UPMC Master M1 de mathématiques 11-12
D. Bertrand *MM001- Algèbre géométrique*

Examen du 15 Décembre 2011
Durée: 3 heures

L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.
Les 3 énoncés sont indépendants. Dans chacun, K désigne un corps de caractéristique $\neq 2$.
On accompagnera la rédaction du problème I.2^o/ *d'une figure.*

I

Soient Δ une droite projective sur le corps K, et φ une homographie de Δ. On dit que φ est une *involution* si $\varphi \circ \varphi = id_\Delta$, mais $\varphi \neq id_\Delta$. Pour tout point P de Δ, d'image $\varphi(P) = P'$, on a alors $\varphi(P') = P$, et on dit que les points P et P' sont échangés par l'involution φ.

1^o/ i) Soit f une homographie de $\mathbb{P}_1(K) \simeq K \cup \{\infty\}$ telle que $f(0) = \infty$ et $f(\infty) = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in K^\times$ tel que $f(z) = \frac{\alpha}{z}$, et que f est une involution. Que peut-on dire du couple de points $\{1, \alpha\}$?

ii) Soit φ une homographie d'une droite projective Δ, et P_1, P_2 deux points distincts de Δ. On suppose que $\varphi(P_1) = P_2$ et $\varphi(P_2) = P_1$. Montrer que φ est une involution de Δ.

iii) Soient P_1, P_2, Q_1, Q_2 quatre points distincts de Δ. Montrer qu'il existe une unique involution φ de Δ telle que $\varphi(P_1) = P_2$ et $\varphi(Q_1) = Q_2$.

iv) Soient P_1, P_2, Q_1, Q_2 quatre points distincts de Δ. Déduire de (iii) l'égalité des birapports $[P_1, P_2, Q_1, Q_2] = [P_2, P_1, Q_2, Q_1]$.

2^o/ On suppose désormais que Δ est une droite du plan projectif, dans lequel on a tracé un quadrilatère (= un repère projectif) $ABCD$, dont Δ coupe les côtés et diagonales en six points distincts $X_1 \in (AB), Y_1 \in (AD), Z_1 \in (DB), X_2 \in (CD), Y_2 \in (CB), Z_2 \in (CA)$.

Soit φ l'unique involution de Δ qui échange X_1 avec X_2, et Y_1 avec Y_2 (voir la question 1^o/iii). On se propose de montrer que φ échange Z_1 avec Z_2.

i) Montrer que $\varphi(Z_1) = Z_2$ si et seulement si $[Y_1, Y_2, X_1, Z_1] = [Y_2, Y_1, X_2, Z_2]$.

ii) Montrer que $[Y_1, Y_2, X_1, Z_1] = [Y_1, F, A, D]$, où $F = (BY_2) \cap (AD)$.

iii) Montrer que $[Y_2, Y_1, X_2, Z_2] = [F, Y_1, D, A]$, et conclure.

3^o/ On interprète dans cette question le plan ambiant comme le complété projectif de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$, et Δ comme sa droite à l'infini. On suppose que $(DC) \perp (AB)$ et que $(BC) \perp (AD)$.

i) Montrer que la relation d'orthogonalité entre les droites du plan euclidien définit une involution φ de la droite à l'infini Δ, qui échange X_1 avec X_2, et Y_1 avec Y_2.

ii) D'après le 2^o/, on a donc $\varphi(Z_1) = Z_2$. En déduire que $(AC) \perp (BD)$. Quel énoncé classique sur les hauteurs du triangle ABD a-t-on ainsi retrouvé ?

II

Soit Γ la quadrique de l'espace projectif $\mathbf{P}_3(K)$ définie par la forme quadratique en quatre variables $q(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0X_1 - X_2X_3$.

1^0/ i) Calculer le rang de q. En déduire que Γ n'a pas de point singulier.

ii) Donner une équation du plan tangent $\Pi := T_{P_0}(\Gamma)$ à Γ au point $P_0 = (0 : 1 : 0 : 2)$.

iii) Montrer par le calcul que $\Pi \cap \Gamma$ est la réunion de deux droites D_1, D_1' concourantes, et donner un système d'équations pour chacune de ces droites.

iv) Soit D_2 la droite définie par le système d'équations $\{X_1 = 0, X_3 = 0\}$, qui est contenue dans Γ. Montrer que D_2 ne rencontre pas l'une des droites $\{D_1, D_1'\}$, mais rencontre l'autre droite en un point Q_0 que l'on déterminera.

Dans les questions suivantes, les calculs ne sont plus nécessaires. On utilisera simplement le fait *que* Γ *est une quadrique lisse et qu'elle contient deux droites* D_1, D_2 *non concourantes.*

2^0/ i) Dire brièvement pourquoi un sous-espace vectoriel de K^4 totalement isotrope pour q est de dimension ≤ 2. En déduire qu'aucun plan (projectif) de $\mathbf{P}_3(K)$ n'est contenu dans Γ.

ii) Soit Π un plan de $\mathbf{P}_3(K)$. Montrer que $C = \Gamma \cap \Pi$ est une conique de Π, et que si C contient une droite, alors C est la réunion de deux droites (éventuellement confondues).

iii) Soient P un point de Γ, et D une droite passant par P. Montrer que si D est contenue dans Γ, alors elle est contenue dans le plan tangent $T_P(\Gamma)$ à Γ en P. En déduire que Γ contient au plus deux droites passant par P.

3^0/ On va ici construire une droite D_3 contenue dans Γ et ne rencontrant ni D_1 ni D_2.

i) Soit P_1 un point de D_1. Montrer qu'il existe un point P_2 de D_2, unique, tel que la droite (P_1P_2) soit contenue dans Γ.

ii) Soit P un point de Γ hors de D_1, D_2 et de (P_1P_2). Montrer qu'il existe un point P' de (P_1P_2) unique tel que $(PP') \subset \Gamma$, et que $D_3 := (PP')$ répond à la question.

III

Soit X une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$, et soit k un entier compris entre 1 et $n-1$. On désigne par $\mathcal{S}(k,n)$ l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble $[1,...,n]$. Pour tout $I \in \mathcal{S}(k,n)$, on note $I^\sharp \in \mathcal{S}(n-k,n)$ le complémentaire de I dans $[1,...,n]$. Si I, J sont tous les deux dans $\mathcal{S}(k,n)$ (ou tous les deux dans $\mathcal{S}(n-k,n)$), on note $X_{I,J}$ le déterminant mineur de X dont les lignes sont indexées par I, et les colonnes par J. On fixe $J = [1,...,k] \in \mathcal{S}(k,n)$, d'où $J^\sharp = [k+1,...,n] \in \mathcal{S}(n-k,n)$, et on se propose d'établir la formule

$$det(X) = \Sigma_{I \in \mathcal{S}(k,n)} \varepsilon_I X_{I,[1,...,k]} X_{I^\sharp,[k+1,...,n]},$$

où $\varepsilon_I = \pm 1$, suivant une règle que l'on déterminera.

1^0/ On suppose que $k = 1$. Quelle règle classique la formule recherchée exprime-t-elle alors? Donner dans ce cas, et sans justification, la règle de calcul des ε_I.

2^0/ Soient $v_1, ..., v_n$ les vecteurs colonnes de X, vus comme des vecteurs de $V := K^n$ relativement à la base canonique $\{e_1, ..., e_n\}$. Donner les coordonnées de $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ (resp. de $v_{k+1} \wedge ... \wedge v_n$) dans la base canonique $\{e_I, I \in \mathcal{S}(k,n)\}$ de $\wedge^k V$ (resp. la base canonique $\{e_{I'}, I' \in \mathcal{S}(n-k,n)\}$ de $\wedge^{n-k}(V)$).

3^0/ On rappelle que $(v_1 \wedge ... \wedge v_k) \wedge (v_{k+1} \wedge ... \wedge v_n) = v_1 \wedge ... \wedge v_n$ dans $\wedge V$. Conclure.

Corrigé

I-1^o/ i) L'homographie f est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, et les conditions $f(0) = \infty, f(\infty) = 0$ imposent $d = 0, a = 0$, d'où $bc \neq 0$, et $f(z) = \frac{\alpha}{z}$, avec $\alpha = \frac{b}{c} \in K^\times$. Alors, $f(f(z)) = z$, donc f est une involution, qui échange les points (éventuellement confondus) $\{1, \alpha\}$. – ii) Soit $h : \Delta \to \mathbb{P}_1(K)$ une homographie telle que $h(P_1) = \infty, h(P_2) = 0$. Alors, l'homographie $f = h \circ \phi \circ h^{-1}$ de $\mathbb{P}_1(K)$ échange 0 et ∞, donc est une involution d'après (i). Idem donc pour φ, qui lui est conjuguée – iii) Soit $h : \Delta \to \mathbb{P}_1(K)$ l'unique homographie telle que $h(P_1) = \infty, h(P_2) = 0, h(Q_1) = 1$, et soit $\beta \neq 0, 1, \infty$ le nombre $h(Q_2)$. En conjuguant par h, on voit que l'existence et l'unicité de φ équivaut à l'existence et l'unicité d'une homographie f de $\mathbb{P}_1(K)$ échangeant 0 avec ∞, et 1 avec β. La première condition équivaut à imposer $f(z) = \frac{\alpha}{z}$ pour un $\alpha \in K^\times$, et la seconde est alors réalisée si et seulement si $\alpha = \beta$. Il y a donc une unique telle f, donc une unique involution φ de Δ répondant à la question. – iv) $[P_1, P_2, Q_1, Q_2] = [\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(Q_1), \varphi(Q_2)]$.

2^o/ i) La définition du birapport et son invariance sous φ montrent que $\varphi(Z_1) = Z_2 \Leftrightarrow [Y_1, Y_2, X_1, Z_1] = [\varphi(Y_1), \varphi(Y_2), \varphi(X_1), Z_2]$, qui équivaut à $[Y_1, Y_2, X_1, Z_1] = [Y_2, Y_1, X_2, Z_2]$. – ii) La perspective de centre B de la droite Δ vers la droite (AD) est une homographie qui envoie Y_1 sur Y_1, Y_2 sur F, X_1 sur A et Z_1 sur D. – iii) La perspective de centre C de la droite Δ vers la droite (AD) est une homographie qui envoie Y_2 sur F, Y_1 sur Y_1, X_2 sur D et Z_2 sur A. En appliquant 1/iv, on obtient $[Y_1, Y_2, X_1, Z_1] = [Y_2, Y_1, X_2, Z_2]$, d'où $\varphi(Z_1) = Z_2$.

3^o/ i) [Dans l'énoncé, il fallait lire : l'espace affine (au lieu de : vectoriel) euclidien $\mathbb{R}^2$.] Dans le repère orthogonal usuel de $\mathbb{R}^2$, une droite D_m de pente $m \in K$ (resp. $m = \infty$) admet pour projectivisée une droite d'équation $Y = mX + bT$ (resp. $X + bT = 0$), qui coupe la droite à l'infini $\Delta : (T = 0)$ au point $P_m = (1 : m : 0)$ (resp. $(0 : 1 : 0)$). Comme D_m et $D_{m'}$ sont perpendiculaires si et slt si $mm' = -1$ (avec la convention $0.\infty = \infty.0 = -1$), la relation d'orthogonalité revient à dire que les points P_m et $P_{m'}$ sont échangés par l'application $\varphi(m) = \frac{-1}{m}$, qui est bien une homographie involutive de la droite projective $\Delta \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Ici, $(AB) \cap \Delta = X_1$ et $(DC) \cap \Delta = X_2$ seront donc échangés par φ; de même pour $(BC) \cap \Delta = Y_2$ et $(AD) \cap \Delta = Y_1$. – ii) Par conséquent, $Z_1 = (DB) \cap \Delta$ et $Z_2 = (CA) \cap \Delta$ sont échangés par φ, et les droites (DB) et (CA) sont perpendiculaires. Autrement dit, les trois hauteurs du triangle ABD sont concourantes (en son orthocentre C).

II-1^o/ i) La matrice représentative de la forme bilinéaire b attachée à q est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est non nul. Donc q est de rang 4. Comme b est non dégénérée, la quadrique Γ est lisse. – ii) L'équation du plan tangent est $\Sigma_{i=0,\ldots,3} \frac{\partial q}{\partial x_i}(0, 1, 0, 2).X_i = 0$, c'est-à-dire $b\left((0, 1, 0, 2), (X_0, X_1, X_2, X_3)\right) = 0$, soit ici : $X_0 - 2X_2 = 0$. - iii) $\Pi \cap \Gamma$ est défini par le système $X_0 - 2X_2 = 0, X_0X_1 - X_2X_3 = 0$, qui équivaut au système $X_0 = 2X_2, X_2(2X_1 - X_3) = 0$, dont le lieu des zéros dans $\mathbb{P}_3$ est la réunion des droites $D'_1 : \{X_0 - 2X_2 = 0, 2X_1 - X_3 = 0\}$ et $D_1 : \{X_0 = 0, X_2 = 0\}$, qui concourent au point P_0. – iv) Les 4 équations définissant $D_1 \cap D_2$ n'ayant que $(0, 0, 0, 0)$ comme solution, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Celles qui définissent $D'_1 \cap D_2$ ont pour solution $(2x, 0, x, 0), x \in K$, qui correspond au point $Q_0 = (2 : 0 : 1 : 0)$ de $\mathbb{P}_3(K)$.

2^o/ i) Si $W \subset K^4$ est totalement isotrope, $W \subset W^\perp$. Comme b est non dégénérée, $dim W + dim W^\perp = 4$, donc $dim(W) \leq 2$. Un plan projectif $\Pi = \mathbb{P}(W)$ correspond à un sous-espace vectoriel W de dimension 3 de K^4, et est contenu dans Γ si et slt si W est totalement isotrope pour q, ce que sa dimension interdit. – ii) Comme Γ n'est pas la réunion de deux plans, la restriction de q à W est non nulle, et est donc une forme quadratique (en 3 variables), qui définit une conique $\Gamma \cap \Pi = C$ du plan projectif Π. La classification des coniques montre que si C contient une droite D, c'est la réunion de deux droites (ou une droite double) de Π. – iii) Soit V (resp. L) le plan (resp. la droite) de K^4 telle que $D = \mathbb{P}(V)$ (resp. $P = \mathbb{P}(L)$). Alors, $T_P(\Gamma)$ est le plan projectif attaché à l'orthogonal $L^\perp$ de L relativement à b. Comme $D \subset \Gamma$, $V = V^\perp$ est totalement isotrope maximal, et comme $L \subset V$, on a $V^\perp \subset L^\perp$. Ainsi, $D = \mathbb{P}(V^\perp)$ est contenu dans $\mathbb{P}(L^\perp) = T_P(\Gamma)$. Enfin, si Γ contenait 3 droites passant par P, elle seraient contenues dans l'intersection de Γ avec le plan $\Pi = T_P(\Gamma)$, ce qui contredit (ii).

3^o/ i) Pour tout point $P_2 \neq P_1$ de Γ, la droite (P_1P_2) est contenue dans Γ si et seulement P_2 appartient au plan tangent $\Pi_1 = T_{P_1}(\Gamma)$ (on a vu le sens direct au 2/iii; inversement, si $P_2 \in T_{P_1}(\Gamma)$, alors, $b(P_1, P_2) = 0$, et comme $q(P_1) = q(P_2) = 0$, tous les points de (P_1P_2) annulent q). Par ailleurs, Π_1, qui contient D_1 d'après 2/iii, ne contient pas D_2, sans quoi les droites D_1 et D_2 seraient coplanaires, donc concourantes. Donc le plan Π_1 et la droite D_2 de $\mathbb{P}_3(K)$ se rencontrent en un point $P_2 := T_{P_1}(\Gamma) \cap D_2$, qui est l'unique solution à la question. – ii) De même, pour tout point $P' \neq P$ de Γ, la droite (PP') est contenue dans Γ si et seulement P' appartient au plan tangent $T_P(\Gamma)$. Ce plan ne peut pas passer par le point P_1, sans quoi $(P_1P), (P_1P_2), D_1$ seraient trois droites issues de P_1, distinctes au vu des hypothèses sur P, et contenues dans Γ, en contradiction avec 2/iii. Il ne peut de même pas passer par P_2. Donc $T_P(\Gamma) \cap (P_1P_2)$ est un point P', distinct de P_1 et P_2, et c'est l'unique point de (P_1P_2) tel que $(PP') \subset \Gamma$. Il reste à voir que $D_3 := (PP')$ ne rencontre pas D_1 (répéter l'argument pour D_2). Puisque $P' \neq P_1$, les droites distinctes D_3, D_1 et (P_1P_2) seraient dans le cas contraire situées dans un même plan, en contradiction avec 2/ii.

III-1^o/ Pour $k = 1$, la formule exprime le développement du déterminant suivant la première colonne de X. Les parties $I \in \mathcal{S}(1, n)$ sont les indices $i = 1, ..., n$, et la règle de signes est $\varepsilon_i = (-1)^{i+1}$.

2^o/ D'après le cours, IV, §2, Théorème 2, les k-formes $e^*_I = e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_k}, I = (i_1 < ... < i_k) \in \mathcal{S}(k, n)$ forment la base duale de la base $\{e_I = e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}\}$ de $\wedge^k V$. Comme $v_j = \Sigma_{i=1,...,n} x_{ij} e_i$ pour tout $j = 1, ..., n$, la coordonnée de $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ sur e_I est, pour tout $I \in \mathcal{S}(k, n)$, donnée par $e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_k}(v_1 \wedge ... \wedge v_k) := det\big(e^*_{i_\ell}(v_j); 1 \leq \ell, j \leq k\big) = det(x_{i_\ell, j}, 1 \leq \ell, j \leq k) = X_{I,[1,...,k]}$. Ainsi, $v_1 \wedge ... \wedge v_k = \Sigma_{I \in \mathcal{S}(k,n)}\ X_{I,[1,...,k]} e_I$. De même, $v_{k+1} \wedge ... \wedge v_n = \Sigma_{I' \in \mathcal{S}(n-k,n)}\ X_{I',[k+1,...,n]} e_{I'}$.

3^o/ $(v_1 \wedge ... \wedge v_k) \wedge (v_{k+1} \wedge ... \wedge v_n) = \Sigma_{I \in \mathcal{S}(k,n), I' \in \mathcal{S}(n-k,n)} X_{I,[1,...,k]} X_{I',[k+1,...,n]} e_I \wedge e_{I'} = \Sigma_{I \in \mathcal{S}(k,n)} X_{I,[1,...,k]} X_{I^\sharp,[k+1,...,n]} e_I \wedge e_{I^\sharp}$, puisque $e_I \wedge e_{I'} = 0$ dès que $I \cap I' \neq \emptyset$. Par ailleurs, pour tout $I = (i_1 < ... < i_k)$, $e_I \wedge e_{I^\sharp} = \varepsilon_I\ e_1 \wedge e_2 \wedge .... \wedge e_n$, où $\varepsilon_I = \pm 1$ désigne la signature de (l'inverse de) la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & k+1 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_k & i_{k+1} & ... & i_n \end{pmatrix}$, avec $I^\sharp = (i_{k+1} < ... < i_n)$. Comme $v_1 \wedge .... \wedge v_n = det(X) e_1 \wedge ... \wedge e_n$, on a bien $det(X) = \Sigma_{I \in \mathcal{S}(k,n)} \varepsilon_I X_{I,[1,...,k]} X_{I^\sharp,[k+1,...,n]}$.