u := Log(g_u)$ pour logarithme de l'endomorphisme unipotent g_u;

iv) poser $x := x_s + x_u$. Comme x_s et x_u sont des polynômes en g, ils commutent et $exp(x) = exp(x_s)exp(x_u) = g_s g_u = g$.

Lemme 1 : *soient X et Y deux éléments de $M_n(K)$. Alors,*

i) $lim_{k\to+\infty}\big(exp(\frac{X}{k})exp(\frac{Y}{k})\big)^k = exp(X+Y)$*;*
ii) $lim_{k\to+\infty}\big(exp(\frac{X}{k})exp(\frac{Y}{k})(exp(\frac{-X}{k})exp(\frac{-Y}{k})\big)^{k^2} = exp([X,Y])$, *où*

$$[X,Y] = XY - YX$$

désigne le **crochet de Lie** *de* X *et* Y*.*

Démonstration : $exp(tX)exp(tY) = exp\big(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\big)$.

b) Décomposition de Jordan

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et a un K-endomorphisme de V. Dans le cas réel, on note $V_{\mathbf{C}}$ le complexifié de V, et $a_{\mathbf{C}}$ l'extension $\mathbf{C}$-linéaire de a à $V_{\mathbf{C}}$.

On dit que a est *semi-simple* si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

- $V_{\mathbf{C}}$ est somme directe de sous-espaces propres pour $a_{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire $a_{\mathbf{C}}$ est diagonalisable;

- le polynôme minimal $m_a(T)$ de a est séparable (= n'a que des racines simples dans $\mathbf{C}$), autrement dit: la K-algèbre $K[a]$ engendrée par a dans $End(V/K)$ est isomorphe à un produit de corps.

On dit que a est *nilpotent* si une puissance de a est nulle (de façon equivalente, si toutes les valeurs propres de $a_{\mathbf{C}}$ sont nulles), et unipotent si $a - id_V$ est nilpotent (de façon equivalente, si toutes les valeurs propres de $a_{\mathbf{C}}$ sont égales à 1).

Proposition 2 : i) (Jordan additif) *Soit a un K-endomorphisme de V. Il existe un unique couple (a_s, a_n) de K-endomorphismes de V, avec a_s semi-simple, a_n nilpotent et $a_s a_n = a_n a_s$. De plus, a_s et a_n s'expriment comme des polynômes en a à coefficients dans K, sans termes constants.*

ii) (Jordan multiplicatif) *Soit g un K-automorphisme de V. Il existe un unique couple (g_s, g_u) de K-automorphismes de V, avec g_s semi-simple, g_u unipotent et $g_s g_u = g_u g_s$. De plus, g_s et g_u s'expriment comme des polynômes en a à coefficients dans K.*

Démonstration : i) pour l'existence de ces décompositions, et leur expression sous forme polynômiale, voir le cours d'algèbre de L3.

ii) L'unicité se déduit de la remarque suivante. Soit a et b deux endomorphismes de V tels que $ab = ba$. Alors, si a et b sont nilpotents, $a + b$ est nilpotent; si a et b sont unipotents, ab est unipotent; si a et b sont semi-simples, ab et $a + b$ sont semi-simples.

Supposons maintenant que $K = \mathbf{C}$, et considérons une famille $\mathcal{M}$ d'endomorphismes de V commutant deux à deux. Alors, $\mathcal{M}$ est trigonalisable (c'est-à-dire $\exists g \in GL(V/\mathbf{C}), \forall a \in$

$\mathcal{M}, gag^{-1}$ est triangulaire supérieure); de plus, si chaque élément de $\mathcal{M}$ est semi-simple, $\mathcal{M}$ est diagonalisable (c'est-à-dire $\exists g \in GL(V/\mathbf{C}), \forall a \in \mathcal{M}, gag^{-1}$ est diagonale, ou encore, quand $\mathcal{M} \subset GL(V/\mathbf{C})$: la représentation V du groupe G engendré par $\mathcal{M}$ dans $GL(V/\mathbf{C})$ est somme directe de sous-représentations de degré 1). On en déduit la version "globale" suivante de la proposition 2.

Proposition 3 : *soit G un sous-groupe* abélien fermé *de $GL_n(\mathbf{C})$ vérifiant l'hypothèse suivante:*

$$(\mathbf{J}_{mult}) : \forall g = g_s g_u \in G, g_s \in G \text{ et } g_u \in G.$$

Alors

i) les ensembles $G_s = \{g \in G, g = g_s\}$ et $G_u = \{g \in G, g = g_u\}$ sont des sous-groupes fermés de G;

ii) G est isomorphe à $G_s \times G_u$.

Remarques : 1) La propriété $(\mathbf{J}_{mult})$ est satisfaite par tous les sous-groupes *algébriques* (abéliens ou non) de GL_n (voir A. Borel, *Linear algebraic groups*, pp. 150 et 159), mais pas en général. Contre-exemple: $G = exp(\mathfrak{g}) \subset GL_2(\mathbf{C})$, avec $\mathfrak{g}$ comme dans (3) ci-dessous.

2) Pour un sous-groupe G quelconque de GL_n, le sous-ensemble G_u de (i) est toujours un fermé de G, mais en général pas un sous-groupe; en revanche, G_s n'est presque jamais un fermé (ni un sous-groupe; exemple: $G = GL_n$).

3) La proposition 2.i (Jordan additif) fournit un corollaire similaire à la Proposition 3 pour les sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{gl}_n$. La propriété analogue $(\mathbf{J}_{add})$ est satisfaite par toutes les algèbres de Lie semi-simples (voir chapitre IV), mais pas en général. Par exemple, la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{C}\} \simeq \mathbf{C}$ de $\mathfrak{gl}_2$ ne contient ni les parties semi-simples ni les parties nilpotentes de ses éléments non nuls.

4) Signalons enfin le théorème de Kolchin (voir Serre, *Lie algebras and Lie groups*, p. 35), dont l'analogue pour les algèbres de Lie sera démontré au chapitre IV (théorème d'Engel) : *soit G un sous-groupe (non nécessairement abélien) de GL_n formé d'éléments unipotents. Alors, G est trigonalisable.* Autrement dit, un sous-groupe G de GL_n est (globalement) conjugué à un sous-groupe de $B_n^{(1)}$ si et seulement si chacun de ses éléments est (individuellement) conjugué à un élément de $B_n^{(1)}$.

§2. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

a) Rudiments sur les algèbres de Lie.

Soit K un corps commutatif quelconque.

Définition : une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ sur K est un K-espace vectoriel muni d'une loi de composition interne $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X,Y) \mapsto [X,Y]$ qui est K-bilinéaire, alternée ($[X,X] = 0$, donc $[X,Y] = -[Y,X]$), et qui vérifie l'identité de Jacobi

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \ , \ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Si $K = \mathbf{R}$, on dira simplement "algèbre de Lie". La loi $[,]$ s'appelle le crochet de Lie.

Pour tout élément X de $\mathfrak{g}$, on note $ad(X) \in End(\mathfrak{g}/K)$ l'endomorphisme du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$: $Y \mapsto ad(X)(Y) := [X,Y]$. On a donc

$$ad(X)([Y,Z]) = [ad(X)(Y), Z] + [Y, ad(X)(Z)]. \qquad (3).$$

Un *morphisme* entre deux algèbres de Lie est un homomorphisme f des K-espaces vectoriels sous-jacents respectant leurs lois d'algèbres de Lie : $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$. Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel stable sous le crochet de Lie : $\forall X, Y \in \mathfrak{h}, [X,Y] \in \mathfrak{h}$.. Un *idéal* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie vérifiant $\forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}, [X,Y] \in \mathfrak{h}$; l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est alors naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie. Pour tout morphisme d'algèbre de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, le noyau $\mathfrak{h} = Ker(f)$ de f est un idéal de $\mathfrak{g}$, l'image $\mathfrak{h}' = Im(f)$ de f est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$, et f induit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}'$.

On appelle centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'idéal

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, [X,Y] = 0\} = Ker(ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g}/K))$$

de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie *abélienne* si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, les ensembles

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{h}' = \{X + Y, X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{h}'\} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] = \{\Sigma_i [X_i, Y_i], X_i \in \mathfrak{h}, Y_i \in \mathfrak{h}'\}$$

sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ appelés respectivement somme et produit de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{h}'$. En particulier, *l'algèbre dérivée* $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. C'est le plus petit idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie abélienne.

Exemples : 1) soit $\mathbf{M} = End(V/K)$, où V est un K-espace vectoriel, ou, plus généralement, soit $\mathbf{M}$ une K-algèbre associative. On lui attache une structure de K-algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}(V/K)$, en posant $[X,Y] = XY - YX$. (Noter que pour une K-algèbre de Lie générale, le produit XY n'a pas de sens.) Pour éviter les confusions, $End(K^n) = M_n(K)$, munie de cette structure d'algèbre de Lie, sera toujours notée $\mathfrak{gl}_n(K)$ (ou $\mathfrak{gl}_n$ si $K = \mathbf{R}$).

2) soit A une K-algèbre non nécessairement associative. Une *dérivation* ∂ de A est un endomorphisme du K-espace vectoriel sous-jacent à A vérifiant la formule de Leibniz: $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$. L'ensemble $Der(A)$ des dérivations de A est un sous-espace vectoriel de $End(A/K)$. Le composé $\partial\partial'$ de deux dérivations ∂, ∂' n'est en général pas une dérivation (autrement dit, $Der(A)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $\mathbf{M} = End(A/K)$), mais $[\partial, \partial'] := \partial\partial' - \partial'\partial$ est encore une dérivation de A. Ainsi, $Der(A)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A/K)$.
[Par exemple (voir cours de géométrie différentielle), soient C une variété différentiable, et $O(C)$ la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions différentiables sur C. Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\Gamma(C, TC)$ des champs de vecteurs sur C, muni du crochet de Lie, est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $Der(O(C))$.]

Une dérivation d'une K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est ainsi un élément ∂ de $End(\mathfrak{g}/K)$ vérifiant $\partial([X, Y]) = [\partial X, Y] + [X, \partial Y]$, et la formule (3) -qui traduit l'identité de Jacobi- signifie finalement que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $ad(X) \in Der(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$.

Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie. On appelle *représentation* de $\mathfrak{g}$ la donnée d'un K-espace vectoriel V *de dimension finie* et d'un morphisme d'algèbre de Lie

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K).$$

Considérons par exemple l'application $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K) = End(\mathfrak{g}/K)$: elle attache à tout élément X de $\mathfrak{g}$ l'endomorphisme $ad(X)$ du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$. La formule de Jacobi s'écrit

$$ad([X, Y])(Z) := [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = ad(X)\big(ad(Y)(Z)\big) - ad(Y)\big(ad(X)(Z)\big)$$

$$= \big(ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X)\big)(Z) = [ad(X), ad(Y)](Z),$$

ce dernier crochet étant celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$ attachée à $End(\mathfrak{g}/K)$, de sorte que $ad([X, Y]) = [ad(X), ad(Y)]$. En d'autres termes, ad est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, d'espace de représentation $V = \mathfrak{g}$ elle-même. On l'appelle la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$. Elle est d'autant plus intéressante que le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = Ker(ad)$ de $\mathfrak{g}$ est petit.

b) L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie, donné comme sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$. Un *sous-groupe à un paramètre* de G est un homomorphisme de groupes topologiques $f : \mathbf{R} \to G$. Choisissant une fonction k de classe C^1 à support compact telle que $\int_{\mathbf{R}} k(x) f(-x) dx \neq 0$, on déduit de la relation

$$\int_{\mathbf{R}} k(t-s) f(s) ds = \int_{\mathbf{R}} k(x) f(t-x) dx = f(t) \int_{\mathbf{R}} k(x) f(-x) dx$$

que f est une application différentiable. Sa différentielle en 0 est une application linéaire $df(0) = A : \mathbf{R} \ni h \mapsto hA \in M_n(\mathbf{R})$, et on déduit de la relation $f(t+t') = f(t)f(t')$ que $df(t) = f(t)df(0)$, d'où $f(t) = exp(tA)$.

Considérons maintenant l'ensemble

$$Lie(G) := \{X \in M_n(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, exp(tX) \in G\}$$

des différentielles en 0 de tous les sous-groupes à un paramètre de G. Puisque G est fermé, on déduit du Lemme 1 que $Lie(G)$ est une $\mathbf{R}$-algèbre de Lie pour la loi $[X,Y] = XY - YX$, c'est-à-dire une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ (voir exemple 1 ci-dessus). On l'appelle l'*algèbre de Lie du groupe de Lie* G , et on la note souvent de la “même” lettre $\mathfrak{g} = Lie(G)$ que G.

Exemples de base

a) $Lie(GL_n(\mathbf{R})) = \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})(= M_n(\mathbf{R}))$. Si deux sous-groupes de Lie G, G' de $GL_n(\mathbf{R})$ ont la même composante neutre G^0, alors $Lie(G^0) = Lie(G) = Lie(G')$. Si $G \subset G'$, $Lie(G) \subset Lie(G')$.

$Lie(GL_n(\mathbf{C})) := \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ est l'algèbre de Lie attachée à l'algèbre associative $M_n(\mathbf{C}) \subset M_{2n}(\mathbf{R})$. C'est une algèbre de Lie sur $\mathbf{C}$.

b) $Lie(SL_n(\mathbf{R})) := \mathfrak{sl}_n(\mathbf{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}), Tr(X) = 0\}$.

c) $Lie(O_n(\mathbf{R})) = Lie(SO_n(\mathbf{R})) := \mathfrak{so}_n(\mathbf{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}), X + {}^tX = 0\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques.

$Lie(SL_n(\mathbf{C})) := \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}), Tr(X) = 0\}$ et $Lie(SO_n(\mathbf{C})) := \mathfrak{so}_n(\mathbf{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}), X + {}^tX = 0 = 0\}$ sont des algèbres de Lie sur $\mathbf{C}$, tandis que

c') $Lie(U_n) := \mathfrak{u}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}), X + X^* = 0\}$ (avec $X^* := {}^t\overline{X}$) est seulement une algèbre de Lie sur $\mathbf{R}$. Par exemple, $\mathfrak{u}_1 = i\mathbf{R} \subset \mathfrak{gl}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. Idem pour $Lie(SU_n) := \mathfrak{su}_n = \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$.

d) $Lie(Sp_{2n}(K)) := \mathfrak{sp}_{2n}(K) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(K), {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0\}$. Plus généralement, pour toute forme bilinéaire b sur un K-espace vectoriel V,

$Lie(GL(V,b)) := \mathfrak{gl}(V,b) = \{X \in \mathfrak{gl}(V/K), \forall v, w \in V, b(Xv,w) + b(v,Xw) = 0\}$.

e) $Lie(B_n(K) := \mathfrak{b}_n(K)$ (ou $\mathfrak{t}_n(K)$) $= \{X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(K), \forall i > j, x_{i,j} = 0\}$ (matrices triangulaires supérieures).

$Lie(B_n^{(1)}(K) := \mathfrak{b}_n^{(1)}(K)$ (ou $\mathfrak{t}_n^{(1)}(K)$) $= \{X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(K), \forall i \geq j, x_{i,j} = 0\}$ (matrices triangulaires supérieures nilpotentes).

f) $Lie((S^1)^n) = (i\mathbf{R})^n \simeq \mathbf{R}^n$ est une $\mathbf{R}$-algèbre de Lie abélienne. Le “i” rappelle qu'on la voit comme une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie abélienne complexe $Lie((\mathbf{C}^*)^n) = \mathbf{C}^n$ formée par les matrices diagonales de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$.

Par définition, la restriction à $\mathfrak{g} = Lie(G)$ de l'application exponentielle exp sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ prend ses valeurs dans G. Cette restriction s'appelle *l'application exponentielle de G*, et est notée exp_G.

Théorème 1 : *Soient G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application exponentielle $exp_G : \mathfrak{g} \to G$ établit un difféomorphisme local d'un voisinage de $\mathbf{O}_n$ dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de $\mathbf{I}_n$ dans G.*

Démonstration : l'injectivité locale résulte de la Proposition 1, mais pas la surjectivité locale, puisqu'on a restreint la source de exp. Soit E un $\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M_n(\mathbf{R})$. On montre alors que

i) il existe un voisinage $\mathcal{V}'$ de $\mathbf{O}_n$ dans E tel que $exp(\mathcal{V}') \cap G = \{\mathbf{I}_n\}$;

ii) il existe des voisinages $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) de $\mathbf{O}_n$ (resp. $\mathbf{I}_n$) dans $\mathfrak{g}$, E (resp. G) tels que l'application $F : (X, Y) \mapsto exp(X)exp(Y)$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$;

iii) Posons $\mathcal{W}' = F(\mathcal{U} \times \mathcal{V}')$. Pour tout $g \in \mathcal{W}' \cap G$, il existe $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}'$ tels que $g = F(X, Y)$. Mais alors, $exp(Y) = exp(-X)g \in exp(\mathcal{V}') \cap G = \mathbf{I}_n$, d'où $g = exp(X)$.

On déduit de ce théorème que G est localement homéomorphe à $\mathbf{R}^d$, où $d = dim_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g})$ s'appelle la *dimension du groupe de Lie G*.

Exercice : déterminer la dimension de tous les groupes de Lie (Liste a à f) du chapitre I.

Combiné avec le Lemme 1 du chapitre I, le théorème 1 entraîne :

Corollaire 1 : *la composante neutre G^0 de G est engendrée (comme sous-groupe fermé) par l'image de exp_G. En particulier, si deux sous-groupes fermés G_1 et G_2 de $GL_n(\mathbf{R})$ ont la même algèbre de Lie, leurs composantes neutres coïncident.*

Corollaire 2 : *soient G un sous-groupe fermé connexe de $GL_n(\mathbf{R})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et H un sous-groupe fermé connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors,*

i) H est distingué dans G si et seulement si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$;

ii) H est la composante neutre du centre $Z(G)$ de G si et seulement si $\mathfrak{h}$ est le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

Mais une sous-algèbre de Lie (ou même un idéal) $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ n'est pas nécessairement l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de G (considérer comme d'habitude une droite $\mathfrak{h}$ de pente irrationnelle dans l'algèbre de Lie abélienne $\mathbf{R}^2 \simeq Lie((S^1)^2)$.)

c) Représentations

Soient G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $\rho : G \to GL(V/K) \simeq GL_m(K)$ une représentation continue du groupe topologique G sur un espace vectoriel V

de dimension finie m sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'image $\rho(G)$ n'est pas forcément fermée dans $GL_m(K)$, mais pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application $t \mapsto \rho\big(exp(tX)\big)$ de $\mathbf{R}$ dans $GL_m(K) := G'$ est un sous-groupe à un paramètre du groupe G', donc de la forme $exp(tX')$, pour un unique élément X' de $\mathfrak{gl}_m(K)$ ne dépendant que de ρ et de X. Posons $X' = \pi(X)$. On vérifie alors que

$$\pi(\lambda X + Y) = \lambda\pi(X) + \pi(Y), \pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$$

pour tout X, Y dans $\mathfrak{g}$ et tout λ *dans* $\mathbf{R}$, de sorte que $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K)$ est une représentation de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$, appelée *représentation dérivée* de ρ, et notée $\pi = d\rho$. [On peut en fait montrer que ρ est nécessairement différentiable, de sorte que $d\rho$ est la différentielle, en $\mathbf{I}_n$, de ρ.] Elle est caractérisée par la relation

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \ \rho(exp_G(X)) = exp_{G'}(d\rho(X)) \qquad\qquad (4).$$

Exemple : pour tout g dans G, $Ad(g) : X \mapsto Ad(g)(X) := gXg^{-1}$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$, en vertu de la formule (2) du §1. Comme $Ad(gg') = Ad(g)Ad(g')$, l'application $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ est une représentation de G, appelée la *représentation adjointe du groupe* G. Sa représentation dérivée est la représentation adjointe ad de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui vérifie : $exp_{GL(\mathfrak{g})}(ad(X)) = Ad(exp_G(X))$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$.

Lemme 2 : *On suppose G connexe. Soient (V, ρ) une représentation de G, de représentation dérivée $\pi = d\rho$, et W un K-sous-espace vectoriel de V. Alors, W est stable sous ρ si et seulement s'il l'est sous π.*
(W stable sous π signifie bien entendu que pout tout $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)(W) \subset W$.)

Démonstration : si f est un élément du dual V^* de V s'annulant sur W, et si W est stable sous ρ, on a pour tout $t \in \mathbf{R}, X \in \mathfrak{g}, w \in W$:

$$0 = f(\rho(exp(tX))(w)) = tf(\pi(X)(w)) + O(t^2),$$

d'où $f(\pi(X)(w)) = 0$ et W est stable sous π. Pour la réciproque, appliquer le Corollaire 1 ci-dessus.

On dit qu'une représentation d'algèbre de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K)$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces de V stables sous π sont $\{0\}$ et V. Le Lemme 2 énonce que pour G connexe, une représentation ρ de G est irréductible si et seulement si sa représentation dérivée $d\rho$ l'est.

Soient enfin ρ_1 et ρ_2 deux représentations de G telles que $d\rho_1 = d\rho_2$. On déduit de la formule (4) et du Corollaire 1 que ρ_1 et ρ_2 coïncident sur un voisinage de l'élément neutre de G, donc sur G^0. En vertu du Lemme 2, il *suffit* donc, pour connaître l'ensemble $\hat{G}$ de toutes les représentations irréductibles de degrés finis d'un groupe de Lie connexe G, de connaître toutes celles de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Conclusion

Le programme proposé à la fin du chapitre II se décompose ainsi en deux temps :

i) dresser d'abord la liste des représentations irréductibles $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K)$ de l'algèbre de Lie de G. Voir le chapitre V pour quelques exemples.

ii) reconnaître ensuite celles qui sont de la forme $d\rho$ pour une représentation ρ, automatiquement irréductible, de G. [Le théorème du chapitre I , §1, permet de montrer qu'à isomorphisme près, toutes le seront si le groupe connexe G est simplement connexe.]

CHAPITRE IV

STRUCTURE DES ALGÈBRES DE LIE

On ne considère désormais que des algèbres de Lie de dimension finie sur un corps K, de caractéristique nulle à partir du §2.

Le Lemme 2 du chapitre III, joint au Lemme 1 du chapitre II et au Théorème du chapitre I , montre que toute représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe est somme directe de représentations irréductibles. L'exemple des algèbres de Lie $Lie(B_n(K)) := \mathfrak{b}_n(K)$ (matrices triangulaires supérieures) et $Lie(B_n^{(1)}(K)) := \mathfrak{b}_n^{(1)}(K)$ (matrices triangulaires supérieures nilpotentes), cf. chapitre III, §2.b, Exemple (e), interdit d'espérer un tel énoncé dans le cas général. L'un des buts du présent chapitre est de montrer que les algèbres de Lie de ce type (ou plus précisément: les algèbres de Lie résolubles, et en particulier les nilpotentes) en sont la seule obstruction. Ainsi, toute algèbre de Lie semi-simple (c'est-à-dire n'admettant pas d'idéal résoluble non nul) vérifie un théorème de réductibilité complète. Cette propriété se reflète dans la structure-même des algèbres de Lie semi-simples: ce sont les sommes directes d'algèbres de Lie simples (c'est-à-dire non abéliennes et dépourvues d'idéaux propres).

Avant de commencer l'étude de cette classification, un point de terminologie concernant les représentations π d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans une algèbre de matrices $\mathfrak{gl}(V/K)$: un vecteur v de V est dit invariant sous l'action de $\mathfrak{g}$ si $\pi(X)v = 0$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$ (expliquer pourquoi !); un sous-espace W de V est dit stable sous $\mathfrak{g}$ si $\pi(X)(W) \subset W$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. La représentation naturelle π^* de $\mathfrak{g}$ sur le dual V^* de V attache à une forme linéaire f sur V et à $X \in \mathfrak{g}$ la forme linéaire $\pi^*(X)f = X.f : v \to -f(X.v)$, de sorte que si $\pi = d\rho$, $\pi^* = d\rho^*$; de même, si B est une forme bilinéaire sur V, $X.B$ sera la forme bilinéaire $X.B(v_1, v_2) = -B(X.v_1, v_2) - B(v_1, X.v_2)$, et B est invariant sous $\mathfrak{g}$ ssi $B(Xv_1, v_2) = -B(v_1, Xv_2)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}, v_1, v_2 \in V$. Si ϕ est un homomorphisme K-linéaire entre deux espaces de représentations V, V' de $\mathfrak{g}$, $(X.\phi)$ est l'homomorphisme K-linéaire défini par $(X.\phi)(v) = X.\phi(v) - \phi(X.v)$; $Hom(V, V')$ devient ainsi l'espace d'une représentation de $\mathfrak{g}$ dont les invariants ϕ sont caractérisés par la condition $X.\phi(v) = \phi(X.v)$ pour tout $(X, v) \in \mathfrak{g} \times V$.

§**1. Algèbres de Lie nilpotentes.** (voir aussi feuilles de TD)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K. Pour tout couple de sous-e-v. V_1, V_2 de $\mathfrak{g}$, on note $[V_1, V_2] = [V_2, V_1]$ le sous-e-v de $\mathfrak{g}$ engendré par les $[X_1, X_2]$, où X_1, X_2 parcourent V_1, V_2. Si V_1 et V_2 sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, $[V_1, V_2]$ est un idéal contenu dans $V_1 \cap V_2$. La suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante (au sens large) d'idéaux définie par $C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, ..., C^n(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^{n-1}(\mathfrak{g})]$, de sorte que $C^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := D\mathfrak{g}$ est *l'idéal dérivé* de $\mathfrak{g}$. Alors, $[C^r(\mathfrak{g}), C^s(\mathfrak{g})] \subset C^{r+s}(\mathfrak{g})$, et on dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie *nilpotente* si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

i) pour n assez grand, $C^n(\mathfrak{g}) = 0$;

ii) il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de $\mathfrak{g}$ tels que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ pour tout i;

iii) pour n assez grand et pout tout n-uple $X_1, ..., X_n$ d'éléments de $\mathfrak{g}$,

$$ad(X_1)ad(X_2)...ad(X_{n-1})(X_n) = 0.$$

Exercice : a) vérifier ces équivalences;

b) Démontrer les théorèmes usuels d'isomorphismes : si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$; si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

c) Montrer que (ii) équivaut à demander que $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ soit inclus dans le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_{i+1}$.

d) Montrer que toute sous-algèbre de Lie (resp. tout quotient) d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotent(e).

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle **drapeau** de V la donnée d'une suite décroissante $\mathcal{D} : V = V_n \supset V_{n-1} \supset ... \supset V_0 = 0$ de sous-espaces vectoriels de V tels que $dim(V_k) = k$ pour tout k. Pour tout $i = 0, ..., n-1$, on pose

$$\mathfrak{b}^{(i)}(\mathcal{D}) = \{X \in End(V/K), \forall k = i, ..., n, XV_k \subset V_{k-i}\}.$$

Alors, $\mathfrak{b}(\mathcal{D}) := \mathfrak{b}^{(0)}(\mathcal{D}) = \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V/K)$, isomorphe à $\mathfrak{b}_n(K)$, $D\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{b}^{(1)}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{b}_n^{(1)}(K)$ (voir TD 4, ex. 3.5). Plus généralement, $[\mathfrak{b}^{(i)}, \mathfrak{b}^{(j)}] = \mathfrak{b}^{(i+j)}$ pour tout i, j non tous deux nuls, de sorte que $\mathfrak{b}^{(1)}(\mathcal{D})$ est une algèbre de Lie nilpotente.

Théorème 1 (Engel) : *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V/K)$ telle que tout élément X de $\mathfrak{g}$ soit un endomorphisme nilpotent de V. Alors, il existe un drapeau $\mathcal{D}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{(1)}(\mathcal{D})$.*

[Autrement dit : si tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont trigonalisables et à valeurs propres toutes nulles, ils sont simultanément trigonalisables.]

Démonstration : *1er pas* : par une récurrence sur $dim(V)$, on se ramène à montrer que sous les hypthèses du théorème, il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $Xv = 0$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$ (noter que $\mathfrak{g}$ agit alors sur $V/K.v$.)

2e pas : soit $X = X_s + X_n$ la décomposition de Jordan d'un élément X de $End(V/K)$. Alors (exercice), *la décomposition de Jordan de l'élément* $ad(X)$ *de* $End(End(V/K)/K)$ *vérifie* $(ad(X))_s = ad(X_s), (ad(X))_n = ad(X_n)$. Dans notre cas, $ad(X)$ agit donc de façon nilpotente sur $End(V/K)$, et donc aussi sur $\mathfrak{g}$ (qu'il laisse stable).

3e pas : par récurrence sur $dim(\mathfrak{g})$, on peut supposer l'assertion du 1er pas établie pour toutes les algèbres de Lie de dimension $< dim(\mathfrak{g})$. Choisissons une sous-algèbre de Lie propre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale. Alors, l'algèbre de Lie $ad(\mathfrak{h})$ agit de façon nilpotente sur $V' = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (cf. 2e pas), donc (récurrence) il existe un élément X' de $\mathfrak{g}$ hors de $\mathfrak{h}$ tel que $[\mathfrak{h}, X'] \subset \mathfrak{h}$. Dans ces conditions, $\mathfrak{h} + K.X' = \mathfrak{g}$ par maximalité, et $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1.

4e pas : comme $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, le sous-e.v $W = \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{h}, Xv = 0\}$ de V est stable sous $\mathfrak{g}$ (en effet, $XYv = YXv + [X,Y]v = 0$ pour tout X, Y, v dans $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, W$). D'après l'hypothèse de récurrence, $W \neq 0$. Si Y engendre une droite supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, tout vecteur propre $v \in W$ de Y est tué par Y (car Y est nilpotent), et par $\mathfrak{h}$ (car $v \in W$), donc par $\mathfrak{g}$ toute entière.

Théorème 1bis : *une* K*-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente si et seulement si pour tout* X *dans* $\mathfrak{g}$*,* $ad(X)$ *est un endomorphisme nilpotent de* $\mathfrak{g}$*.*

Démonstration : la CN découle de la condition (iii). Pour la CS, appliquer Engel à la sous-algèbre de Lie $ad(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$, et utiliser la propriété (ii).

Remarque : on ne peut, dans ce corollaire, remplacer *ad* par une représentation arbitraire de $\mathfrak{g}$. Par exemple, l'algèbre de Lie des matrices diagonales est nilpotente, puisqu'abélienne, mais ses éléments ne s'envoient pas (dans sa représentation évidente sur K^n) sur des endomorphismes nilpotents. Autrement dit, une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n$ peut être nilpotente sans pour autant être conjuguée à un sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{b}_n^{(1)}$.

§2. Algèbres de Lie résolubles.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K. La suite dérivée de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante (au sens large) d'idéaux définie par $D^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, ..., D^n\mathfrak{g} = [D^{n-1}\mathfrak{g}, D^{n-1}\mathfrak{g}]$, de sorte que $D^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := D\mathfrak{g}$ est l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$, et $D^k\mathfrak{g} \subset C^k(\mathfrak{g})$ pour tout k. On dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie *résoluble* si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

i) pour n assez grand, $D^n\mathfrak{g} = 0$;

ii) il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de $\mathfrak{g}$ tels que $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ pour tout i;

iii) pour n assez grand et pout tout 2^n-uple $X_1, ..., X_{2^n}$ d'éléments de $\mathfrak{g}$,

$$[[[...[[X_1, X_2], [X_3, X_4]], ...]]] = 0.$$

Exercice : a) vérifier ces équivalences, et montrer (cf. feuilles de TD) qu'une algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

b) Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ le sont. Ainsi, contrairement à la nilpotence, la résolubilité est une propriété stable par extensions.

c) Montrer que (ii) équivaut à (ii') : il existe une suite de sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de $\mathfrak{g}$ telles que pour $i = 1, ..., n-1$, $\mathfrak{h}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{h}_i$ à quotient $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ abélien;

Remarque : on dit qu'un groupe G est résoluble s'il admet une suite de sous-groupes normaux à quotients successifs abéliens (c'est le cas du groupe de Galois G d'un polynôme P si et seulement si P est résoluble par radicaux, cf. cours de Théorie des nombres). Montrer qu'un groupe de Lie connexe G est résoluble si et seulement si $Lie(G)$ est une algèbre de Lie résoluble.

Soit $\mathcal{D}$ un drapeau d'un K-espace vectoriel V de dimension finie. Alors, $\mathfrak{b}(\mathcal{D})$ est une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(V/K)$. Supposant désormais que $K = \mathbf{C}$ (ou, plus généralement, que K est algébriquement clos de caractéristique nulle), on a inversement:

Théorème 2 (Lie) : *soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbf{C}$-sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(V/\mathbf{C})$. Il existe un drapeau $\mathcal{D}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}(\mathcal{D})$.*
[Autrement dit : les éléments de $\mathfrak{g}$ sont simultanément trigonalisables. Ainsi, sur $\mathbf{C}$, une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ est résoluble si et seulement si elle est conjuguée à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{b}_n(\mathbf{C})$.]

Démonstration : *1er pas* : par une récurrence sur $dim(V)$, on se ramène à montrer que sous les hypothèses du théorème, il existe dans V un vecteur propre commun v à tous les éléments X de $\mathfrak{g}$. (Noter que l'image de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V/\mathbf{C}v)$ est encore résoluble.)

2e pas : par récurrence sur $dim(\mathfrak{g})$, on peut supposer l'assertion du 1er pas établie pour toutes les algèbres de Lie résolubles de dimension $< dim(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{h}$ un hyperplan de $\mathfrak{g}$ contenant $D\mathfrak{g}$ (noter que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g} \neq 0$). Alors, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et l'hypothèse de récurrence fournit un vecteur propre v de V commun à tous les éléments de $\mathfrak{h}$. Soit λ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par $X.v = \lambda(X)v$ pour tout X dans $\mathfrak{h}$. Le lemme du 3e pas qui suit montre que le sous-espace W_λ de V (qui est non nul puisqu'il contient v) est stable sous $\mathfrak{g}$. Soit Y un générateur d'une droite supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Comme K est algébriquement clos, Y admet un vecteur propre $v' \in W_\lambda$. Alors, v', qui est propre pour $\mathfrak{h}$, l'est pour $\mathfrak{g}$ toute entière, et le théorème est démontré.

3e pas : l'énoncé suivant généralise le calcul fait au 3e pas de la preuve du §1. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps* K *de caractéristique nulle,* V/K *une représentation de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, *et* λ *une forme linéaire sur* $\mathfrak{h}$. *Alors, le sous-espace "*λ*-propre"* $W_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{h}, X.v = \lambda(X)v\}$ *est stable sous* $\mathfrak{g}$. En effet,

$$X.Y.v = Y.X.v + [X,Y].v = \lambda(X)Y.v + \lambda([X,Y])v$$

pour tout X, Y, v dans $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, W_\lambda$, et on est ramené à prouver que $\lambda([X,Y]) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. Pour cela, fixons un vecteur $w \neq 0$ de W_λ, et notons W le sous-espace de V engendré par les images de v sous tous les itérés $Y^{\cdot k}$ de Y. La formule $X.Y^{\cdot k}.w = Y.X.Y^{\cdot(k-1)}w + [X,Y].Y^{\cdot(k-1)}w$ montre par récurrence que W est stable sous $\mathfrak{h}$ et que $X.Y^{\cdot k}.w \equiv \lambda(X)Y^{\cdot k}.w$ modulo le sous-espace engendré par les $Y^{\cdot k'}.w, k' < k$. Donc $Tr(X_{|W}) = dim(W).\lambda(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. Mais X et Y agissent sur W, donc $dim(W).\lambda([X,Y]) = Tr([X_{|W}, Y_{|W}] = 0$.

Théorème 2bis : *une* $\mathbf{C}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est résoluble si et seulement si son algèbre de Lie dérivée* $D\mathfrak{g}$ *est nilpotente.*

Démonstration : la CS découle de (b) supra. Pour la CN, appliquer Lie à la sous-algèbre de Lie $ad(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbf{C})$. Le drapeau d'idéaux $\{\mathfrak{h}_i\}$ qu'il fournit vérifie pour tout $X \in D\mathfrak{g}$: $ad(X)(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ car $End(\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}) = \mathbf{C}$ est une algèbre de Lie abélienne, donc $ad(X)$ agit de façon nilpotente sur $\mathfrak{g}$, donc aussi sur $D\mathfrak{g}$, et on conclut par le théorème 1bis.

Par $\mathbf{C}$–linéarité, on vérifie que le théorème 2 bis, tout comme le critère de résolubilité qui suit, valent pour toute algèbre de Lie réelle.

Critère de Cartan 1 : *soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbf{C}$*-sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ *telle que* $Tr(XY) = 0$ *pour tout* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Alors,* $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

Démonstration : il s'agit de voir que tout élément X de $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ est nilpotent, autrement dit, que ses valeurs propres sont nulles, ou encore, si $\overline{D}$ désigne l'endomorphisme de $V = \mathbf{C}^n$ donné, dans une base de V diagonalisant la partie semi-simple X_s de X, par la matrice complexe conjuguée de $D = X_s$, que $Tr(\overline{D}.X) = 0$. Comme $X \in D\mathfrak{g}$ est une combinaison linéaire de $[Y,Z]$, et que

$$Tr(\overline{D}[Y,Z] = Tr([\overline{D},Y]Z),$$

il suffit de montrer que $ad(\overline{D})$ laisse stable $\mathfrak{g}$. Mais $ad(\overline{D})$ s'exprime comme un polynôme en $ad(D) = ad(X_s)$, lequel vaut $(ad(X))_s$, qui est lui même un polynôme en $ad(X)$. Comme $ad(X)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ laissant stable $\mathfrak{g}$, c'est terminé.

§3. Algèbres de Lie semi-simples.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique nulle. D'après les points (b) des §§1 et 2, la somme de deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$ est résoluble, et on peut parler du plus grand idéal résoluble $rad(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, qu'on appelle le *radical* de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est *semi-simple* si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes (pourquoi ?) suivantes.

i) $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal abélien non non nul.

ii) le radical de $\mathfrak{g}$ est nul.

En particulier, une algèbre de Lie semi-simple a un centre trivial, de sorte que sa représentation adjointe est fidèle (c'est-à-dire : injective).

On dit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple* si elle n'a *pas d'idéal propre* (c'est-à-dire distinct de 0 ou $\mathfrak{g}$) et si elle n'est *pas abélienne.* Cette dernière condition n'est nécessaire que pour éviter l'algèbre de Lie "triviale" K; on pourrait la remplacer par la condition $dim(\mathfrak{g}) > 1$, qui sous la première condition, entraîne d'ailleurs $dim(\mathfrak{g}) \geq 3$, voir feuilles de TD, qui montre que $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est la seule algèbre de Lie complexe simple de dimension 3, tandis que $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ et $\mathfrak{su}_2$ sont les seules algèbres de Lie réelles simples de dimension 3.

Soit $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Alors,

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto B_\pi(X, Y) := Tr(\pi(X)\pi(Y))$$

est une forme K-bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$. On a $B_\pi(ad(X)Y, Z) + B_\pi(Y, ad(X)Z) = 0$ pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, de sorte que B_π est un invariant de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, et l'orthogonal relativement à B_π d'un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{g}$. Quand $\pi = ad$ est la représentation adjointe, la forme $B_{ad} = B$:

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto B(X, Y) := Tr(ad(X)ad(Y))$$

s'appelle la *forme de Killing de* $\mathfrak{g}$.

Exemples : i) la forme de Killing de $\mathfrak{gl}_n(K)$ est $B(X, Y) = 2nTr(XY) - 2(TrX)(TrY)$;

ii) les formes de Killing de $\mathfrak{sl}_n(K), \mathfrak{so}_n(K), \mathfrak{sp}_{2n}(K)$ sont respectivement données par $B(X, Y) = cTr(XY)$, avec $c = 2n, n-2, 2n+2$;

iii) si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Critère de Cartan 2 : *une K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de forme de Killing B, est résoluble si et seulement si $B(\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}) = 0$.*

Démonstation : la CN découle du théorème de Lie et du fait que $\mathfrak{b}_n.\mathfrak{b}_n^{(1)} \subset \mathfrak{b}_n^{(1)}$. Réciproquement, supposons seulement que $B(D\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}) = 0$. Par Cartan 1, $ad(D\mathfrak{g})$ est alors une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Comme $Ker(ad)$ est abélienne, $D\mathfrak{g}$ est donc résoluble (cf. §2, point b), donc $\mathfrak{g}$ également.

Théorème 3 (É. Cartan) : *soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie, de forme de Killing B, de centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{g}$ est semi-simple;

ii) B est une forme bilinéaire non dégénérée;

iii) $\mathfrak{g}$ est une somme directe d'idéaux, qui sont des algèbres de Lie simples.

iv) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, et la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est somme directe de représentations irréductibles.

Démonstration : $(i) \Leftrightarrow (ii)$: sous (i), tout idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ est nul. D'après Cartan 1, l'image par ad de l'orthogonal $\mathfrak{g}^\perp$ de $\mathfrak{g}$ relativement à B est résoluble, donc $\mathfrak{g}^\perp$ l'est aussi. Ainsi, $\mathfrak{g}^\perp = 0$, ce qui signifie que B est non dégénérée. Inversément, sous (ii), soit $\mathfrak{h}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Pour $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\phi = ad(X)ad(Y)$ de $\mathfrak{g}$ envoie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{h}$ sur 0, donc $\phi^2 = 0$, $Tr(\phi) = 0$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^\perp = 0$, d'où (i).

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ L'orthogonal $\mathfrak{h}$ de tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal, qui, sous (ii), a pour dimension la codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Mais $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$ est résoluble par Cartan 1, donc nul et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. De plus, la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, car c'est la restriction de B à $\mathfrak{h}$, qui ne rencontre $\mathfrak{h}^\perp$ qu'en 0. Idem pour $\mathfrak{h}^\perp$. En itérant, on obtient donc une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{h}_s$ en somme directe orthogonale d'idéaux de $\mathfrak{g}$ qui n'admettent pas d'idéaux propres, et qui ne peuvent être de dimension 1 (puisque B s'annule sur les droites); ce sont donc des algèbres de Lie simples. Inversément, (iii) entraîne clairement (i), donc (ii).

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ Sous (iii), $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \oplus_i \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_i)$ est nul puisque les $\mathfrak{h}_i$ sont des algèbres de Lie simples; comme ce sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, ce sont des sous-représentations de ad, et comme aucune n'a d'idéal propre, c'en sont des représentations irréductibles. Sous (iv), $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux sans idéal propre, et aucun n'est une droite puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Comme une algèbre de Lie simple coïncide avec son idéal dérivé, on déduit de (iii) que $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$ pour toute algèbre de Lie semi-simple. Mais il existe des algèbres de Lie vérifiant cette propriété sans être semi-simples.

[*La fin de ce paragraphe est hors programme.*]

Le quotient d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par son radical $\mathfrak{r} = rad(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie semi-simple, et on peut montrer (théorème de Levi) qu'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ (qui n'est en général pas un idéal de $\mathfrak{g}$) supplémentaire de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}$. Le théorème de Cartan ramène donc essentiellement l'étude des algèbres de Lie à celle des algèbres de Lie simples. Pour $K = \mathbf{C}$, celles-ci ont été entièrement classifiées : à cinq exceptions près, toute algèbre de Lie complexe simple est du type $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}), n \geq 2$, $\mathfrak{so}_n(\mathbf{C}), n \geq 3, n \neq 4$, ou $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{C})$. On dispose d'une classification similaire, mais bien sûr plus longue, pour $K = \mathbf{R}$.

On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *réductive* si son radical $\mathfrak{r}$ est réduit à son centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Cela équivaut à demander (voir feuille TD no 5, ex. 1) que $D\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie semi-simple, ou encore que $\mathfrak{g}$ soit somme directe d'idéaux simples ou abéliens. Ainsi, $\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{so}_2(K), \mathfrak{u}_n, ...$ sont des algèbres de Lie réductives. À l'instar de (iv), une algèbre de Lie est réductive si et seulement si sa représentation adjointe est somme directe de représentations irréductibles. Mais pour les semi-simples, on a, plus généralement:

Théorème 4 (H. Weyl) : *toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple est somme directe de représentations irréductibles.*

Pour une preuve "algébrique" de ce théorème, voir Serre, *Lie algebras and Lie groups*, I.VI.3. En liaison avec l'"astuce unitaire" de H. Weyl, mentionnons également (voir Serre, I.VI.6, et feuille TD no 5, ex. 5, ainsi que le chap. V, §3.b qui suit):

Théorème 4 bis : *Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathbf{R}$. Si G est compact, $\mathfrak{g}$ est réductive et la forme de Killing de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est définie négative. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et si sa forme de Killing est définie, G est compact.*

Signalons enfin que les théorèmes d'Engel et de Lie admettent des analogues en théorie des groupes. Voir Serre, I.V.3* et 5*.

CHAPITRE V

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE ET RETOUR AUX GROUPES

§1. De $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ ...

Soient m un entier ≥ 0 et V_m l'espace des polynômes homogènes de degré m en deux variables, à coefficients dans $\mathbf{C}$. Comme tout sous-groupe de Lie de $GL_2(\mathbf{C})$, le groupe $G := SL_2(\mathbf{C})$ admet une représentation naturelle ρ_m sur V_m, donnée, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans G et $P = P(x, y)$ dans V_m par

$$\rho_m(g)(P) = g.P, \text{ avec } (g.P)(x, y) = P(ax + cy, bx + dy).$$

Si ρ désigne la représentation standard de G sur $V = \mathbf{C}^2$, on dispose de la représentation contragrédiente ρ^* de G sur le dual $V^* \simeq V_1$ de V, et on vérifie aisément que ρ^* est isomorphe à ρ_1 (noter que pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans SL_2, les matrices $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont conjuguées par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.) En fait, ρ est autoduale (elle préserve la forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée *det* sur V), de sorte que ρ_1 et ρ sont isomorphes. Ces résultats ne s'étendent bien sûr pas au groupe $GL_2(\mathbf{C})$.

Soit $\pi_m = d\rho_m : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{gl}(V_m/\mathbf{C})$ la représentation dérivée de ρ_m, et

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la base usuelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, qui vérifie

$$[H, X] = 2X \ , \ [H, Y] = -2Y \ , \ [X, Y] = H \qquad (*).$$

Par définition de ρ_m, $\rho_m(e^{tH})(P(x, y)) = P(e^t x, e^{-t} y), \rho_m(e^{tX})(P(x, y)) = P(x; tx + y)$, et $\rho_m(e^{tY})(P(x, y)) = P(x + ty, y)$, de sorte que

$$\pi_m(H)(P) = (x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})(P), \pi_m(X)(P) = x\frac{\partial}{\partial y}(P), \pi_m(Y)(P) = y\frac{\partial}{\partial x}(P).$$

Dans la base $\{P_j(x,y) = x^j y^{m-j}, j = 0, ..., m\}$ de V_m, on a donc:

$$\pi_m(H)(P_j) = (2j - m)P_j \ , \ \pi_m(X)(P_j) = (m - j)P_{j+1} \ , \ \pi_m(Y)(P_j) = jP_{j-1} \quad (**).$$

En comparant les formules $(*)$ et $(**)$, on voit que π_2 est isomorphe à la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$: l'isomorphisme $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to V_2$ donné par $\phi(H) = P_1, \phi(X) = P_2, \phi(Y) = P_0$ vérifie $\phi \circ ad(U) = \pi_2(U) \circ \phi$ pour tout $U \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$.

Comme tout sous-espace invariant de V_m admet au moins un vecteur propre pour H, on déduit de $(**)$ que π_m est une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ (on retrouve ainsi, avec $m = 2$, la simplicité de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$). Inversément :

Théorème 1 : *toute représentation complexe irréductible de dimension finie de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ *est isomorphe à l'une des représentations* π_m.

Démonstration : soient $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{gl}(V/\mathbf{C})$ une représentation irréductible, λ_0 une valeur propre de $\pi(H)$, de partie réelle minimale, et v_0 un des vecteurs propres correspondant. De la relation

$$H(X.v_0) = X(H.v_0) + [H, X].v_0 = X(\lambda_0 v_0) + 2X(v_0) = (\lambda_0 + 2)X.v_0,$$

on déduit que si si $v_1 = X.v_0$ n'est pas nul, c'est un vecteur propre pour H, de valeur propre $\lambda_1 = \lambda_0 + 2$. En itérant, on obtient une suite $\{v_j, j = 0, ..., m\}$ de vecteurs propres à valeurs propres distinctes, où m désigne le plus grand entier tel que $v_m \neq 0$. Alors, le sous-espace vectoriel W engendré par les v_j est stable sous H et X, mais aussi sous Y car

$$H(Y.v_0) = Y(H.v_0) + [H, Y].v_0 = (\lambda_0 - 2)Y.v_0,$$

donc $Y.v_0 = 0$ par minimalité de λ_0, tandis qu'on vérifie par récurrence sur j, à partir de la relation $YX = XY - H$, que $Y.v_j = -j(\lambda_0 + j - 1)v_{j-1}$. Par conséquent, $W = V$. De plus, $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) = D\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, donc $Tr(\pi(H)) = 0$, d'où $\lambda_0 = -m$, et π est finalement donnée dans la base $\{v_j\}$ de V par

$$\pi(H)(v_j) = (2j - m)v_j \ , \ \pi(X)(v_j) = v_{j+1} \ , \ \pi(Y)(v_j) = j(m - j + 1)v_{j-1} \ ,$$

ou encore, dans la base $\{w_j = v_j/[m(m-1)...(m-j+1)]\}$ par

$$\pi(H)(w_j) = (2j - m)w_j \ , \ \pi(X)(w_j) = (m - j)w_{j+1} \ , \ \pi(Y)(w_j) = jw_{j-1} \ .$$

On retrouve là les relations $(**)$, de sorte que l'application linéaire de V dans V_m qui envoie w_j sur P_j pour $j = 0, ..., m$, établit l'isomorphisme recherché entre les représentations π et π_m, avec $m = dim(V) - 1$.

Remarque : vu le Théorème 4 du chap. IV (et la la simplicité de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$), on peut finalement énoncer : *toute représentation complexe de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est isomorphe à une somme directe de puissances symétriques de la représentation standard.*

§**2. ... à $SL_2(\mathbf{C})$ et $SO_3(\mathbf{R})$.**

Considérons d'abord le groupe de Lie $G = SL_2(\mathbf{C})$, et soit $\rho : G \to GL(V/\mathbf{C})$ une représentation complexe continue de dimension finie et irréductible de G. Sa représentation dérivée est alors irréductible (Chapitre III, Lemme 2). D'après le théorème 1, $d\rho$ est donc isomorphe à π_m, où $m = dim(V) - 1$. Mais nous connaissons déjà une telle représentation de G, à savoir ρ_m. Dans ces conditions, à un isomorphisme près, ρ et ρ_m coïncident sur un voisinage de l'origine de G, donc partout puisque G est connexe. Ainsi, *les représentations $\{(V_m, \rho_m), m \in \mathbf{N}\}$ forment l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations complexes irréductibles de $SL_2(\mathbf{C})$.*

Considérons le quotient $G' = PSL_2(\mathbf{C}) \simeq PGL_2(\mathbf{C})$ de G par son centre $\{\pm \mathbf{I}_2\}$. (Noter que contrairement à $SL_2(\mathbf{C})$, G' n'est pas simplement connexe.) Une représentation irréductible $\rho' : G' \to GL(V/\mathbf{C})$ de G' fournit par composition une représentation, encore irréductible, $\rho : G \to GL(V/\mathbf{C})$ de G telle que $\rho(-\mathbf{I}_2) = id_V$. Inversément, une telle représentation de G passe au quotient par $\{\pm \mathbf{I}_2\}$, et définit une représentation ρ' de G'. Comme $\rho_m(-\mathbf{I}_2) = id_{V_m}$ si et seulement si m est pair, on voit que *les représentations $\{(V_{2m}, \rho'_{2m}), m \in \mathbf{N}\}$ forment l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations complexes irréductibles de $PGL_2(\mathbf{C})$.*

Passons aux sous-groupes fermés connexes $G = SU_2(\mathbf{C})$ et $G = SL_2(\mathbf{R})$ de $SL_2(\mathbf{C})$. Le premier est compact et simplement connexe, le second ni l'un ni l'autre, mais on va les traiter de la même manière, car leurs algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ *engendrent chacune* $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ *sur* $\mathbf{C}$. Si $\rho : G \to GL(V/\mathbf{C})$ est une représentation complexe irréductible de G, sa représentation dérivée $d\rho$ s'étend par $\mathbf{C}$-linéarité en une représentation $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{gl}(V/\mathbf{C})$ encore irréductible, car si W est un $\mathbf{C}$-sous-espace de V stable sous π, il sera a fortiori stable sous $d\rho$, donc aussi sous ρ. D'après le théorème 1, $d\rho$ est donc isomorphe à la restriction à $\mathfrak{g}$ d'une des représentations $\pi_m = d\rho_m$. Ainsi, $d\rho = d(\rho_{m|G})$, et par connexité de G, ρ est isomorphe à la restriction à G de ρ_m. Autrement dit : *les représentations $\{(V_m, \rho_{m|G}), m \in \mathbf{N}\}$ forment l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations complexes irréductibles des groupes $G = SU_2$ ou $SL_2(\mathbf{R})$.*

Terminons par le groupe $G' = SO_3(\mathbf{R})$. L'exercice qui suit (voir aussi le chapitre I, §2.d pour une preuve via les quaternions) montre que la représentation adjointe $Ad : SU_2 \to GL(\mathfrak{su}_2/\mathbf{R})$ du groupe SU_2 rend G' isomorphe au quotient de $G = SU_2$ par son centre $\{\pm\mathbf{I}_2\}$. Une représentation complexe irréductible $\rho' : G' \to GL(V/\mathbf{C})$ de G' fournit une représentation irréductible $\rho = \rho' \circ Ad : G \to GL(V/\mathbf{C})$ telle que $\rho(-\mathbf{I}_2) = id_V$, et inversément, pour toute représentation $\rho : G \to GL(V/\mathbf{C})$ telle que $\rho(-\mathbf{I}_2) = id_V$, il existe une unique représentation $\rho' : G' \to GL(V/\mathbf{C})$ telle que $\rho = \rho' \circ Ad$. Comme $\rho_{m|G}(-\mathbf{I}_2) = id_{V_m}$ si et seulement si m est pair, on voit que *les représentations* $\{(V_{2m}, \rho'_{2m}), m \in \mathbf{N}\}$ *forment l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations complexes irréductibles de* $SO_3(\mathbf{R})$.

Exercice : la représentation adjointe Ad de SU_2 établit un isomorphisme $SU_2/\{\pm\mathbf{I}_2\} \simeq SO_3(\mathbf{R})$. En effet, $\mathfrak{su}_2$ étant de dimension 3 sur $\mathbf{R}$, on peut voir Ad comme un homomorphisme continu de SU_2 dans $GL_3(\mathbf{R})$. Comme SU_2 est compact, cette représentation est unitaire (chap. II, lemme 1 - ou voir infra), donc son image est contenue dans un groupe isomorphe à $O_3(\mathbf{R})$, et même (connexité de SU_2) à sa composante neutre $SO_3(\mathbf{R})$. Par ailleurs, le noyau de Ad est le centre $\{\pm\mathbf{I}_2\}$ de SU_2, donc Ad est un isomorphisme local de SU_2 sur son image. Comme $SO_3(\mathbf{R})$ est connexe et de même dimension que SU_2, cette image remplit tout $SO_3(\mathbf{R})$.

De façon plus intrinsèque, on peut noter que la représentation Ad de SU_2 respecte la forme de Killing B de son espace $\mathfrak{su}_2$. En effet, B est un invariant de (c'est-à-dire: est tuée par) la représentation ad (voir chap. IV, §3), et $ad = d(Ad)$, donc B est un invariant de Ad (c'est-à-dire: $B(Ad(g)X, Ad(g)Y) = B(X,Y)$ pour tout g, X, Y.) Par ailleurs, B est définie négative (calcul, ou voir chap. IV, Thm. 4 bis). Donc le groupe $SO_3(\mathbf{R})$ ci-dessus est en fait la composante neutre du groupe $GL(\mathfrak{su}_2, B)$.

Dans le cas des groupes compacts $G = SU_2$ et $SO_3(\mathbf{R})$, on a ainsi conclu le programme promis à la fin du chapitre II : dresser la table $\hat{G}$ des représentations complexes irréductibles de G. Il resterait :

- à déterminer les caractères χ_m, χ'_{2m} des représentations $\rho_{m|SU_2}, \rho'_{2m}$. Par exemple, pour SU_2, toute matrice unitaire est conjuguée dans le groupe unitaire à une matrice de la forme $g_t = e^{itH}$, et on a sur cette classe de conjugaison:

$$\chi_m(g_t) = \Sigma_{j=0,\dots,m}\, e^{i\lambda_j t} = \Sigma_j\, e^{i(2j-m)t} = \frac{sin(m+1)t}{sint};$$

- à identifier les V_m à d'autres représentations naturelles de ces groupes. Par exemple, pour $SO_3(\mathbf{R})$, V_{2m} est isomorphe au complexifié de la restriction au sous-espace des polynômes harmoniques (c'est-à-dire: de laplacien nul) de la puissance symétrique m-ième de sa représentation standard sur $\mathbf{R}^3$;

- à calculer les coefficients matriciels $c_{i,j}^{(\rho)}$ de ces représentations relativement à des bases convenablement choisies des V_m, ce qui pour $SO_3(\mathbf{R})$, conduit à la théorie des fonctions sphériques.

[Pour tout ceci, voir le livre de J. Faraut cité en bibliographie.]

§**3. Compléments** (hors programme)

a) De π à ρ dans le cas général.

Au §2, nous avons pu profiter de la connaissance préalable des représentations ρ_m pour relever aux groupes certaines représentations de leurs algèbres de Lie. Voici un procédé théorique pour le faire dans le cas général.

Soient G un groupe de Lie connexe, et $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K)$ une représentation de son algèbre de Lie. Dans un voisinage suffisamment petit $\mathcal{U}$ de l'élément neutre de G, tout élément g de G s'écrit de façon unique sous la forme $g = exp_G(X)$, et la formule $\rho(exp_G(X)) = exp_{GL(V/K)}(\pi(X))$ définit une application ρ de $\mathcal{U}$ dans $GL(V/K)$. D'après la "formule de Campbell-Hausdorff", $Log_G(exp_G(X)exp_G(Y))$ s'exprime comme une série convergente, à coefficients indépendants du groupe G, en des itérés de crochets de X et Y. On en déduit que ρ est un homomorphisme local du groupe topologique G vers $GL(V/K)$. Si G est de plus simplement connexe, le théorème du Chapitre I montre que ρ s'étend (de façon unique) en un homomorphisme continu de G vers $GL(V/K)$. Ainsi: *si G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe, il existe une unique représentation continue $\rho : G \to GL(V/K)$ de représentation dérivée $d\rho = \pi$.*

Dans le cas général, on peut d'après cet énoncé relever π en une représentation $\tilde{\rho}$ du revêtement universel $\tilde{G}$ de G (qui a même algèbre de Lie que G). Comme on l'a vu au §2 sur l'exemple de $G = PSL_2(\mathbf{C})$ et de $G = SO_3(\mathbf{R})$, $\tilde{\rho}$ redescend en une représentation ρ de G si et seulement si son noyau contient le groupe fondamental $\pi_1(G)$ de G. L'exemple qui suit illustre à la fois cette construction et un procédé pour établir la "complète réductibilité" des représentations de certains groupes non compacts.

b) L'astuce unitaire de Weyl.

Théorème 2 : *Toute représentation complexe de dimension finie du groupe topologique $SL_2(\mathbf{R})$ est somme directe de puissances symétriques de sa représentation standard.*

Démonstration : il s'agit de voir que tout sous-espace invariant $W/\mathbf{C}$ d'une représentation $\rho : SL_2(\mathbf{R}) \to GL(V/\mathbf{C})$ admet un supplémentaire invariant (la description faite au §2 de $\hat{G}$ permet alors de conclure). Mais W est invariant sous la représentation dérivée $\pi = d\rho$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$, donc par $\mathbf{C}$-linéarité, sous son extension $\pi_{\mathbf{C}}$ à $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, donc sous la restriction π' de $\pi_{\mathbf{C}}$ à $\mathfrak{su}_2$. Comme SU_2 est connexe et simplement connexe, π' est la dérivée d'une représentation $\rho' : SU_2 \to GL(V/\mathbf{C})$, et W est invariant sous ρ'. Mais SU_2 est compact, donc W admet un supplémentaire $W'/\mathbf{C}$ invariant sous ρ'. Alors, W' est invariant sous la représentation dérivée $d\rho' = \pi'$ de $\mathfrak{su}_2$, donc par $\mathbf{C}$-linéarité sous son extension $\pi'_{\mathbf{C}} = \pi_{\mathbf{C}}$ à $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, donc sous la restriction $\pi = d\rho$ de $\pi_{\mathbf{C}}$ à $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$, donc sous ρ !!!

c) Poids et racines

La méthode donnée au §1 pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ s'étend à la détermination des représentations irréductibles de la plupart des algèbres de Lie semi-simples complexes. Par exemple, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, on remplace H par la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ formée par les matrices diagonales de trace nulle, X par $\mathfrak{b}_n^{(1)}$, Y par sa transposée, les λ_j par les *poids* de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire les formes linéaires λ sur $\mathfrak{h}$ attachées aux sous-espaces W_λ de la représentation "propres" sous $\pi(\mathfrak{h})$ (cf. Chap. IV, preuve du thm. 2), le vecteur propre v_m par les vecteurs primitifs, c'est-à-dire propres pour la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{b}_n = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}_n^{(1)}$. Si π est irréductible, il n'y a qu'un vecteur primitif, et le poids de $\mathfrak{h}$ correspondant est appelé plus haut poids de π. On montre alors qu'une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est entièrement déterminée par son plus haut poids. Enfin, les poids non nuls intervenant dans la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ s'appellent les *racines* de $\mathfrak{g}$ (rôle joué, au §1, par 2 et -2). Elles permettent de déterminer les plus hauts poids de toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$. On obtient ainsi une indexation naturelle par $\mathbf{N}^{n-1}$ de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, donc aussi du groupe connexe et simplement connexe $SL_n(\mathbf{C})$, et, en reprenant les techniques évoquées plus haut, de $SU_n, SL_n(\mathbf{R})$, ...

Pour tout ceci, et bien plus, voir le cours de M2 *Groupes algébriques et Groupes de Lie*, par Patrick Polo (http://www.math.jussieu.fr/ polo/).